



全国硕士研究生入学统一考试备考指南

新数学三

(适用于经济学、
管理学等专业的考生)

XIN SHU XUE SAN

陈启浩 主 编
陈启浩 寿 宇 编 著

(最新版)

贴近考纲、贴近考生、贴近考试
实用性强、针对性强、前瞻性强

教育大社与权威专家的强强联合



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

全国硕士研究生入学统一考试备考指南

新数学三

XIN SHUXUE SAN

(适用于经济学、
管理学等专业的考生)

陈启浩 主 编

陈启浩 寿 宇 编 著

(最新版)

贴近考纲、贴近考生、贴近考试
实用性强、针对性强、前瞻性强

教育大社与权威专家的强强联合



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP) 数据

全国硕士研究生入学统一考试备考指南·新数学三 / 陈启浩主编. —北京: 北京师范大学出版社, 2009.6
(适用于经济学、管理学等专业的考生)
ISBN 978-7-303-09930-6

I. 全… II. 陈… III. 高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. G643

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 060946 号

营销中心电话 010-58802181 58808006
北师大出版社高等教育分社网 <http://gaojiao.bnup.com.cn>
电子信箱 beishida168@126.com

出版发行: 北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街 19 号
邮政编码: 100875

印刷: 北京京师印务有限公司
经销: 全国新华书店
开本: 184 mm × 260 mm
印张: 30.5
字数: 780 千字
版次: 2009 年 6 月第 1 版
印次: 2009 年 6 月第 1 次印刷
定价: 45.00 元

策划编辑: 岳昌庆 责任编辑: 岳昌庆
美术编辑: 高霞 装帧设计: 高霞
责任校对: 李茵 责任印制: 李丽

版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话: 010-58800697

北京读者服务部电话: 010-58808104

外埠邮购电话: 010-58808083

本书如有印装质量问题, 请与印制管理部联系调换。

· 印制管理部电话: 010-58800825

前 言

本书是根据研究生入学考试新数学三的考试大纲精心编写的,旨在指导考研学子快而好地复习“微积分·线性代数·概率论与数理统计”,在较短时间内使应考能力有较大幅度的提高.

全书以知识点为核心展开,强调解题方法与解题技巧,有较强的实用性、针对性和前瞻性,共分三篇,计十九章,每章分“考纲要求”、“主要知识点”和“方法总结与综合举例”(除第七、十七、十九章外)三部分,每章后都有练习题(书后附有练习题的参考答案).

每章的“主要知识点”都是在对考纲的深入研究和历届试题的精心分析,并考虑到读者都是学过或初步学过“微积分”“线性代数”和“概率论与数理统计”的基础上提炼出来的,每个知识点都由以下三项组成:

- 主要内容:简要给出本知识点所蕴涵的和应掌握的基本内容.
- 常考问题:指出针对本知识点的曾出现过的和将会出现的考点.
- 典型例题:为理解和掌握本知识点而给出的具有代表性的、难度与考研真题相当的例题(其中有些就是历届的考研真题).

在“方法总结与综合举例”中,系统总结了本章的主要计算方法,并通过若干个综合性的例题,进一步揭示这些计算方法的实质和相关的计算技巧,融会贯通有关的知识点,使之灵活运用.

每章后的练习题,除第七、十七、十九章只有练习题(A)外,都分练习题(A)与练习题(B),其中(A)是基础练习题,(B)是综合提高题,它们是全书不可分割的一部分.如果能在读完每章之后,认真做一做练习题,将会使你无论在基本概念、基本理论的理解方面,还是在计算方法和计算技巧的掌握方面都会有一个长足的进步,会使你更加从容面对研究生入学考试.书后还附有2009年数学三考研试题及两份模拟试题.

由于成书时间仓促,书中疏漏之处在所难免,恳请广大读者和同仁指正.

编著者

2009年1月于北京

目 录

第一篇 微积分

第一章 函数、极限、连续	(3)
一、考纲要求	(3)
二、主要知识点	(3)
(一) 函数的定义域与值域	(3)
(二) 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性	(4)
(三) 复合函数与反函数	(6)
(四) 函数极限与左、右极限之间的关系	(7)
(五) 两个重要极限	(9)
(六) 无穷小比较	(11)
(七) 函数的连续性	(13)
(八) 函数的间断点	(14)
(九) 闭区间上连续函数的性质	(16)
(十) 数列极限存在准则	(17)
三、方法总结与综合举例	(19)
(一) “ $\frac{0}{0}$ ”型未定式极限计算方法 (I)	(19)
练习题 (A)	(24)
练习题 (B)	(25)
第二章 一元函数微分学	(26)
一、考纲要求	(26)
二、主要知识点	(26)
(一) 导数的定义	(26)
(二) 利用导数的定义计算极限	(29)
(三) 导数的几何意义	(30)
(四) 复合函数、反函数及隐函数的导数计算	(31)
(五) 高阶导数	(34)
(六) 微分	(36)
(七) 罗尔定理	(38)
(八) 拉格朗日中值定理与柯西中值定理	(40)
(九) 洛必达法则	(42)

(十) 泰勒定理·····	(44)
(十一) 函数单调性的导数判别·····	(46)
(十二) 不等式的导数证明·····	(48)
(十三) 函数极值的计算·····	(50)
(十四) 函数最值的计算·····	(52)
(十五) 关于方程 $f(x)=0$ 的实根 ·····	(53)
(十六) 曲线的凹凸性和拐点·····	(54)
(十七) 曲线的渐近线·····	(55)
三、方法总结与综合举例·····	(57)
(一) “ $\frac{0}{0}$ ” 型未定式极限计算方法 (II) ·····	(57)
(二) 关于零点定理、罗尔定理和拉格朗日中值定理的综合使用·····	(60)
(三) 函数单调性、极值, 函数图形的凹凸性、拐点的计算方法·····	(61)
练习题 (A) ·····	(63)
练习题 (B) ·····	(65)
第三章 一元函数积分学 ·····	(66)
一、考纲要求·····	(66)
二、主要知识点·····	(66)
(一) 原函数与不定积分·····	(66)
(二) 不定积分的换元积分法·····	(68)
(三) 不定积分的分部积分法·····	(70)
(四) 有理函数的不定积分法·····	(72)
(五) 定积分的定义与几何意义·····	(74)
(六) 定积分的基本性质·····	(76)
(七) 积分中值定理·····	(78)
(八) 积分上限函数 (或变上限积分) ·····	(79)
(九) 牛顿-莱布尼茨公式, 定积分的换元积分法和分部积分法 ·····	(81)
(十) 奇、偶函数和周期函数的定积分性质·····	(83)
(十一) 分段函数定积分·····	(85)
(十二) 分段函数不定积分·····	(87)
(十三) 含定积分不等式的证明·····	(88)
(十四) 平面图形面积的计算·····	(91)
(十五) 旋转体体积的计算·····	(93)
(十六) 反常积分的计算·····	(95)
三、方法总结与综合举例·····	(98)
(一) 不定积分计算方法·····	(98)
(二) 定积分计算技巧·····	(102)
练习题 (A) ·····	(105)
练习题 (B) ·····	(107)

第四章 多元函数微积分学	(108)
一、考纲要求	(108)
二、主要知识点	(108)
(一) 多元函数的极限与连续	(108)
(二) 偏导数与二阶偏导数	(109)
(三) 全微分	(111)
(四) 多元复合函数的偏导数与二阶偏导数的计算	(114)
(五) 多元隐函数的偏导数与二阶偏导数的计算	(117)
(六) 多元函数极值的计算	(120)
(七) 多元函数条件极值的计算	(122)
(八) 二元连续函数在有界闭区域上的最值的计算	(123)
(九) 二重积分(直角坐标系)的计算	(125)
(十) 二重积分(极坐标系)的计算	(128)
(十一) 二次积分积分次序的更换	(130)
(十二) 无界区域上的二重积分	(132)
三、方法总结与综合举例	(134)
(一) 多元函数偏导数、二阶偏导数的计算方法	(134)
(二) 多元函数极值、最值的计算方法	(136)
(三) 二重积分计算方法	(139)
练习题(A)	(142)
练习题(B)	(143)
第五章 无穷级数	(144)
一、考纲要求	(144)
二、主要知识点	(144)
(一) 级数收敛性定义与收敛级数的基本性质	(144)
(二) 正项级数的比值判别法与根值判别法	(146)
(三) 正项级数的比较判别法	(147)
(四) 任意项级数的收敛性	(149)
(五) 幂级数的收敛半径、收敛区间及收敛域	(152)
(六) 函数展开成幂级数	(154)
(七) 求幂级数的和函数	(157)
三、方法总结与综合举例	(160)
(一) 幂级数收敛域的计算	(160)
(二) 函数展开成幂级数	(162)
(三) 求幂级数的和函数及相关的问题	(163)
练习题(A)	(165)
练习题(B)	(166)

第六章 常微分方程与差分方程	(167)
一、考纲要求	(167)
二、主要知识点	(167)
(一) 一阶微分方程(变量可分离微分方程与齐次微分方程)	(167)
(二) 一阶微分方程(线性微分方程)	(169)
(三) 二阶常系数齐次线性微分方程	(171)
(四) 二阶常系数非齐次线性微分方程	(172)
(五) 求解含变上限积分的函数方程	(174)
(六) 一阶常系数线性差分方程	(177)
三、方法总结与综合举例	(178)
(一) 求解微分方程的方法	(179)
(二) 微分方程与微积分学其他部分的综合题	(182)
练习题(A)	(186)
练习题(B)	(187)
附录 微积分在经济学上的应用	(188)

第二篇 线性代数

第七章 行列式	(195)
一、考纲要求	(195)
二、主要知识点	(195)
(一) n 阶行列式的性质	(195)
(二) n 阶行列式按一行(一列)展开	(198)
练习题(A)	(200)
第八章 矩阵	(202)
一、考纲要求	(202)
二、主要知识点	(202)
(一) 矩阵的线性运算、乘法、转置及分块矩阵	(202)
(二) 矩阵的初等变换, 初等矩阵及等价矩阵	(205)
(三) 伴随矩阵和逆矩阵	(208)
(四) 矩阵的秩	(211)
三、方法总结与综合举例	(214)
(一) 矩阵运算的综合举例	(214)
(二) 矩阵可逆的判别方法	(216)
练习题(A)	(218)
练习题(B)	(219)
第九章 向量	(220)
一、考纲要求	(220)
二、主要知识点	(220)

(一) 向量组的线性相关性·····	(220)
(二) 向量组的极大线性无关组及秩·····	(223)
(三) 向量组正交规范化的施密特方法与正交矩阵·····	(226)
三、方法总结和综合举例·····	(228)
(一) 向量组线性相关性的快速判别方法·····	(228)
(二) 向量组的极大无关组的快速计算方法·····	(229)
练习题 (A) ·····	(231)
练习题 (B) ·····	(232)
第十章 线性方程组 ·····	(233)
一、考纲要求·····	(233)
二、主要知识点·····	(233)
(一) n 元齐次线性方程组 ·····	(233)
(二) n 元非齐次线性方程组 ·····	(236)
(三) 矩阵方程求解·····	(239)
(四) 两个线性方程组的同解与公共解·····	(240)
三、方法总结和综合举例·····	(244)
(一) 用线性方程组的有关结论证明关于矩阵秩的等式或不等式·····	(244)
(二) 用线性方程组的有关结论, 由向量 β 可否由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表示确定包含其中的参数值·····	(244)
练习题 (A) ·····	(247)
练习题 (B) ·····	(249)
第十一章 矩阵的特征值和特征向量 ·····	(250)
一、考纲要求·····	(250)
二、主要知识点·····	(250)
(一) 矩阵的特征值和特征向量·····	(250)
(二) 相似矩阵·····	(253)
(三) 矩阵相似对角化·····	(257)
(四) 实对称矩阵·····	(260)
三、方法总结和综合举例·····	(263)
(一) 由矩阵的特征值与特征向量确定矩阵中的未知参数方法·····	(263)
(二) 利用矩阵相似对角化快速计算有关问题·····	(265)
练习题 (A) ·····	(268)
练习题 (B) ·····	(270)
第十二章 二次型 ·····	(271)
一、考纲要求·····	(271)
二、主要知识点·····	(271)
(一) 二次型化标准形方法 (I) ·····	(271)
(二) 二次型化标准形方法 (II) ·····	(275)

(三) 二次型化规范形方法·····	(278)
(四) 正定二次型与正定矩阵·····	(280)
三、方法总结和综合举例·····	(282)
(一) 二次型化标准形方法·····	(283)
(二) 关于正定矩阵的证明方法·····	(285)
练习题 (A) ·····	(286)
练习题 (B) ·····	(288)

第三篇 概率论与数理统计

第十三章 随机事件和概率·····	(291)
一、考纲要求·····	(291)
二、主要知识点·····	(291)
(一) 随机事件及其概率·····	(291)
(二) 条件概率与乘法公式, 全概率公式与贝叶斯公式·····	(294)
(三) 随机事件独立性与 n 重伯努利概型 ·····	(296)
三、方法总结与综合举例·····	(298)
(一) 随机事件概率计算方法及技巧·····	(298)
练习题 (A) ·····	(302)
练习题 (B) ·····	(303)
第十四章 随机变量及其分布·····	(304)
一、考纲要求·····	(304)
二、主要知识点·····	(304)
(一) 离散型随机变量及其分布律·····	(304)
(二) 连续型随机变量及其概率密度·····	(305)
(三) 随机变量的分布函数·····	(308)
(四) 随机变量函数的概率分布·····	(311)
三、方法总结与综合举例·····	(314)
(一) 随机变量概率分布的计算·····	(314)
练习题 (A) ·····	(317)
练习题 (B) ·····	(318)
第十五章 多维随机变量的分布·····	(319)
一、考纲要求·····	(319)
二、主要知识点·····	(319)
(一) 二维离散型随机变量与连续型随机变量·····	(319)
(二) 二维随机变量的分布函数·····	(322)
(三) 二维随机变量的边缘分布·····	(324)
(四) 二维随机变量的条件分布·····	(326)
(五) 随机变量的独立性·····	(329)

(六) 两个随机变量函数的分布·····	(332)
三、方法总结与综合举例·····	(336)
(一) 二维连续型随机变量的各种概率密度之间的换算方法·····	(336)
(二) 两个随机变量独立性的判别·····	(339)
练习题 (A) ·····	(341)
练习题 (B) ·····	(342)
第十六章 随机变量的数字特征 ·····	(344)
一、考纲要求·····	(344)
二、主要知识点·····	(344)
(一) 随机变量的数学期望·····	(344)
(二) 随机变量的方差和矩·····	(348)
(三) 随机变量的协方差与相关系数·····	(351)
(四) 切比雪夫不等式·····	(354)
三、方法总结与综合举例·····	(356)
(一) 离散型随机变量数学期望、方差等的计算技巧·····	(356)
(二) 连续型随机变量数学期望、方差等的计算技巧·····	(357)
练习题 (A) ·····	(359)
练习题 (B) ·····	(361)
第十七章 大数定律和中心极限定理 ·····	(362)
一、考纲要求·····	(362)
二、主要知识点·····	(362)
(一) 大数定律·····	(362)
(二) 中心极限定理·····	(364)
练习题 (A) ·····	(366)
第十八章 数理统计的基本概念 ·····	(367)
一、考纲要求·····	(367)
二、主要知识点·····	(367)
(一) 总体与样本, 数理统计中的常用分布·····	(367)
(二) 正态总体样本的常用统计量及其分布·····	(370)
三、方法总结与综合举例·····	(372)
(一) 确定样本统计量所服从的分布的方法·····	(372)
练习题 (A) ·····	(375)
练习题 (B) ·····	(377)
第十九章 参数估计 ·····	(378)
一、考纲要求·····	(378)
二、主要知识点·····	(378)
(一) 参数的点估计·····	(378)

练习题 (A)	(383)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学 (三) 试题	(385)
模拟试题 (I)	(388)
模拟试题 (II)	(391)
练习题及试题参考答案	(394)

第一篇 微积分

第一章

函数、极限、连续

一、考纲要求

1. 理解函数的概念、掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.
5. 了解数列极限和函数极限(包括左极限与右极限)的概念.
6. 了解极限的性质与极限存在的两个准则,掌握极限的四则运算法则,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
7. 理解无穷小的概念和基本性质,掌握无穷小的比较方法,了解无穷大的概念及其与无穷小的关系.
8. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.
9. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

二、主要知识点

(一)函数的定义域与值域

[主要内容]

设 x, y 是两个变量,当 x 在某个范围中任取一个实数值时, y 按照一定规则总有一个确定的实数值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记为 $y=f(x)$. 于是 $y=f(x)$ 的定义域是使 $f(x)$ 有意义的 x 的集合,记为 D ; $y=f(x)$ 的值域是当 x 取遍 D 中各个值时,对应的函数值的集合,记为 R .

注 (i) 记住各个基本初等函数(即常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数)的定义域与值域.

(ii) 当 $y=f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续时, $y=f(x)$ 的值域为 $[m, M]$ (其中 m, M 分别为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值与最大值).

[常考问题]

利用基本初等函数(或已知函数)的定义域与值域,计算给定函数的定义域与值域.

[典型例题]

例 1.1 求函数 $f(x) = \sqrt{1 + \ln(x-1)} + \frac{\arcsin \frac{x-1}{2}}{x-2}$ 的定义域.

解 $f(x)$ 的定义域为满足下列不等式组的 x 集合:

$$\begin{cases} x-1 \geq \frac{1}{e}, \\ \left| \frac{x-1}{2} \right| \leq 1, \\ x \neq 2, \end{cases} \quad \text{即 } x \in \left[1 + \frac{1}{e}, 2\right) \cup (2, 3].$$

所以, $f(x)$ 的定义域为 $\left[1 + \frac{1}{e}, 2\right) \cup (2, 3]$.

例 1.2 设函数 $f(3x-2)$ 的定义域为 $[1, 4]$, 求函数 $f(3x+1)$ 的定义域.

解 由 $f(3x-2)$ 的定义域为 $[1, 4]$ 知, $1 \leq x \leq 4$. 于是 $1 \leq 3x-2 \leq 10$, 即 $f(x)$ 的定义域为 $[1, 10]$. 所以 $f(3x+1)$ 的定义域是满足不等式 $1 \leq 3x+1 \leq 10$ 的 x 集合, 即 $0 \leq x \leq 3$. 因此, $f(3x+1)$ 的定义域为 $[0, 3]$.

例 1.3 求函数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ 的值域.

解 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 由于

$$f(x) = 1 - \frac{2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}, \text{ 及 } 0 < \frac{2}{e^{2x} + 1} < 2,$$

所以 $f(x)$ 的值域为 $(-1, 1)$.

(二) 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性

[主要内容]

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 D 上有定义. 如果存在 $K > 0$, 使得对任意 $x \in D$ 有 $|f(x)| \leq K$, 则称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数.

注 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有界, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$.

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 对任意 $x_1, x_2 \in I$, 如果当 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加; 如果当 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 $f(x)$ 在 I 上单调减少.

函数的单调增加与单调减少总称单调性.

函数 $f(x)$ 的单调性, 通常利用 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 进行判断, 即在区间 I 上 $f'(x) > 0$ (< 0) 时, $f(x)$ 在 I 上单调增加 (单调减少).

3. 周期性

如果存在 $T > 0$, 使得对函数 $f(x)$ 定义域中的任意 x , 有 $x+T$ 仍在定义域中, 且 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 是周期函数, 且称满足上式的最小正数 T 为 $f(x)$ 的周期.

注 (i) 如果 $f(x)$ 是周期为 T 的可导周期函数, 则 $f'(x)$ 也是周期为 T 的周期函数.

(ii) 如果 $f(x)$ 是周期为 T 的可积周期函数, 且 $\int_0^T f(x) dx = 0$, 则对任意实数 a , $\int_a^{a+T} f(t) dt$ 也是周期为 T 的周期函数.

4. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在关于原点对称的数集 D (即对任意 $x \in D$ 时, 有 $-x \in D$) 上有定义. 如果对任意 $x \in D$ 有 $f(-x) = -f(x)$ ($f(-x) = f(x)$), 则称 $f(x)$ 为 D 上的奇(偶)函数.

注 (i) 如果 $f(x)$ 是对称区间 I 上可导的奇(偶)函数, 则 $f'(x)$ 是偶(奇)函数.

(ii) 如果 $f(x)$ 是对称区间 I 上可积的奇函数, 则对任意 $a \in I$, $\int_a^x f(t) dt$ 是偶函数; 如果 $f(x)$ 是 I 上可积的偶函数, 则对任意 $a \in I$, 在 $\int_0^a f(x) dx = 0$ 的条件下, $\int_a^x f(t) dt$ 是奇函数.

(iii) 如果 $f(x)$ 在对称区间 I 上有定义, 则 $f(x)$ 可以表示为一个偶函数和一个奇函数之和, 即 $f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]}_{\text{偶函数}} + \underbrace{\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]}_{\text{奇函数}}.$

[常考问题]

函数有界性、单调性、奇偶性及周期性的判断.

[典型例题]

例 2.1 (单项选择题) $f(x) = |x \sin x| e^{\sin x}$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的 ().

- A. 奇函数 B. 偶函数 C. 周期函数 D. 无界函数

解 $f(x)$ 是非奇、非偶函数, 也不是周期函数.

因此本题选 D.

注 $f(x)$ 是无界函数证明如下: 记 $x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ ($n=1, 2, \dots$), 则 $f(x_n) = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)e \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$). 所以, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上无界.

例 2.2 (单项选择题) 函数 $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0, \\ 1 - e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$ 是 ().

- A. 单调增加奇函数 B. 单调减少奇函数
C. 单调增加偶函数 D. 单调减少偶函数

解 由于对任意实数 x 有

$$\begin{aligned} f(-x) &= \begin{cases} e^{-x} - 1, & -x < 0, \\ 1 - e^x, & -x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -(e^x - 1), & x \leq 0, \\ -(1 - e^{-x}), & x > 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} -(e^x - 1), & x < 0, \\ -(1 - e^{-x}), & x \geq 0 \end{cases} = -f(x), \end{aligned}$$

所以, $f(x)$ 是奇函数.

由于对任意实数 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2 < 0$ 时, $f(x_1) = e^{x_1} - 1 < e^{x_2} - 1 = f(x_2)$; 当 $x_1 < 0 \leq x_2$ 或 $x_1 \leq 0 < x_2$ 时, $f(x_1) = e^{x_1} - 1 < 0 \leq 1 - e^{-x_2} = f(x_2)$, 或 $f(x_1) = e^{x_1} - 1 \leq 0 < 1 - e^{-x_2} = f(x_2)$; 当 $0 \leq x_1 < x_2$ 时, $f(x_1) = 1 - e^{-x_1} < 1 - e^{-x_2} = f(x_2)$, 所以, $f(x)$ 单调增加.

因此本题选 A.

例 2.3 (单项选择题) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 且在其上有 $f(x+\pi) = f(x) + \sin x$, 则 ().

- A. $f(x)$ 是周期函数, 周期为 π B. $f(x)$ 是周期函数, 周期为 2π
C. $f(x)$ 是周期函数, 周期为 4π D. $f(x)$ 不是周期函数

解 由于对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有