高等学校教学参考书

微积分学教程

第三卷　第二分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

吴亲仁　　路见可　译

人民教育出版社

高等学校教学参考书

微积分学教程

第三卷 第二分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

吴亲仁 路见可译

人民教育出版社

本书第三卷根据菲赫金哥尔茨（Г. М. Фихтенгольц）所著《微积分学教程》(Курс дифференциального и интегрального исчисления) 第三卷 1949 年版译出。可作为综合大学数学专业教学参考。

微积分学教程

第三卷　第二分册

Г. М. 菲赫金哥尔茨著

吴亲仁　路见可译

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

北京新华印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号13012·0112　开本 850×1168　1/32　印张 5 12/16

字数 154,000　印数 32,201—72,200　定价　(6)0.60

1957 年 2 月第 1 版　　1978 年 3 月北京第 3 次印刷

第二分册目录

第十七章　曲面面积·曲面积分

第十八章　三重积分及多重积分

§4. 場論初步

§5. 多重积分

第十七章　曲面面积·曲面积分

§1　双側曲面

593. 曲面的側　让我們首先来建立在以后討論中占重要地位的曲面的側这一概念。

在許多情形中，这个概念是通过直觉就可以了解的。如果曲面是由形如 $z=f(x, y)$ 的显方程給出，那就可以說到这曲面的上側或下側。* 如果曲面范圍着一个立体，那也容易想像到它的两側——朝向立体的內側，与朝向立体的周圍空間的外側。

从这直觉的概念出发，我們現在要对曲面的側这个概念給以确切的定义。

考慮一个光滑的曲面 (S)，它是封閉的或者是由分段光滑的边界所圍成的，并且它上面沒有奇点；因此，在这曲面的各点上都有确定的切面，它的位置随着切点位置的改变而連續地改变。

在曲面上取一定点 M_0，并在这点引一法綫，这法綫有两个可能的方向(它們可用方向余弦的符号来区别)，我們认定其中一方向。沿曲面画一个起自 M_0 而又回到 M_0 的閉路，并假定它不越过曲面的边界。令点 M 沿着这閉路环行，并在其各个接續的位置上給与法綫一个方向；这些方向就是由我們在起点 M_0 处所选定的那个法綫方向連續地轉变来的。这时下面两种情形必有一种发生：令点 M 环行一周再回到 M_0 时，法綫的方向或与出发时所定者相同，或与出发时所定者相反。

如果对于某一点 M_0 及某一通过 M_0 的閉路 M_0AM_0，后一种情形发生，則对于其它任一点 M_1 也容易作出一个起自 M_1 而又回到 M_1 的

* 我們常采用这类說法，这时是指 z 軸本身垂直向上。

閉路,使回到 M_1 时法綫的方向与起初所定者相反。例如,假若我們理解 M_1M_0 为曲面上联結 M_1 与 M_0 两点但不越过曲面的边界的任一曲綫,而 M_0M_1 为与其方向相反的同一曲綫,則 $M_1M_0AM_0M_1$ 就是这样的一个閉路。

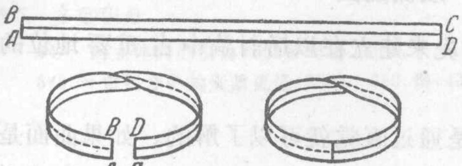

图 82

在这情况下曲面叫做单側的。所謂的莫彼阿斯带(图 82)就是这类曲面的一个典型的例子。如果我們把一长方形紙条 $ABCD$ 先扭一次,再粘起来,使 A 点与 C 点相合,B 点与 D 点相合,我們就可得到它的一个模型。假若用一种顏色来塗这个扭成的环带,那就可以不越过它的边界而用这种顏色塗遍环带的全部。像这一类的曲面不在我們今后討論之列。

現在我們假定不論 M_0 是怎样的点,不論通过 M_0 而不越过曲面边界的綫是怎样的閉路,沿此綫进行一周再回到起点 M_0 时,法綫的方向与起初所定者相同。在这些条件下的曲面叫做**双側的**。

設 S 是一个双側曲面。在 S 上任取一点 M_0,并給这点的法綫一个确定的方向。取这曲面的其它任一点 M_1,我們用任一个在曲面上但不越过曲面边界的道路(K)来連接 M_0 与 M_1,幷令点 M 沿这道路从 M_0 进行到 M_1。如果这时法綫的方向連續地改变,則点 M 到达 M_1 的位置时就带着一个完全确定的法綫方向,不倚賴于道路(K)的选擇。实际上,假若說 M 沿着两个不同的道路(K_1)与(K_2)从 M_0 进行到 M_1 时我們会在 M_1 点得到两个不同的法綫方向,則閉路 $M_0(K_1)M_1(K_2^{-1})M_0$ 就会使得回到 M_0 时所带的法綫方向不同于起初的法綫方向。这和双側曲面的定义相矛盾。

由此可見,在双側曲面上,选定了一个点上的法綫方向便唯一地決定全部点上的法綫方向的选擇。**曲面上全部点的集合連同那按指定的**

规则对这全部点上的法綫所給与的方向，叫做曲面的一个定側。

594. 例　1° 最簡单而又最重要的双側曲面的例子是用显方程 $z=f(x,y)$ 表达的曲面，这里假定函数 z 在某一平面区域 (D) 內連續，并且在这区域內有連續的偏导数

$$p=\frac{\partial z}{\partial x} \text{ 与 } q=\frac{\partial z}{\partial y}.$$

在这种情况下曲面的法綫方向余弦具有表达式：

$$\cos\lambda=\frac{-p}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad \cos\mu=\frac{-q}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\cos\nu=\frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

在根式前选取一确定的符号后，就在曲面的全部点上都建立了确定的法綫方向。因为根据假設，方向余弦是点的坐标的連續函数，故它所定的法綫方向也連續地依賴于点的位置。由此显然可見，**在 $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ 的公式中根式前符号的选擇**，正是在以前所說的曲面的側这个概念的意义之下，**确定了曲面的一側**。

如果我們在根式前选取正号，则在曲面的全部点上

$$\cos\nu=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

是正的，就是說所选一側的对应法綫和 z 軸作成的角是銳角。因此，由这选定的符号所确定的曲面的一側是上側。反之，在法綫方向余弦的表达式中选取負号就显示出曲面的下側（全部法綫都和 z 軸交成鈍角）。

2° 我們現在考虑，更一般地，任意一个由参数方程

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v) \tag{1}$$

給出的非封閉的光滑曲面 (S)，并且参数 u,v 在 uv 平面上某一有界区域 (Δ) 內变化。光滑性要求(1)中各函数及其偏导数都在 (Δ) 內連續，并且曲面沒有奇点。此外（特別着重地指出），我們假定重点不出現，所以曲面的每一点只能从参数 u,v 的一对值得到。

如果像寻常一样用 A,B,C，表示矩陣

$$\left\|\begin{matrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{matrix}\right\|$$

中三个行列式，再假設恒有 $A^2+B^2+C^2>0$，則曲面的法綫方向余弦可用熟知的公式来表达：

$$\left.\begin{aligned}\cos\lambda=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\mu=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\\ \cos\nu=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

并且在这情况下根式前选定一种符号便决定曲面的一側，所以曲面是双側的。实际上，如果符号已选定，则对于曲面的每一点（因为只有 u,v 的一对值对应于它！）公式(2)和一个确定的法綫方向相对应。当点移动时，法綫方向連續地改变。

沒有无重点的假定时，那就不能无条件地肯定說这曲面是双側的。因为和曲面的重点 M_0 对应至少有参数的两对不同的值 u_0，v_0 与 u_1，v_1，而对于这两对值即使把根式前的符号取得一样，公式(2)仍可能对 M_0 处的法綫定出两相反的方向。如果眞是这样，则这曲面一定是单側的。实际上，我們連接点 $m_0(u_0,v_0)$ 与点 $m_1(u_1,v_1)$ 成为 uv 平面上一个曲綫 m_0m_1；于是沿这曲綫我們得到曲面 (S) 上一个起自 M_0 而再回到 M_0 的閉曲綫：若一个点带着一个法綫方向从 M_0 出发，则沿这曲綫环行一周而回到 M_0 时，它所带的法綫方向已与出发时所定者相反！

3° 若一光滑曲面(S)是封閉的，圍着某一个立体，则它具有两側——內側与外側——是很明显的。設这曲面是由(1)中各参数方程表达。这时，虽然关于曲面上的点与区域(Δ)上的点成一一对应的假設不完全能实現，但是公式(2)中符号的选擇却全然确定曲面的一側。事实上像剛才上面說过的那种情形在这里是根本不可能的。

595. 曲面和空間的定向　設(S)是由簡单閉路(L)所范圍的一个非封閉的光滑双側曲面；选取这曲面的一个定側。我們現在按下面的規則对閉路(L)記上一确定的环行方向作为正向：这一个方向由观察者看来必須是依反时針方向进行的；这时假想观察者依这方向沿着这界綫进行，且与选定的一側对应的曲面的法綫同向地站着。"反时針方向"的含义，确切地說，就是观察者必須在他左边看見与他緊接的曲面的部分。对于曲面上每一个圍着一部分曲面的簡单閉曲綫来說，它的正向由这同一个規則同时建立起来。* 与正向相反的环行方向叫做負向，总之，这就是曲面的定向概念的內容。

如果从曲面的另一側出发，则法綫要改其方向为相反的方向，观察

* 当在閉路上确定正向时，必須只考虑这个部分。

者的位置也要变更；因此按照我們的規則必須重新布置閉路 (L) 的正負向以及曲面上其它各閉路的正負向：曲面改变其定向。由此可見，如果始終保持这个确立了的規則，則选定了曲面的一側就确定了曲面的定向；反之，选定了曲面边界的正向，就唯一地确定了曲面的一側。

在封閉的光滑曲面 (S) 范圍着某一个立体的情况下，这里所能談到的是对于这个立体来說曲面的外側或內側。要对于任一个簡单的閉曲綫用上述的規則来确立它的正向，这时不能做到，其原因是双重的。首先是这种曲綫（例如在环面上的任一經綫或緯綫）簡直可以“不分割”曲面，那时曲面从双方緊接着曲綫：我們的規則不能給出什么。然而即使閉路“分割”曲面成两区域，它也同样地“范圍着”这两区域，并且我們的規則要看选取的是那一个区域来定这閉路的两方向中那一个作为正向。以“分割”曲面的那种閉路为限，我們开头把一个区域和边界一同指出，然后正向就完全而唯一地建立起来。* 于是曲面的两定向之一就全靠所选取的一側决定。

如果对于每一个这样的曲面，把那个和曲面的外側对应的定向規定作正的定向，而把和它相反的当作負的定向，則空間本身由此而产生了某种确定的定向。这完全类似于平面上任一簡单閉曲綫的正向（可以說是正的定向）的选取，可以表征平面的定向［523］。

現在定义的那个空間定向，归根到底是以反时針方向的旋轉作为它的基础的，叫做右手定向。若所持的出发点是順时針方向的旋轉，則得到空間的左手定向。为了避免混乱起見，我們今后在空間定向起作用的那些問題上总是預定右手的空間定向。

必須指出，空間坐标軸的安排要由所規定的空間定向去决定。在右手定向下，坐标軸要安排得这样，当我們从正的 z 軸望它們时，由正

* 如果考虑平面上由同样的方向所确定的开的或閉的曲綫，則在第一种情形下可以說出曲綫上的任意两点那个在前与那个在后，而在第二种情形下只有指出了那两个点及由它們所限制的弧綫以后，才能够那样地說。可以看出这里所說的与正文中所說的相类似之处。

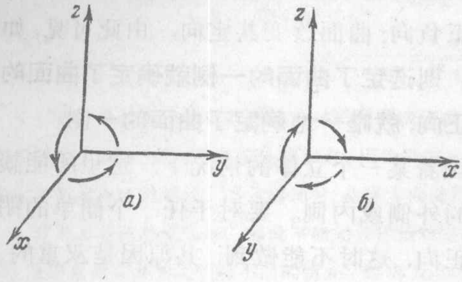

图 83

的 x 軸到正的 y 軸的旋轉是按反时針方向进行的(当字母 xyz 循环輪換时这也保持有效)(图 83, a); 在左手定向下, 所說的旋轉就順时針方向进行(图 83, $б$)。在第一种情形下坐标系 $Oxyz$ 叫做右手的, 而在第二种情形下叫做左手的。遵照上面所定的条件, 我們今后在所指的各情况下采用右手坐标系。

596. 法綫方向余弦公式中符号的选擇 我們現在要对前面說过的概念, 即曲面的一个側的选擇和其一个定向的建立两者之間的关系, 給出一个在以后极重要的应用。

我們再考虑在 **594**, 2° 中所說的非閉的光滑曲面 (S), 并选取它的一个定側(跟着也选好了定向!)。設 (Λ) 是 uv 平面上的区域 (Δ) 的边界, 而 (L) 是我們的曲面上和它对应的边界。我們假定(这总容易实現), 边界 (L) 的正向对应于边界 (Λ) 的正向。于是对于两个彼此对应的在区域 (Δ) 內的閉路 (λ) 和在曲面 (S) 上的閉路 (l), 也有同样的情形: (λ) 的正向引出 (l) 的正向。*

在这些条件下为了显示所选的曲面一側, 必須选取法綫方向余弦公式(2)中根式前的正号。

要证明这个断語只要查明, 至少在一点处由这些带正号的公式所确定的方向和所要求的法綫方向相一致。取曲面上任意一个內点 M_0; 在区域 (Δ) 內有和它对应的点 $m_0(u_0, v_0)$。設在这点处, 譬如說, 行列式

---

* 因为一閉路的方向可以由它的任一部分的方向来判断, 所以对于和 (Λ) 有一公共部分的閉路 (λ) 来說, 所下的断言是显明的, 然后容易变到一般場合。

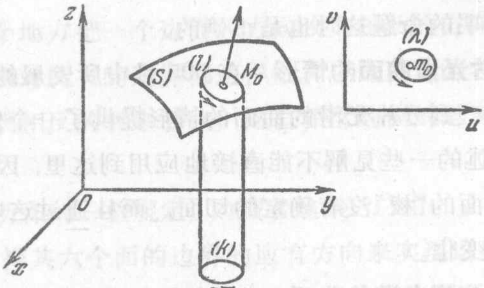

图　84

$$C=\begin{vmatrix} x_u' & y_u' \\ x_v' & y_v' \end{vmatrix}$$

不为零。于是在 uv 平面上找得到点 m_0 的一个这样小的邻域(其边界为(λ))，使得在曲面(S)上和它对应的点 M_0 的邻域(其边界为(l))是一一对应地射影到 xy 平面上。用(k)表这射影在 xy 平面上的閉路(图 84)。

如果在所考虑的点处以及在它的邻域内 $C>0$，則对应于閉路(λ)的正向有閉路(k)的正向(即在所选擇的坐标軸的排列下其方向是反时針方向)[参看 581,1)]。从图形中显然可見，要曲面上和(k)对应的閉路(l)的方向也是反时針方向，就必須从上面朝它看，因此在这情况下点 M_0 处的法綫应該是向上的，即应該与 z 軸交成銳角。如果在公式(2)中取正号，則由公式(2)就正有这情形，因为当 $C>0$ 时 $\cos\nu>0$。反之，$C<0$ 时法綫应該与 z 軸交成鈍角，这在上述选取的符号下一样地成立，因为 $C<0$ 时 $\cos\nu<0$。

若光滑的曲面(S)是閉的而且范圍着某一个立体[参看 594,3°]，則对于它来說就有类似的情形发生。假設我們已认定了曲面的一个定側，并且假設对应于区域(Δ)内任一閉路(λ_0)的正向有曲面(S)上由它定义的閉路(l_0)的正向，只要(l_0)所范圍的那个在曲面(S)上的区域是

与 uv 平面上由閉路(λ_0)所范圍的区域相对应。在这种情况下，上面对于开曲面所证明的命題这时也是正确的。

597. 分片光滑曲面的情形 在 595 目中所发展的概念，也为曲面的側的概念推广到分片光滑的曲面的情形提供了一个便利的方法。第 593 目中所叙述的一些見解不能直接地应用到这里，因为沿着那些連接各片光滑曲面的"棱"沒有确定的切面，而且通过这些棱时談不到法綫方向的連續变化。

設給定的分片光滑的曲面(S)是由各光滑的曲面(S_1)，(S_2)，…所組成，它們是沿着棱(即它們边界的公共部分)一个接着一个的。首先**假設这些面片中各片分开来都是双側的**。可是，要能够把整个曲面(S)看作是双側的，这个假設自然是不充分的；不难看出莫彼阿斯曲面是由两片光滑的双側曲面作成的。

在每片曲面$(S_i)(i=1, 2, \cdots)$的边界(K_i)上选取其两方向中之一作为正向；我們已知道，这可以确定曲面(S_i)的一側。若这选擇法能够进行到这样，使得**相接的两边界的公共部分*总是在两边具两个相反的方向**(图 85)，則只有这时曲面(S)是**双側的**。曲面(S)的一側定义为

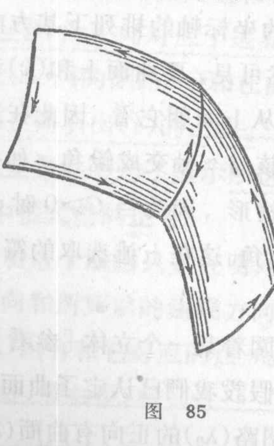

图 85

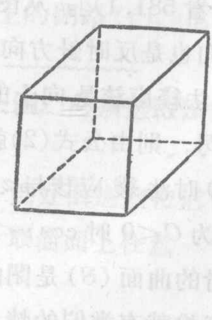

图 86

* 这个部分也可以由一些单独的面片組成。

由所述方法选出来的它的各部分的側的总和。

如果就在一个地方把一个边界的方向改为相反的方向，則为了遵守我們的条件必須对所有的边界都这样做。于是所选的各片曲面(S_i)的側都要用与它們相反的側来替代；这些相反的側的总和就組成曲面的第二側。

为了要掌握所作的一些規定，向讀者建議：1)用一立方体的面(图86)作为例子，选择其六个面的边界的应有方向来实現这些規定，2)假若企图对一已分解成为两个或多个双側曲面的莫彼阿斯带也这样做，試了解当中会有那些困难发生，最后，3)指出上面所給的关于曲面側的定义与曲面被分解为怎样的光滑面片无关。

§2　曲面面积

598. 許瓦耳兹的例子　曲面面积的概念与曲綫长的概念有相似的地方。我們已定义(开口)弧长为內接于这弧的折綫的周界当其各个边长趋于零时的极限。在曲面(譬如說也是开的)的情况下，很自然地会去考虑內接于它的多面形，并且定义曲面面积为这多面形的面积当其各个面的直徑趋向于零时的极限。

可是，在前世紀末这个定义的缺陷已被揭露出来。那就是許瓦耳兹(H. A. Schwarz)证明了上述极限甚至对于簡单的直圓柱面都可以不存在！我們来給出这一具启发性的例子。

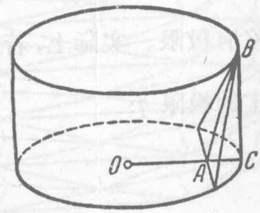

图　87

設給出一个半徑为R与高为H的圓柱面。用下面的方法画內接于这柱面的多面形。将柱面的高分为m等分，过每一分点作垂直于这柱面的軸的平面，于是在这曲面上得到$m+1$个圓周(包括柱面两底上的圓周在內)。将每一圓周分为n等分，使上一圓周的分点位于其下一圓周的弧的中点上头。

由所有这些弧的弦以及联結每一弦的端点到其上一圓周上和下一

圆周上的分点(它們恰巧分别地安置在对应弧的中点上头和下头)的綫段作成三角形(图 87)。这些三角形的总数是 $2mn$ 个，并且都是全等形。它們总合起来就构成我們所需要的一个多面形($\Sigma_{m,n}$);图 88就代表它的一个模型。

我們現在来計算每个三角形的面积 σ。取弦做底，其长等于

$$2R\sin\frac{\pi}{n}.$$

求三角形的高 AB (参看图形)，要我們注意 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}$，其中

$$AC=OC-OA=R\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right),\quad BC=\frac{H}{m}.$$

因此，这一三角形的面积等于

$$\sigma=R\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{R^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+\left(\frac{H}{m}\right)^2},$$

而多面形的全面积等于

$$\Sigma_{m,n}=2mn\sigma=2R\cdot n\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sqrt{R^2m^2\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+H^2}.$$

当 m 与 n 无限增加时，所有三角形的直徑趋向于零，但面积 $\Sigma_{m,n}$ 沒有极限。实际上，若令 m 与 n 这样地增加，使得比值 $\frac{m}{n^2}$ 趋向于一个确定的极限 q:

$$\lim\frac{m}{n^2}=q,$$

则因我們原有

$$\lim n\cdot\sin\frac{\pi}{n}=\pi,$$

而另一方面根据所作的假設又有

$$\lim m\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)=\lim m\cdot 2\sin^2\frac{\pi}{2n}=\lim\frac{\pi^2}{2}\frac{m}{n^2}=\frac{\pi^2}{2}q,$$

所以

$$\lim \Sigma_{m,n}=2\pi R\sqrt{\frac{\pi^4R^2}{4}q^2+H^2}.$$

我們看到,这个极限实质上依賴于 q 的大小,即依賴于 m 与 n 同时增加的方式。当 $q=0$ 时而且只有在这时,所說的极限等于 $2\pi RH$（这是在几何学教程中所已求出的面积的大小）,但它甚至可以和 q 同时为无穷大。因此,当 m 与 n 两数各自独立地变到无穷大时,面积 $\Sigma_{m,n}$ 确实沒有确定的极限。由此可見,如果站在上述定义的观点上,則柱面是沒有面积的。

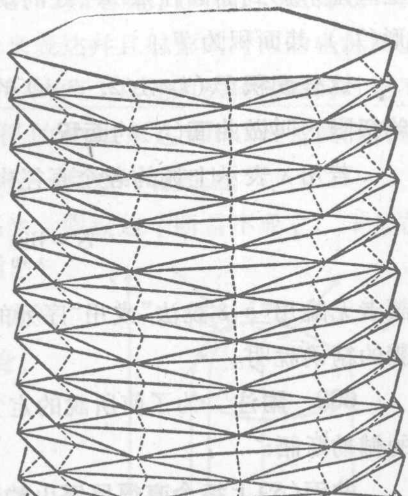

图 88

重要的是要了解,在內接于曲綫的折綫情况与內接于曲面的多面形情况間有些什么区別。为了簡便起見,我們把所說的曲綫与曲面都算作光滑的。在曲綫上,只要所作折綫的各个弦足够小,則每个弦的方向与其对应弧上任一点处的切綫方向要相差多小就多小。所以这种无穷小的弦可以越来越加准确地当作其对应的弧的元素。相反,要多小就可多小的那种頂点落在曲面上的多角形的面,可以完全地按自己在空間的位置不与曲面的切面接近;在这种情形下它显然不能替代曲面的元素。这种情形很好地說明了剛才所考慮的例子:柱面的切面全是直立的,而內接于柱面的各个三角形的面当 q 很大时几乎都变成水平的,而构成一些微小的皺紋。

599. 曲面面积的定义 整个以上所述,引使我們想到預先要求于所給曲面的內接多面形的,不仅是它的各个面的直徑要趋向于零,而且

这些面在空間的位置要无限地接近于曲面的各个切面的位置。

可是这种想法要完全实現很不簡单，我們只好放弃它[参看第 602 目]。我們要以另一种但也完全出乎自然的想法做基础，来給出曲面面积概念的定义。

我們将考虑一个由分段光滑的閉路 (L) 所范圍的开的光滑曲面 (S)。設这曲面被一个分段光滑的曲綫网分成許多部分

$$(S_1), (S_2), \cdots, (S_n),$$

并在每一部分 (S_i) 内任意地选取一点 $M_i (i=1, 2, \cdots, n)$。把元素 (S_i) 垂直地射影到曲面在点 M_i 处的切面上，我們得到在射影内的平面图形 (T_i)，其面积为 T_i.

这些面积 $T_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 的和在各个元素 (S_i) 的直徑趋于零时的极限 S 叫做曲面 (S) 的面积。

若用 λ 表示上述的各个直徑中最大者，則可写

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_i T_i.$$

讀者无論用“ε-δ 說法”或用“序列的說法”不难重新訂出对这一极限步驟的精确說明。

600. 附注 为了使所說的定义得到确切的意义，我們要建立下面的輔助断語：

曲面 (S) 上每个直徑足够小的部分 (S') 是一一对应地射影到这部分的任一点 M' 处的切面上。

因此，如果前一目所指的曲面的一切元素 (S_i) 的直徑都足够小，則它們在其对应切面上的射影 (T_i) 都是完全确定的平面图形。这些图形都是由分段光滑的曲綫所圍成的，而且显然是可求面积的：和数 $\sum T_i$ 具有意义。

我們来证明这断語。設曲面 (S) 是由参数方程

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \qquad (1)$$