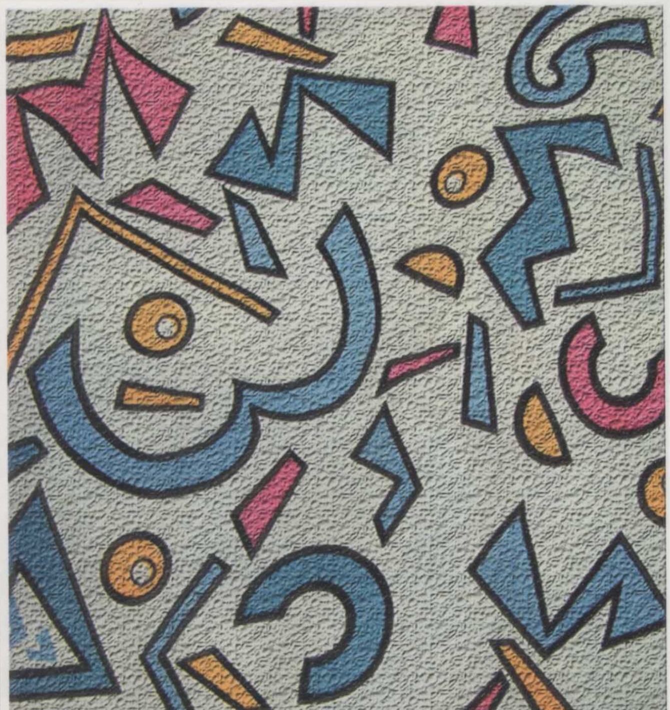
华章教育

普通高等院校公共基础课"十一五"应用型规划教材

应用概率统计

Applied Probability Statistics

彭美云 主编



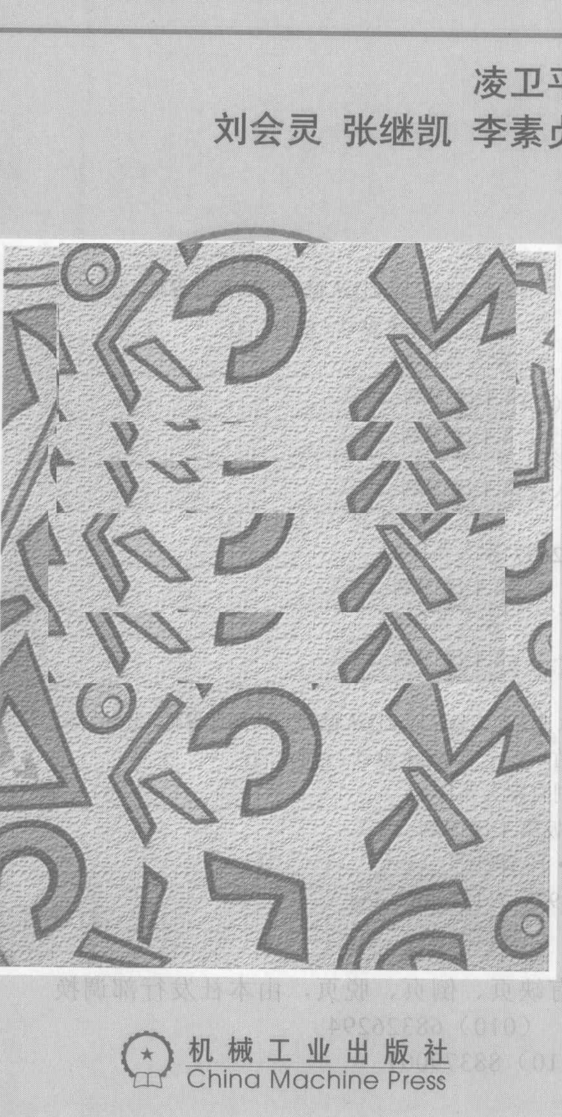
机械工业出版社
China Machine Press

普通高等院校公共基础课“十一五”应用型规划教材

应用概率统计

Applied Probability Statistics

彭美云 主　编
凌卫平 朱玉龙 副主编
刘会灵 张继凯 李素贞 辛奎东 参　编
张选群 主　审



机械工业出版社
China Machine Press

本书着眼于介绍概率论与数理统计的基本概念、基本原理和基本方法。在内容设计上力求语言流畅、层次清晰、引文准确，叙述由浅入深，逐步展开，强调可读性；对难点处理妥善，例题、习题的配置兼顾基础与提高，重在应用。大量的例题内容丰富，生动有趣，既能有效拓展学生的思路与视野，又能起到培养学生应用能力，激发学生学习兴趣的作用。在材料组织安排与例题的选配中，既考虑到为讲授者留有个人发挥的空间，又便于他们根据教学要求与学生情况对教材内容进行取舍。

本书可以作为高等学校各专业本科生、自考生的应用概率统计教材，也可以作为相关专业技术分析人员的自学材料或参考书。

版权所有，侵权必究
本书法律顾问　北京市展达律师事务所

图书在版编目（CIP）数据

应用概率统计／彭美云主编. —北京：机械工业出版社，2009.7
（普通高等院校公共基础课“十一五”应用型规划教材）

ISBN 978-7-111-26974-8

Ⅰ. 应…　Ⅱ. 彭…　Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材　②数理统计-高等学校-教材　Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 096929 号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037）
责任编辑：张娴竹　　　版式设计：刘永青
北京诚信伟业印刷有限公司印刷
2009 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
184mm×260mm・13 印张
标准书号：ISBN 978-7-111-26974-8
定价：27.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线：（010）68326294
投稿热线：（010）88379007

PREFACE 前言

《应用概率统计》一书是机械工业出版社出版的“十一五”应用型规划教材。

近半个多世纪以来，伴随着计算机技术与各种现代科学技术的快速发展，概率统计的应用达到了前所未有的规模，其基本理论与方法几乎渗透到自然科学和社会科学的各个领域。概率统计是数学领域中一门颇有特色与魅力的分支，也是理论联系实际最活跃的学科之一。从 20 世纪 80 年代起，概率统计已成为高等学校各专业本科生必修的一门课程。随着 21 世纪应用型高校的发展与壮大，一大批民办高校兴起，许多院校由专科办学层次升到本科层次。对适合此类高校使用的基础数学教材的需求变得尤为迫切，本教材就是在这样一种背景下应运而生的。

针对这一类学校对学生的培养目标，本书首先从选材上，着眼于介绍概率论与数理统计的基本概念、基本原理和基本方法，以加强学生的基础知识，积累后继学习的能力。本教材在内容设计上，尽可能与这一类院校对学生的培养目标保持一致。在文字表述等方面力求语言流畅、层次清晰、通俗易读、详略得当；叙述由浅入深，逐步展开，强调可读性。其次，对难点处理得当，例题、习题的配置兼顾基础与提高，重在应用。最后，为加强应用例题的讨论，强化学生的分析能力的培养，本书在每章之后都加上一个“综合应用例题”栏目。这些例题中的一部分是编者在多年的教学过程中收集或自编的应用例题，其内容丰富，生动有趣，既能有效拓展学生的思路与视野，又能起到培养学生的应用能力、激发学生学习兴趣的作用。本书在结构设计上，既有严谨的理论支撑，但又不过分追求理论论证。对一些难度较大的概念，都是通过一个合适的例题来导入，既便于学生理解与掌握，又方便学生自学。在材料组织安排与例题的选配中，既考虑到为教师留有个人发挥的空间，又便于他们根据教学要求与学生情况进行取舍。本教材加强了数理统计的内容，目的是为培养与增强学生的数据处理、

分析及应用能力。

特别指出的是，作为基础数学课程，本教材所用的数学符号及公式、附表等与国家大学数学统考试题所采用的符号一致，这对学生的学习十分重要。此外，该教材还有配套的《教师指导手册》与电子课件，这些配套教辅能帮助教师在课程教学过程中提高课堂教与学的效果。

作为一本应社会需求而生的基础课教材，为适应不同层次的需要，我们在设计的同时顾及了它的使用者层面，因此本书也适用于一般工科院校本科生、自考生等。此外，本教材也适合专科类学生选用，教师只需在内容上适当做些取舍便可。比如有些学校只讲概率部分，建议安排 36 个课时就够了；如需讲第 1～9 章的全部内容，则至少要安排 54 个课时。

本书由彭美云（武汉大学）任主编，凌卫平（广东白云学院）、朱玉龙（邯郸学院）任副主编，刘会灵、张继凯、辛奎东（广东白云学院）、李素贞（武汉大学）参编。其中第 1、6、8 章由彭美云编写，第 2、3 章由凌卫平编写，第 4、5 章由刘会灵编写，第 7、9 章由朱玉龙编写，书中插图由张继凯绘制，电子课件分别由李素贞（概率部分）、辛奎东（数理统计第 6、7 章）与张继凯（数理统计第 8、9 章）完成。全书由彭美云教授执笔修改定稿。

本教材的出版得到了机械工业出版社高伟先生的大力支持，武汉大学张选群教授审阅了本书的初稿，广东工业大学统计学博士何春也阅读了部分章节。他们不仅对本书给予充分肯定，同时也提出一些宝贵建议，这对提高本书质量起了积极作用，在此对他们一并表示由衷的谢意。

我们在成书过程中，难免还有考虑不周之处，敬请各位同行和读者不吝赐教。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

SUGGESTION 教学建议

教学目的

概率统计是高等院校必修的一门数学基础课，它对训练学生的数学思维、逻辑推理及应用能力有较大作用。数学素质是当代大学生可持续发展所应具备的基本素质，也是未来劳动者必需具备的核心能力之一。良好的数学基础将会影响其一生的学习能力，本课程的教学就是要追求并达到这一目标。

教学方式方法及手段建议

概率统计作为数学应用的基础，以广泛应用于方方面面的雄姿而绚丽多彩，以各种各样浓聚深邃蕴意的符号而千姿百态，以欣赏般的享受而引人入胜。现实生活中概率统计问题比比皆是，在教学中将这类联系生活实际的应用问题制作成相应的 PPT 课件，不仅可以增加课堂教学信息量，而且也能激发学生的学习兴趣，充分发挥学生学习概率统计的潜能，提高学生的学习热情。对于某些难以掌握的知识难点，采用板书教学将更加灵活自如，方便师生之间的沟通，既能帮助教师突出教学重点，抓住关键；又能帮助学生掌握教学思路，集中学生的注意力，增强学生的记忆力和理解力。概率统计以其应用面宽的特点解决了我们生活中的许多问题，以欣赏般的享受心态来加强应用例题的讨论，不仅能有效提高学生的分析能力与解题能力，还把师生带入引人入胜的境界。对统计计算部分，如果有条件安排一些上机时间进行统计计算实践，既能提升学生的学习热情，又可培养与增强学生的数据处理和分析应用能力。将课堂讲授与计算机操作的有机结合，体现了数学教学的创新，对提高学生的数学素质，拓宽学生的视野与思路，都会有明显效果。

学时分配表（供参考）

章　　节	建议教学课时	备　　注
第 1 章	8	课堂讲授为主
第 2 章	7	课堂讲授为主
第 3 章	7	课堂讲授为主
第 4 章	6	课堂讲授为主
第 5 章	4	课堂讲授为主
概率论小结及习题课	2	以课堂讨论为主
第 6 章	4	课堂讲授为主
第 7 章	8	课堂讲授为主
第 8 章	8	课堂讲授为主
第 9 章	4	课堂讲授为主
统计小结及习题课	2	以课堂讨论为主
数理统计上机计算	2~4	上机练习（用课外时间）

注：目录中带有*的章节可视教学需要进行选讲。

CHAPTER 目录

Chapter

第 1 章

随机事件及其概率

“概率论”是数学领域中一门颇有特色与魅力的分支，也是理论联系实际最活跃的学科之一．概率论知识能使我们正确地评价某种直觉所感受到的，往往又不能解释清楚的见解的合理性．更有趣的是，生活中大部分问题都可归结为概率问题．而概率统计规律在各领域中的广泛应用和卓有成效的贡献，几乎使它成为一切专家、学者、实业家手中的有力工具，从而也使它在科学上的地位越来越被人们所重视．

本章是学习概率论入门的一把钥匙．它一方面从内容上以其一系列引人入胜的问题、有趣的事实、富有兴味的概念以及许多意想不到的结果而形成一种特殊的魅力，可深深地激起学生们的学习兴趣；另一方面，它又以概念多、模型杂、习题内容广泛、解题难度大等特点而不同于其他各章，故学习本章首先要使学生在分析能力与解题能力上受到充分的训练．在解题中特别要注意的是，绝不能孤立地去分析一个一个的问题，不然的话，势必被貌似杂乱无章的一大堆“事件”所困惑，而且在理论和应用结合上也难于突破，甚至摆脱不了学习中一筹莫展的被动状态．

1.1　随机事件

随机事件及随机事件的概率是本章两个最基本、最重要的概念．

1.1.1　随机试验与样本空间

1．随机现象

客观世界中的各种现象可以分为两类，一类是确定性现象，指在一定条件下，重复进行试验，某一结果必然发生或必然不发生，称为确定性现象．例如：在标准大气压下，纯水加热到 100 摄氏度必然沸腾；上抛一个物体必然下落；早晨太阳必然从东方升起；水在 0 摄氏度一定结冰等．另一类现象是指在个别试验中，其结果呈现出不

确定性，但在大量重复试验中，其结果又具有统计规律性的现象，称之为随机现象．例如：抛掷一枚均匀硬币，可能出现“正面”（H），也可能出现“反面”（T）；某地区 4 月份的降雨量；打靶射击时，可能打中靶心，也可能打不中；某人在肝炎普查中验血结果呈现阳性，那么他可能确实是肝炎患者，也可能不是．以上例举的现象都带有不确定性，在概率论中称之为随机现象．

概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科．

2．随机试验

为了研究随机现象，就要对客观事物进行观察或试验，这里所指的试验是一个含义广泛的术语，它包括各种科学实验或对某事物的某些特征进行的观察，例如：

E_1：抛掷一颗均匀骰子，观察其出现的点数；

E_2：对直径为 1 米的圆靶进行远距离射击，观察其弹着点与靶心的距离；

E_3：研究播种时种子的发芽率；

E_4：多次观测某三角形三内角之和，观察其测量结果与 180° 之差；

E_5：袋中有材料、大小和形状相同的 5 个球，其中 3 个白球、2 个黑球，现从中任取 1 个，观察白球出现的情况；

E_6：在产品抽样检验中，每 100 个产品中有 5 个次品，若每次抽取 3 个进行检验，观察其出现的次品数．

以上这些试验具有以下 3 个特点：

（1）试验可以在相同的条件下重复进行（亦即不变的一组条件“S”下）；

（2）每次试验的可能结果不止一个，且所有可能结果都是已知的；

（3）在每次试验之前，不能确定哪一个结果会出现，如图 1-1 所示．

这样的试验是一个随机试验，简称试验．随机试验一般用大写字母 E 来表示．在概率论中，我们就是通过随机试验来研究随机现象的．

$$\text{条件“S”下} \Rightarrow \begin{cases} \text{结果}1 \\ \text{结果}2 \\ \vdots \\ \text{结果}n \end{cases}$$

图 1-1　随机试验示意图

1.1.2　随机事件

1．随机事件

在随机试验中，可能出现或可能不出现的试验结果称为随机事件，简称事件，一般用大写字母 A，B，C 等表示，随机事件是概率论研究的主要对象．

（1）基本事件．在概率论中，称每一个可能出现的试验结果为基本事件（亦称样本点），用 e 或 ω 表示．例如 E_1 中“出现 1 点”、“出现 5 点”等都是基本事件．

（2）复合事件．在随机试验中，由若干个基本事件组合而成的事件，称之为复合事件．例如 E_1 中出现“偶数点”就是包含有可能为“2 点”、“4 点”或“6 点”3 个基本事件．

（3）必然事件．在每次试验中必然发生的试验结果，称之为必然事件，用 Ω 表示．

（4）不可能事件．在每次试验中必然不发生的试验结果，称之为不可能事件，用 Φ 表示．

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

必然事件与不可能事件本来没有随机性，为了讨论问题方便起见，我们将其作为两个特殊的随机事件，其在概率问题讨论中起着重要作用.

2．样本空间

试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间，或者说，所有基本事件组成的集合，用Ω表示．显然，每一个事件都可看成是Ω的子集，必然事件就是样本空间Ω，不可能事件就是空集Φ．在实际问题中，读者要善于判断随机试验的样本空间，这是很重要的．这里，我们将上述所列举的 6 种随机试验的样本空间，表述于下：

在 E_1 中，$\Omega_1=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，“1”表示“出现 1 点”，其他类推；

在 E_2 中，$\Omega_2=\{x:0\leqslant x\leqslant 50\}$，$x$是弹着点与靶心的距离，单位厘米；

在 E_3 中，$\Omega_3=\{0, 1, 2, \cdots, 10\}$，其中$i$表示 10 粒种子中发芽的种子数，$i=0, 1, 2, \cdots, 10$；

在 E_4 中，$\Omega_4=\{x:0\leqslant x\leqslant \delta\}$，其中$\delta=$观测值$-180°$，在测量中称之为允许误差或限差；

在 E_5 中，$\Omega_5=\{W_1, W_2, W_3, b_1, b_2\}$，其中 W_i为白球代号，$i=1, 2, 3$；b_j为黑球代号，$j=1, 2$；

在 E_6 中，$\Omega_6=\{(a_1, a_2, a_3);(a_2, a_3, a_4);\cdots;\}$其中：$a_i$表示第 i 件产品的代号，注意到从 100 个产品中任取 3 件，有 C_{100}^3 种可能结果.

从以上讨论可知，随着问题的不同，试验的样本空间可以相当复杂，也可以相当简单．而且一个样本空间往往可以概括各种实际内容大不相同的问题，例如，只包含两个基本事件的样本空间，既能作为抛掷硬币出现正、反面的模型，也能用于产品检验中出现“正品”或“次品”的模型，又能用于打靶中“中”与“不中”的模型等等。尽管问题的内容如此不同，但仍可把它们归结为相同的概率模型.

3．事件之间的关系

在研究实际问题时，往往需要考虑试验中各种可能发生的结果或事件，这些事件都是相互联系的．因此我们不能只是孤立地研究事件本身，而是要研究事件之间的关系和运算规律，这对今后讨论概率的计算是十分必要的.

现对事件间的关系讨论如下：设试验 E，样本空间Ω，事件 A，B，C.

（1）事件的包含与相等．如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含 A，或称 A 被 B 包含，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$．如果有 $A\subset B$，$B\subset A$ 同时成立，则称事件 A 与 B 相等，记作 $A=B$．事件的包含关系见图 1-2 所示.

注：对于不可能事件Φ因不含有任何基本事件 e，可约定$\Phi\subset A$.

（2）事件的并与交．若“事件 A 与 B 中至少有一个发生”，称做事件 A 与 B 的并，记作 $A\cup B$．若“事件 A 与 B 同时发生”，称做事件 A 与 B 的交，记作 $A\cap B$ 或 AB．见图 1-3、图 1-4 所示.

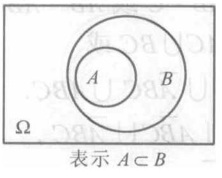


图　1-2

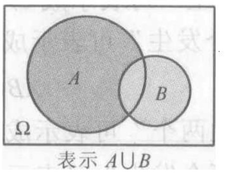


图　1-3

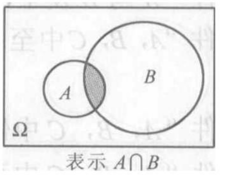
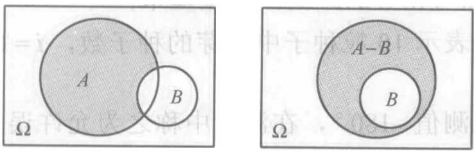


图　1-4

事件的并与交可推广到有限个事件的情况，即若有 n 个事件：A_1，A_2，…，A_n，则“A_1，A_2，…，A_n 中至少有一个发生”的事件称做 A_1，A_2，…，A_n 的并，记作“$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$”；若“$A_1$，$A_2$，…，$A_n$ 同时发生”，称其为事件 A_1，A_2，…，A_n 的交，记作“$A_1A_2\cdots A_n$”.

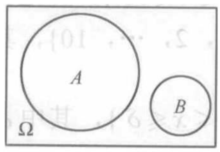
（3）事件的差．若“事件 A 发生而 B 不发生”，称做事件 A 与 B 的差，记作 $A-B$ 或 $A\overline{B}$．见图 1-5 所示.

（4）互不相容．若事件 A 与 B 不能同时发生，也就是说 AB 是一个不可能事件，即 $AB=\Phi$，则称事件 A 与 B 互不相容．见图 1-6 所示.



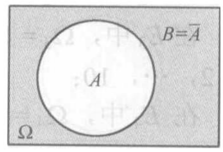
表示 $A-B$ 或 $A\overline{B}$

图 1-5



表示 $AB=\Phi$

图 1-6



表示 $\overline{A}$

图 1-7

（5）相互对立．对事件 A，令 $\overline{A}=\Omega-A$，称 $\overline{A}$ 是 A 的对立事件或逆事件．则有：$A\overline{A}=\Phi$，$A\cup\overline{A}=\Omega$，$\overline{\overline{A}}=A$

对立事件见图 1-7 所示．这里特别要注意互斥不一定互逆，但互逆一定互斥．以下我们就用上述定义的事件间的关系来给出下列例题中各事件间的关系.

【例题 1.1】 抛掷两个均匀钱币，若把有字的一面看做正面，并设 $A=$\{正好一个正面朝上\}，$B=$\{两个正面朝上\}，$C=$\{至少一个正面朝上\}，$D=$\{无正面朝下\}，试写出 A，B，C 之间的关系.

解：显然 A，B，C 之间有如下关系：

$$A\subset C,\qquad B\subset C$$

又
$$B\subset D,\quad D\subset B,\ \text{故有}\ B=D$$

【例题 1.2】 抛掷一颗均匀骰子，其 $\Omega=\{e_1, e_2, \cdots, e_6\}$，（$e_i$ 表示出现 i 点）．设

$$A=\{e_2,\ e_3\},\ B=\{e_1,\ e_4\},\ C=\{e_1,\ e_4,\ e_5,\ e_6\}$$

试写出 A，B，C 之间的关系.

解：显然 A，B，C 之间有如下关系：

$$AB=\Phi,\qquad AC=\Phi\qquad A\cup C=\Omega$$

即事件 A 与事件 B 互不相容，而事件 A 与事件 C 是相互对立事件.

【例题 1.3】 用上述定义的事件间的关系来讨论下列事件的表示：

- 事件“A 与 B 发生，C 不发生”可表示成 $\Rightarrow AB\overline{C}$ 或 $AB-C$ 或 $AB-ABC$；
- 事件“A, B, C 中至少有两个发生”可表示成 $\Rightarrow AB\cup AC\cup BC$ 或
$$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC.$$
- 事件“A，B，C 中恰好发生两个”可表示成 $\Rightarrow AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$.
- 事件“A，B，C 中至多有两个发生”可表示成 $\Rightarrow \overline{ABC}$.

◆ 事件“A,B,C 中至多一个事件发生”可以表示成$\Rightarrow \bar{A}B\bar{C}\cup A\bar{B}\,\bar{C}\cup \bar{A}\,\bar{B}C\cup \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C}$；

也可表示成$\Rightarrow \overline{AB\cup BC\cup AC}$.

◆ 事件“A 发生而 B 与 C 都不发生”可以表示成$\Rightarrow A\bar{B}\,\bar{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B\cup C)$.

◆ 事件 “A，B，C 中恰好发生一个” 可表示成$\Rightarrow A\bar{B}\,\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\,\bar{B}C$.

◆ 事件 “A，B，C 中至少发生一个” 可表示成$\Rightarrow A\cup B\cup C$ 或

$A\bar{B}\,\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\,\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup ABC$.

4. 事件的运算规律

设 A，B，C 为试验 E 的事件，Ω 为样本空间，Φ 为不可能事件，则事件的运算满足以下规律：

（1） $A\cup B=B\cup A$， $AB=BA$　（交换律）

（2） $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$， $(AB)C=A(BC)$　（结合律）

（3） $(A\cup B)C=AC\cup BC$， $(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$　（分配律）

（4） $\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B}$， $\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$　（德摩根（De Morgan）对偶律）

推广到 n 个事件的情况，此时有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A}_i，\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\bar{A}_i$$

对偶律在概率计算中有重要应用，尤其是在某种条件下，要把事件间的并的关系转化为交的关系，或将交的关系转化为并的关系时，就要运用对偶律来实现.

另外，事件的运算还有下列等式成立：

$$A\cup A=A\quad A\cup\bar{A}=\Omega\quad A\cup\Omega=\Omega\quad A\cup\Phi=A$$

$$A\cap A=A\quad A\cap\bar{A}=\Phi\quad A\cap\Omega=A\quad A\cap\Phi=\Phi$$

从以上讨论可知，事件之间的关系及运算与集合的定义、运算所用记号是相对应的，且基本上是一致的. 因此对事件的分析可转化为对集合的分析，从而利用集合的运算规则推得事件的运算规律，这对于建立概率论的严格的数学基础是非常重要的.

1.2　随机事件的概率

随机事件虽有其偶然性一面，但在多次重复试验中又呈现出明显的统计规律性. 对此，进一步要研究的问题是随机事件在一次试验中出现的可能性大小. 所谓事件的概率就是用来描述事件在试验中出现的可能性大小的数量指标，为了引入这一概念，我们先来讨论事件频率的概念及其有关性质.

1.2.1　频率的概念

【定义 1.1】　设事件 A 在 n 次独立重复试验中，出现了 μ_a 次，称比值 μ_a/n 为事件 A 在 n 次试验中出现的频率. 记作

$$f_n(A)=\frac{\mu_a}{n} \tag{1-1}$$

以下看一个简单例子. 有人重复地以大量同一品种水稻种子做发芽试验，在相似的种植条件下，观察它发芽的频率. 现分别从中抽取 10 粒、50 粒、100 粒、200 粒、300 粒、400 粒种子进行试验，结果如表 1-1 所示：

表 1-1　水稻种子发芽试验数据

抽取粒数 n	10	50	100	200	300	400
发芽粒数 μ_a	8	45	91	180	268	361
发芽频率 $f_n(A)$	0.800	0.900	0.910	0.900	0.893	0.903

从表 1-1 中看出，种子发芽的频率不是一个固定的数. 它随着抽取粒数的增多，种子发芽的频率越来越明显地摆动于数 0.9 附近，而且摆动的幅度逐渐减少，或者说频率逐渐稳定于 0.9.

频率的稳定性是一种统计规律性，稳定于的那个数称为频率的稳定值，可用其来表征事件 A 在一次试验中出现的可能性大小.

1.2.2　频率的性质

性质 1　$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$　　非负性

性质 2　$f_n(\Omega)=1$　　规范性

性质 3　若 A_1，A_2，…，A_k 是两两互不相容的事件，则有：

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k)$$　　可加性

1.2.3　概率

频率的重要意义在于：一方面它能一定程度上反映事件 A 发生的可能性大小；另一方面它比较简单，容易掌握，而且可以在理论上证明（见 5.1.3 贝努里大数定律）. 在一定条件下，当试验次数 n 逐渐增大时，$f_n(A)$ 逐渐稳定于某个常数 p，也就是说，对每一个随机事件 A 都客观存在这样一个数 p 与之对应. 这个数就是我们用来表征事件 A 在一次试验中出现的可能性大小的数量指标，这个数称其为概率.

【定义 1.2】　设 Ω 是随机试验 E 的样本空间，对其每一事件 A 赋予一定实数 $P(A)$，如果 $P(A)$满足以下性质：

性质 1　对每一事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$　　非负性

性质 2　$P(\Omega)=1$　　规范性

性质 3　若 A_1，A_2，…，A_k，…，是两两互不相容的事件，则有

$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$　　有限可加性

$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_k)+\cdots$　　可列可加性

则称 $P(A)$为事件 A 的概率. 这个定义也称之为概率的一般定义.

由概率的定义，可以推得概率的一些重要性质.

1.2.4　概率的性质

性质 1　设 $A\cup\overline{A}=\Omega$，$A\overline{A}=\Phi$，则有：$P(A)+P(\overline{A})=1$；

证明：因为 $A\cup\overline{A}=\Omega$，$A\overline{A}=\Phi$，则有

$$P(\Omega)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1$$

所以　$P(A)+P(\overline{A})=1$.　　（1-2）

性质 2　$P(\Phi)=0$　（证略）

性质 3　设 A，B 为两事件，若 $B\supset A$，则有：

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

$$P(A)\leqslant P(B).$$

证明：由条件知，$A\cup(B-A)=B$，$A(B-A)=\Phi$，

所以　$P(B)=P(A)+P(B-A)$，

从而有　$P(B-A)=P(B)-P(A)$，　　（1-3）

又因　$P(B-A)\geqslant 0$，

于是有　$P(A)\leqslant P(B)$.

性质 4　对任意两个事件 A，B，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

证明：仿照性质 3 证明. 因为　$A\cup B=A\cup(B-AB)$，

又　$A(B-AB)=\Phi$，且 $AB\subset B$，

由性质 3 结果得：　$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)$，

$$=P(A)+P(B)-P(AB)\qquad(1\text{-}4)$$

显然，当　$AB=\Phi$ 时，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)\qquad(1\text{-}5)$$

性质 4 可以推广到有限个事件的情况. 设 A_1，A_2，…，A_n 是 n 个事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)\qquad(1\text{-}6)$$

上述公式（1-2）（1-3）（1-4）（1-5）统称为概率的加法公式，它们均可推广到 n 个事件的情形，这些公式在概率计算中起着重要作用.

1.2.5　古典概型

古典概型是一类最简单而又常见的随机试验，这类试验具有以下特点：

（1）试验的样本空间的元素只有有限个，即 $\Omega=\{e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_n\}$；

（2）试验中每个基本事件发生的可能性相同，且两两互不相容. 即

$$P(e_1)=P(e_2)=\cdots=P(e_n)=\frac{1}{n}$$

把具有这种性质的随机现象的数学模型称为古典概型，也称为等可能概型.

【定义 1.3】 在古典概型中，事件 A 所包含的基本事件个数 k 与基本事件的总数 n 的比值称为事件 A 的概率，记为：

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件个数}}{\text{样本空间}\Omega\text{包含的基本事件总数}}=\frac{k}{n} \tag{1-7}$$

概率的这个定义称为概率的古典定义．由定义给出了计算古典概型中事件 A 的概率的公式.

古典概型是概率论发展初期的主要研究对象，它在概率论中有很重要的地位．一方面因为它比较简单，许多概念既直观又容易理解；另一方面，它又概括了许多实际问题，有很广泛的应用，以下我们就来讨论古典概型的例题计算与实际应用.

【例题 1.4】 从 0，1，…，9 这 10 个数中随机抽取一个数字，求取出的是奇数的概率.

解：设 $A=\{$取出奇数数字$\}$，则由题意可知：从 0，1，…，9 这 10 个数中随机抽取 1 个数字，其所有可能取法共有 10 种，即样本空间包含的基本事件总数为 $n=10$，从 0，1，…，9 中取出奇数的个数有 1，3，5，7，9 这 5 个数，即事件 A 包含的基本事件个数为 $k=5$.

于是由古典概型计算公式（1-7）可得：

$$P(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

【例题 1.5】 盒中有红、黄、蓝球各一个，有放回的摸 3 次，每次摸一个.
求：$P\{$全红$\}$，$P\{$无红$\}$，$P\{$蓝出现$\}$，$P\{$全红或全黄$\}$，$P\{$无红或无黄$\}$.

解：由题意知，任取一个有 3 种可能，则有放回摸 3 次，其所有可能取法共有 $3\times3\times3=27$ 种，即：$n=27$，于是有：

$$P\{\text{全红}\}=\frac{C_1^1C_1^1C_1^1}{3^3}=\frac{1}{27},$$

$$P\{\text{无红}\}=\frac{C_2^1C_2^1C_2^1}{3^3}=\frac{8}{27}，（注意：\mathrm{P}\{\text{无红}\}\neq1-\mathrm{P}\{\text{全红}\}），$$

$$P\{\text{蓝出现}\}=1-P\{\text{无蓝}\}=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27},$$

$$P\{\text{全红或全黄}\}=P\{\text{全红}\}+P\{\text{全黄}\}=\frac{2}{27}，（注：全红、全黄是互不相容事件）$$

$$\begin{aligned}P\{\text{无红或无黄}\}&=P\{\text{无红}\}+P\{\text{无黄}\}-P\{\text{无红且无黄}\}\\&=\frac{8}{27}+\frac{8}{27}-\frac{1}{27}=\frac{15}{27}\end{aligned}$$

注意：通过本题讨论，熟练掌握古典概型、加法公式、对立事件等概率的计算.

【例题 1.6】 将 n 只球随机地放到 N（$N\geqslant n$）个盒子中去，试求每个盒子至多有一只球的概率（设盒子的容量不限）.

注：本例是一种常用的具有典型意义的概率模型，通常称之为分房模型，诸如有 n 个人都以相同的概率被分配到 N 个房间去，或某指定的 n 个房间至多只有一个人的

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com