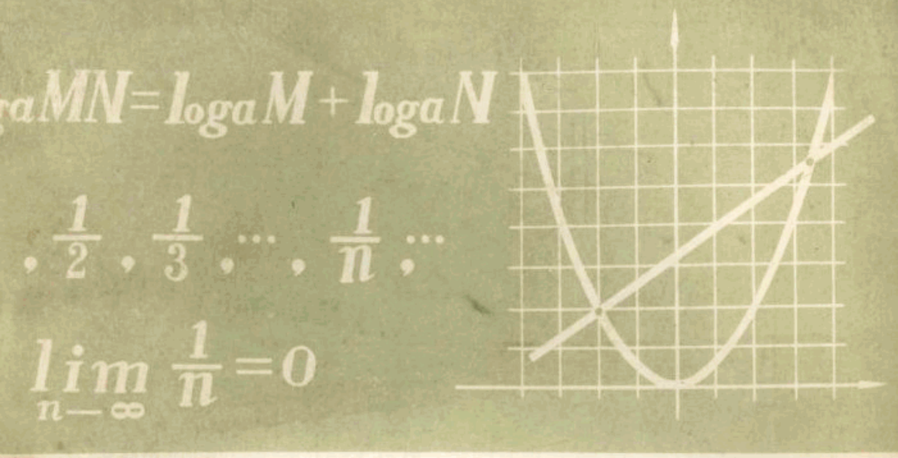

辽宁省中学试用课本

数学

第六册

2

508

辽宁省中学试用课本
数 学
第六册
辽宁省中小学教材编写组编
·
辽宁人民出版社出版
辽宁省新华书店发行
沈阳市第一印刷厂印刷
·
开本：787×1092 1/32 印张：5$\frac{1}{4}$ 字数：114千字
1973年6月第1版 1973年6月第1次印刷
印数：1—518,000册
书号：K7090·15 定价：0.34元

目　录

第一章　函数和它的图象

世界上一切事物都处在不停地运动、变化和发展之中，同时它们彼此又不是孤立的，而是“**互相联系的和具有内部规律的**”。在数学里，作为反映客观事物的各种量也同样在发展变化着，而且互相联系、互相影响着。函数和它的图象就是劳动人民在长期社会实践中，从数量关系方面观察、研究和分析事物运动变化规律的一种数学方法，它在三大革命运动中有着广泛的应用。

第一节　函　　数

1·1　变量与常量

毛主席教导我们：“**无论什么事物的运动都采取两种状态，相对地静止的状态和显著地变动的状态。**”反映客观事物的各种量也是这样。

我们看下面的实例：

（i）我国自行设计、建造的万吨级远洋货轮，以每小时17浬的速度行驶，那么航行的路程 s 和时间 t 之间的关系是

$$s=17t.$$

这里，速度是一个保持一定数值的量，时间和路程是可以取不同数值的量。

（2）圆的面积 A 和半径 r 之间的关系是

$$A=\pi r^2.$$

这里，圆周率 π 保持一定的数值，半径 r 和面积 A 可以取不同的数值。

（3）我们常见的保险丝（铅锡合金：铅75%，锡25%），它的额定电流和直径之间的数量关系，可以列成下表：

额定电流（安培）	2	2.3	2.6	3.3	4.1	4.8	7
直　　径（毫米）	0.51	0.56	0.61	0.71	0.81	0.92	1.22

这里，额定电流和直径都可以取不同的数值。

在某个问题中可以取不同数值的量叫做变量，保持一定数值的量叫做常量。

在上述实例中，（1）的时间和路程，（2）的圆的半径和面积，（3）的保险丝的直径和额定电流都是变量；而（1）的速度，（2）的圆周率则是常量。

常量与变量是相对的，是对某个问题来说的，要**“对于具体情况作具体的分析”**。同一个量，在某个问题中是常量，而在另一个问题中它可能是变量。如（1）中的速度是常量，时间和路程是变量；但是，若对于同一时间要研究速度和路程之间的关系，则时间是常量，速度和路程就是变量。

恩格斯指出：**“数学本身由于研究变数而进入辩证法的领域”**。变量进入了数学，使数学发生了飞跃，即不只限于研究常量，而更主要的是研究变量，研究变量的变化规律以及变量与变量之间的相依关系。

1·2 函　　数

同一研究过程中的几个变量之间是互相联系的，而且是有一定规律的。例如：

1·1（1）中，时间 t 的值可以在零和正数范围内任意选择，并且只要知道远洋货轮航行的时间 t，就可以利用公式 $s=17t$ 计算出远洋货轮航行的路程 s，即对于时间 t 的每一个确定的值，路程 s 都有确定的值和它对应。

1·1（2）中，半径 r 的值可以在正数范围内任意选择，并且对于半径 r 的每一个确定的值，圆的面积 A 都有确定的值和它对应。

1·1（3）中，额定电流的值可以在所列表中的数值范围内任意选择，并且对于额定电流的每一个确定的值，保险丝的直径都有确定的值和它对应。

一般地，互相联系着的两个变量，如果第一个变量在某一个范围内每取一个确定的值时，第二个变量就有确定的值和它对应，那么就称第二个变量是第一个变量的函数。第一个变量叫做自变量。变量之间的对应关系，叫做函数关系。

例如，1·1（1）中，时间 t 是自变量，路程 s 是时间 t 的函数；1·1（2）中，半径 r 是自变量，圆的面积 A 是半径 r 的函数；1·1（3）中，额定电流是自变量，保险丝的直径是额定电流的函数。

两个变量 x 与 y 之间的函数关系可用符号：

$$y=f(x)$$

来表示。这里，y 表示函数，括号里面的字母 x 表示自变量，括号外面的字母 f 表示函数关系。也就是说，$y=f(x)$ 表示 y 是 x 的函数。

例如，在1·1（1）中，s 是 t 的函数，可以写成 $s=f(t)$。

如果我们同时要研究几个不同的函数关系，那么就要在括号外面采用不同的字母来区别它们。例如，当我们同时要研究圆的面积 A 和圆的周长 C 与半径 r 之间的关系时，就有

$$A=\pi r^2,\quad C=2\pi r.$$

A和C是r的两个不同的函数，为了区别它们，可以分别写成

$$A=f(r),\ C=F(r).$$

对于自变量x的一个值a，函数$f(x)$的对应值可记作$f(a)$。

例 1 已知$f(x)=x^2-2x+3$，求$f(1)$、$f(0)$、$f(-2)$的值。

解：$f(1)=1^2-2\times1+3=2$，

$f(0)=0^2-2\times0+3=3$，

$f(-2)=(-2)^2-2(-2)+3=11$。

应该注意，并不是自变量取任何值时，函数都有意义，如1·1（1）中，自变量t只能在零和正数范围内取值。

自变量的取值范围，叫做函数的定义域。

例 2 写出下列各函数的定义域：

（1）$y=2x-1$；

（2）圆的周长C与它的半径r之间的函数关系：$C=2\pi r$；

（3）$y=\dfrac{1}{x+3}$；　（4）$y=\sqrt{2x-1}$。

解：（1）x为任意实数；

（2）$r>0$；

（3）$x\neq-3$的任意实数；

（4）$x\geqslant\dfrac{1}{2}$。

从例2中可以看出：函数的定义域，一般要由函数表示的实际意义来决定。但对没有指出表示某种实际意义的函数，它的定义域为不使表示函数关系的式子失去意义的那些

自变量的值的全体。

练 习 一

1. 从三大革命运动中，举出一些变量与常量的实例。
2. 分析下列各题中，哪些量是变量，哪些量是常量？
   (1) 一九七一年大寨大队粮食平均亩产1096斤，那么粮食产量 y(斤)与亩数 x 之间的关系是
   $$y=1096x;$$
   (2) 球的体积公式：$V=\frac{4}{3}\pi r^3$，其中 r 表示球的半径，V 表示球的体积；
   (3) 钢的比重是7.8克/厘米^3，钢的重量 P(克)和体积 V(厘米^3)之间的关系是
   $$P=7.8V;$$
   (4) 我国第二颗人造地球卫星绕地球一周需106分钟。t 分钟卫星绕地球的周数为
   $$N=\frac{t}{106};$$
   (5) 在同一段路程 s(公里)内，汽车行驶的平均速度 v(公里/小时)与时间 t(小时)之间的关系是
   $$v=\frac{s}{t}.$$
3. 在上题(1)、(2)、(3)、(4)、(5)中，哪些变量是自变量？哪些变量是自变量的函数？并用函数的符号把它们之间的关系写出来。
4. 已知 $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$，求$f(3)$、$f(-4)$、$f(0)$、$f\left(-\frac{1}{2}\right)$、$f(\sqrt{2})$、$f(a^2+3)$的值。

5．已知$F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$，求$F(0)$、$F(1)$、$F(2)$、$F\left(\dfrac{1}{3}\right)$的值。

6．写出 4、5 两题函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 的定义域。

7．写出下列各函数的定义域：

（1）$y=2x^2+x-3$；　　（2）$y=\dfrac{9}{x+5}$；

（3）$y=x+\sqrt{x-4}$；　　（4）$y=\dfrac{3x}{4x^2-9}$。

8．我国自行设计和制造的第一台单节四千马力电传动内燃机车，以每小时 100 公里的速度，由大连开往北京，大连到北京的路程为1238公里，机车行驶 t 小时后，离开大连 s 公里。试写出 s、t 之间的关系式，指出哪个变量是自变量，哪个变量是自变量的函数？并写出这个函数的定义域。

9．已知变量 x 和 y 有下面的关系，试把变量 y 表示为变量 x 的函数，并写出这个函数的定义域：

（1）$3x+4y=12$；　　（2）$xy=15$；

（3）$(x-2)(y+3)=-6$；（4）$y^2=4x$。

10．已知$x=\dfrac{3y+2}{4y-3}$。

（1）试把 y 表示为 x 的函数；

（2）填表里的空白：

x	-2	-1	0	1	$1\frac{1}{2}$	2	3	4	5
y									

（3）写出这个函数的定义域。

1·3 函数关系的表示法

根据实际需要，两个变量之间的函数关系可以采用不同的方法表示，常用的方法有以下三种：

（一）解 析 法

两个变量间的函数关系，用一个含有这两个变量和各种数学运算的等式来表示。例如：

$$s=17t、\quad y=1096x、\quad A=\pi r^2、$$

$$y=3x^2+2x-1、\quad y=\sqrt{x^2+3}\text{ 等，}$$

这种表示函数关系的方法叫做解析法（也叫公式法）。

（二）列 表 法

用列表来表示函数关系的方法叫做列表法。例如，1·1（3）就是用列表法来表示额定电流与保险丝的直径之间的函数关系。又如，我省本溪县碱厂堡大队1962年到1969年的年度粮食产量与年度的函数关系可列成下表：

年　度	62	63	64	65	66	67	68	69
产　量（公斤）	356000	380000	400000	460000	466000	621000	811400	1200000

在用解析法表示的函数关系中，为了便于应用，有时也根据事先给定的自变量的值，求出对应值，列成函数表。如价格表以及各种数学用表（平方表、平方根表……）等。

（三）图 象 法

函数关系也可以用图象来表示。例如，气温自动记录计记录了某地某一天气温T和时间t之间的函数关系，如图

1·1所示。

从图 1·1 中我们可以清楚地看出：夜间 4 时的温度最低（-4℃），14时（下午 2 时）的温度最高(5℃)。

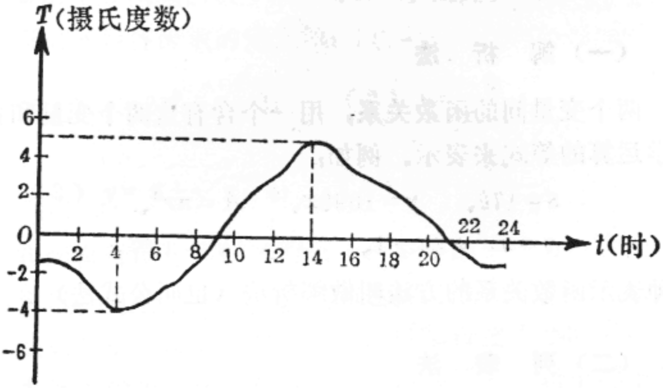

图 1·1

用图象来表示函数关系的方法叫做图象法。

函数关系的三种表示法各有优缺点。解析法简单明了，能够反映在变化过程中，变量之间的全部相依关系，所以在科学研究上经常采用，但在求函数值时，往往需要进行较复杂的计算，并且在实际问题中，两个变量之间的函数关系，不一定都能用解析法来表示（如 1·1(3)额定电流和保险丝的直径之间的函数关系）；列表法对于表中自变量的每一个值，可以直接查出对应的函数值，便于应用，但有时不可能把自变量和函数的所有对应值完全列出来，因此有局限性；图象法非常直观，便于研究函数的性质和变化规律，但很难准确地求出与自变量的值相对应的函数值。因此，我们在遇到实际问题时，要**“对于具体情况作具体的分析”**，灵活运用，有时还可以结合起来应用。

1·4 函数的图象

前面讲过，用图象法表示函数关系，可以直观地表示出函数的变化规律，因此，经常利用函数的图象来研究函数的性质。在作函数的图象时，通常借助于直角坐标系。在工农业生产和科学实验中，直角坐标系也有着广泛的应用。

（一）直角坐标系

我们知道，在数轴上确定一个点的位置，只要有一个数就可以了。那么，在平面上怎么来确定一个点的位置呢？

恩格斯指出：**“数学是从人的需要中产生的”**。先看下面的两个实例：

（1）我们到电影院看电影，票上印着排数和号数，例如第12排第5号。有了这两个数，便可以找到一个确定的座位；反过来，每一个确定的座位，都可以用第几排第几号这两个数来表示。

（2）要在一块矩形的钢板 $ABCD$ 上钻一个圆孔，要求孔心 P 到 AB 边的距离为90mm，到 AD 边的距离为60mm(图1·2)。工人师傅根据这两个数字，就可以准确地划出十字线，确定孔心的位置。

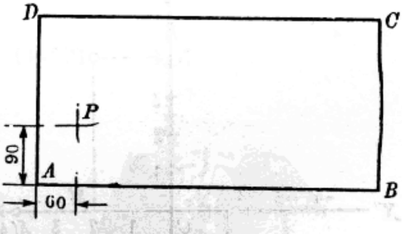

图 1·2

由此可知，用两个数就可以确定平面上一个点的位置。下面，我们就来研究这个问题。

在平面内，作两条互相垂直并且有公共原点 O 的数轴 $X'X$ 和 $Y'Y$ （图1·3），它们的长度单位通常是一样的（但

也可以不同）。$X'X$ 通常画成水平的，叫做横轴或者 x 轴，取向右的方向为正方向，它上面的点表示 x 的值；$Y'Y$ 通常画成铅直的，叫做纵轴或者 y 轴，取向上的方向为正方向，它上面的点表示 y 的值。x 轴和 y 轴统称坐标轴。

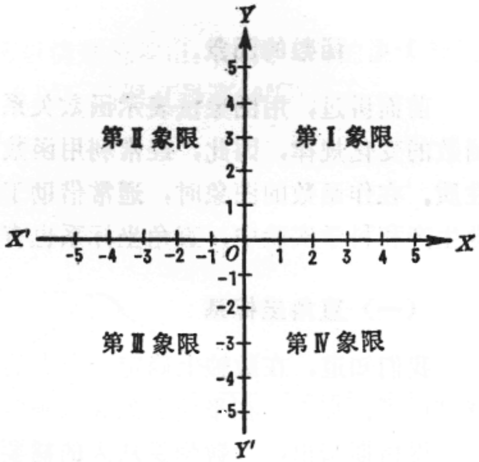

图 1·3

它们的公共原点 O 叫做坐标原点。象这样有公共原点，互相垂直的两条数轴合在一起叫做直角坐标系。x 轴和 y 轴把平面分成 XOY、YOX'、$X'OY'$、$Y'OX$ 四部分，依次叫做第Ⅰ象限、第Ⅱ象限、第Ⅲ象限、第Ⅳ象限。

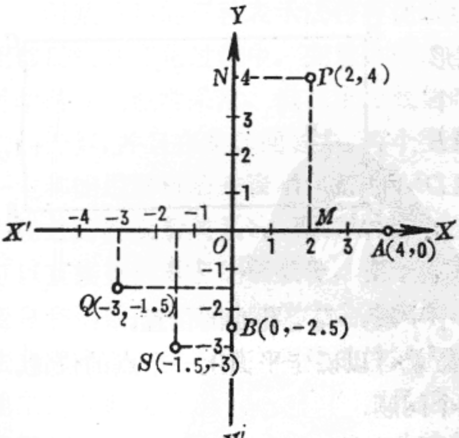

图 1·4

设 P 是直角坐标系所在平面上的一点（图1·4），过 P 点分别作 x 轴和 y 轴的垂线，得垂足 M、N。如果 M 点和 N 点在 x 轴上和 y 轴上所表示的数分别是 2 和 4，我们说 P 点的横坐标是 2，纵坐标是 4。

一般地，如果M点和N点在x轴上和y轴上所表示的数分别是x和y，那么x叫做P点的横坐标，y叫做P点的纵坐标，合起来叫做P点的坐标，记作(x, y)，横坐标在左，纵坐标在右，中间用逗号隔开。例如，在图1·4中P点的坐标是$(2,4)$，Q点的坐标是$(-3,-1.5)$，S点的坐标是$(-1.5,-3)$，A点的坐标是$(4,0)$，B点的坐标是$(0,-2.5)$，原点O的坐标是$(0,0)$等。P点的坐标是(x,y)，可以简写成$P(x,y)$。这样，我们就可以求出直角坐标系中一个点的坐标。

反过来，如果已知某个点的坐标，也可以在直角坐标系中作出这个点。例如，已知一点的坐标是$(-2.5,3)$，求作这个点。我们过x轴上表示-2.5的点作x轴的垂线，再过y轴上表示3的点作y轴的垂线，这两条垂线相交于A点（图1·5），则A点就是所求的点。

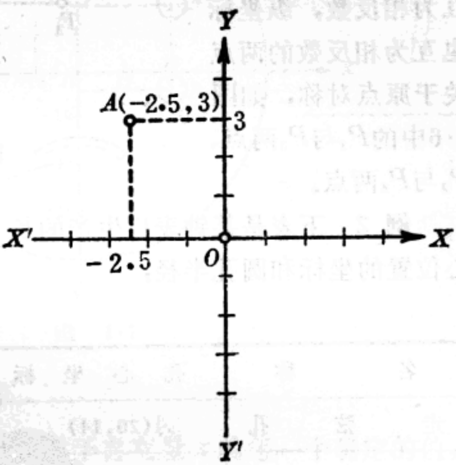

图 1·5

例 1 求出图1·6中，P_1、P_2、P_3、P_4各点的坐标。

解：过P_1点作x轴和y轴的垂线，其垂足在x轴和y轴上所表示的数分别是2.5和3，因此P_1点的坐标是$(2.5,3)$。

用同样的方法可以求出$P_2(-2.5,3)$、$P_3(-2.5,-3)$、$P_4(2.5,-3)$。

在同一直角坐标系中，横坐标相同，纵坐标互为相反数

的两点关于 x 轴对称，如图 1·6 中的 P_1 与 P_4 两点、P_2 与 P_3 两点；横坐标互为相反数，纵坐标相同的两点关于 y 轴对称，如图 1·6中的 P_1 与 P_2 两点、P_3 与 P_4 两点；横坐标互为相反数，纵坐标也互为相反数的两点关于原点对称，如图 1·6中的 P_1 与 P_3 两点、P_2 与 P_4 两点。

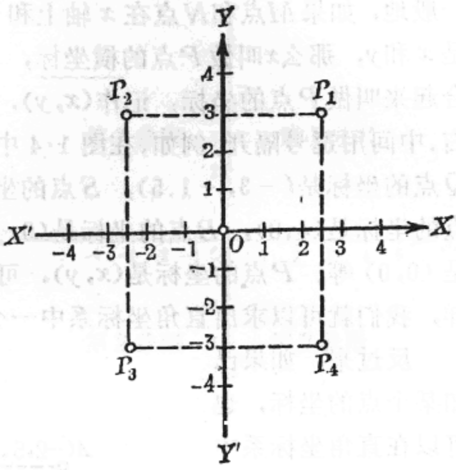

图 1·6

例 2 下表是某钟表厂生产的长三针闹钟背铃面上各孔心位置的坐标和圆孔半径：

（单位：mm）

名称	孔心坐标	圆孔半径
走弦孔	$A(20,14)$	3
拨针孔	$B(20,-4)$	3
上闹弦孔	$C(-20,8)$	3
止闹孔	$D(-9,28)$	2
对闹孔	$E(0,17)$	3
背铃面	$O(0,0)$	40

试在直角坐标系中确定各孔的位置。

解：在直角坐标系中，过 x 轴上表示20的点作 x 轴的垂

线，过y轴表示14的点作y轴的垂线，这两条垂线的交点就是所求的A点，再以A为圆心，$3mm$为半径画出⊙A（图1·7）。

用同样的方法，可以画出⊙B、⊙C、⊙D、⊙E和⊙O。

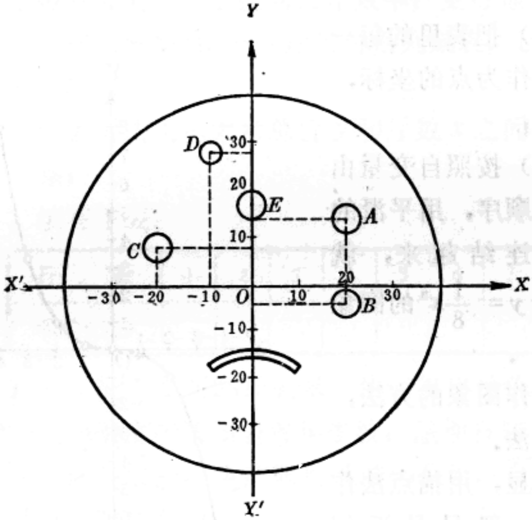

图 1·7

（二）函数的图象

从函数的定义知道，对于自变量x的每一个确定的值，函数y就有确定的值和它对应。在直角坐标系所在的平面内，以自变量x和函数y的对应值为坐标作出点，所有这些点组成的图形，就叫做函数$y=f(x)$的图象。

下面举例说明作函数图象的步骤和方法。

例 3 作出函数$y=\frac{1}{8}x^3$的图象。

解：（1）取自变量x的一些值，算出函数y的对应值，作出下面的数值表：