重难点手册

★四千万学子的制胜宝典
★八省市名师的在线课堂
★十六年书业的畅销品牌

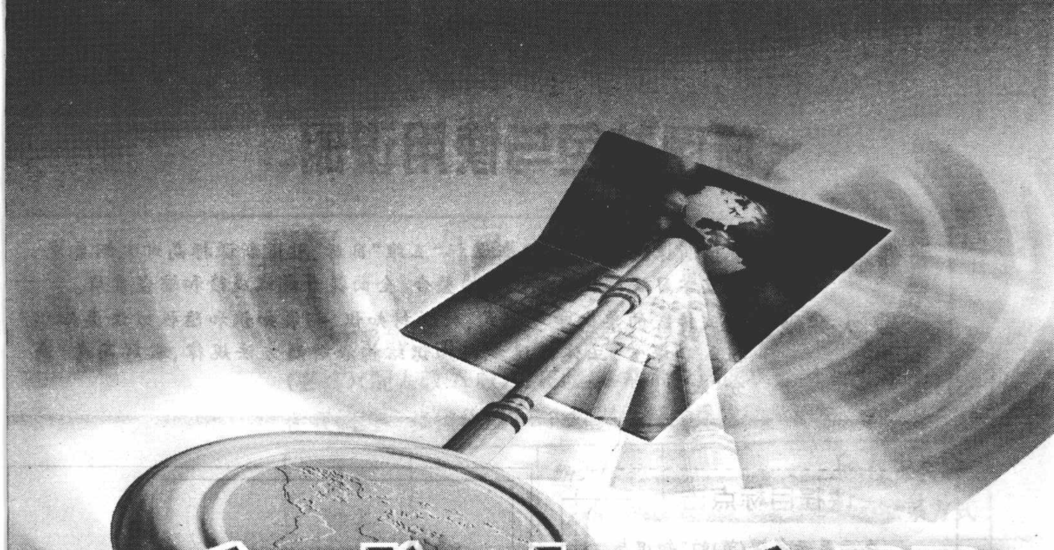
新课标

配人教A版

高中数学4（必修）

蔡上鹤　主审
汪江松　主编

华中师范大学出版社



重难点手册

配人教A版

高中数学4（必修）

主　审　蔡上鹤
主　编　汪江松

★四千万学子的制胜宝典
★八省市名师的在线课堂
★十六年书业的畅销品牌

华中师范大学出版社

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

重难点手册——高中数学 4(必修)(配人教 A 版)/汪江松 主编. —3 版.
—武汉:华中师范大学出版社,2009.10
ISBN 978-7-5622-3915-4

Ⅰ.重…　Ⅱ.汪…　Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 051457 号

重难点手册——高中数学 4(必修) (配人教 A 版)

主编:汪江松　　责任编辑:史小艳
责任校对:刘　峥　　封面设计:新视点
编辑室:第一编辑室　　咨询电话:027－67867361
出版发行:华中师范大学出版社 ©
社址:湖北省武汉市珞喻路 152 号　　邮编:430079
销售电话:027－67867371　027－67863040　027－67867076
传真:027－67863291　　邮购电话:027－67861321
网址:http://www.ccnupress.com　　电子信箱:hscbs@public.wh.hb.cn
印刷:孝感市三环印务有限责任公司　　督印:章光琼
字数:368 千字
开本:880mm×1230mm　1/32　　印张:11.75
版次:2009 年 10 月第 3 版　　印次:2009 年 10 月第 1 次印刷
定价:18.80 元

欢迎上网查询、购书

体例特色与使用说明

新课标： 贯彻新课标精神，定位新课标“三维”目标，贴近新课标高考大纲要求，注重学习规律和考试规律的整合，全面提升考试成绩和综合素质。

大突破： 突破传统的单向学习模式，将教材知识、拓展知识和隐性方法类知识植入新课堂，立体凸现学科知识结构和解题方法规律，破解高考“高分”瓶颈。

课程目标点击

全面展示每课(节)的“知识与技能、过程与方法以及情感态度与价值观”三位一体的目标要求，使同学们明确努力的方向和应达到的程度，便于自我评价和相互评价。

重点难点突破

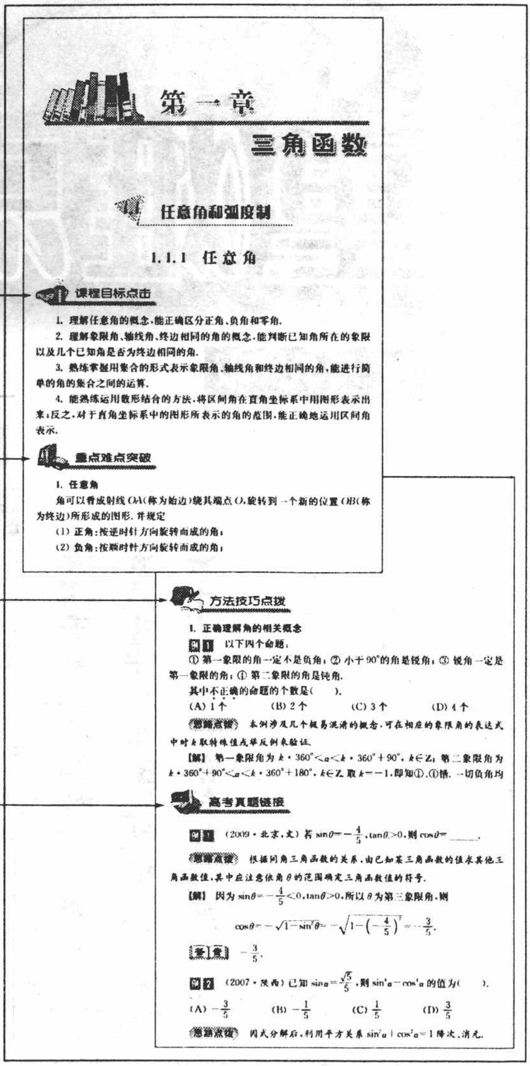
把握学生思维情感的发展脉络，恰到好处地指出每课(节)的重点、难点与疑点，各个击破，扫清学生学习中的一切障碍，全力提高学生的学习效率。

方法技巧点拨

精选典型例题，通透讲解，并从中总结解题方法与技巧，点拨解题规律，启发学生思维，使学生深刻透彻地把握知识结构，培养学生灵活运用知识的能力。

高考真题链接

多角度深入剖析最近几年高考题，加深学生对所学知识的理解，激发学生深入探究学习的兴趣。



第一章

三角函数

1.1 任意角和弧度制

1.1.1 任意角

课程目标点击

1. 理解任意角的概念，能正确区分正角、负角和零角.

2. 理解象限角、轴线角、终边相同的角的概念，能判断已知角所在的象限以及几个已知角是否为终边相同的角.

3. 熟练掌握用集合的形式表示象限角、轴线角和终边相同的角，能进行简单的角的集合之间的运算.

4. 能熟练运用数形结合的方法，将区间角在直角坐标系中用图形表示出来；反之，对于直角坐标系中的图形所表示的角的范围，能正确地运用区间角表示.

重点难点突破

1. 任意角

角可以看成射线 OA(称为始边)绕其端点 O，旋转到一个新的位置 OB(称为终边)所形成的图形. 并规定

(1) 正角：按逆时针方向旋转而成的角；

(2) 负角：按顺时针方向旋转而成的角；

方法技巧点拨

1. 正确理解角的相关概念

例1 以下四个命题：

① 第一象限的角一定不是负角；② 小于 90° 的角是锐角；③ 锐角一定是第一象限的角；④ 第二象限的角是钝角.

其中不正确的命题的个数是(　　).

(A) 1个　(B) 2个　(C) 3个　(D) 4个

思路点拨 本例涉及几个极易混淆的概念，可在相应的象限角的表达式中对 k 取特殊值或举反例来验证.

【解】 第一象限角为 $k\cdot360^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+90^\circ$，$k\in\mathbf{Z}$；第二象限角为 $k\cdot360^\circ+90^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+180^\circ$，$k\in\mathbf{Z}$. 取 $k=-1$，即知①、④错. 一切负角均

高考真题链接

例1 (2009·北京，文) 若 $\sin\theta=-\frac{4}{5}$，$\tan\theta>0$，则 $\cos\theta=$ ______.

思路点拨 根据同角三角函数的关系，由已知某三角函数的值求其他三角函数值，其中应注意依角 θ 的范围确定三角函数值的符号.

【解】 因为 $\sin\theta=-\frac{4}{5}<0$，$\tan\theta>0$，所以 θ 为第三象限角，则

$$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}.$$

答案 $-\frac{3}{5}$.

例2 (2007·陕西) 已知 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，则 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$ 的值为(　　).

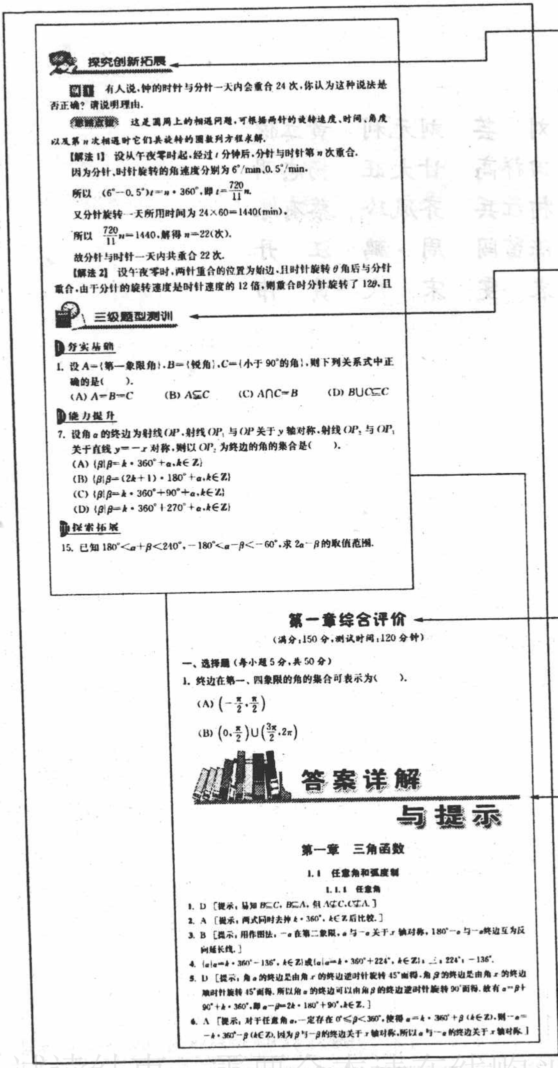
(A) $-\frac{3}{5}$　(B) $-\frac{1}{5}$　(C) $\frac{1}{5}$　(D) $\frac{3}{5}$

思路点拨 因式分解后，利用平方关系 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 降次、消元.

——新课标《数学重难点手册》新突破

讲实用： 完全同步于新教材，导—学—例—训四位一体，落实课程内容目标和考纲能力要求，揭密高考解题依据和答题要求，破解重点难点。

大品牌： 十多年的知名教辅品牌，一千多万学子的全程参与，十余万名一线教师的倾力实验，堪称学习规律与考试技术深度融合的奇迹，缔造着使用效果显著、发行量惊叹的神话。



探究创新拓展

例1 有人说，钟的时针与分针一天内会重合 24 次，你认为这种说法是否正确？请说明理由。

思路点拨 这是圆周上的相遇问题，可根据两针的旋转速度、时间、角度以及第 n 次相遇时它们共旋转的圈数列方程求解。

【解法 1】 设从午夜零时起，经过 t 分钟后，分针与时针第 n 次重合。

因为分针、时针旋转的角速度分别为 $6°/\text{min}$、$0.5°/\text{min}$。

所以 $(6°-0.5°)t=n\cdot 360°$，即 $t=\frac{720}{11}n$。

又分针旋转一天所用时间为 $24\times 60=1440(\text{min})$。

所以 $\frac{720}{11}n=1440$，解得 $n=22$(次)。

故分针与时针一天内共重合 22 次。

【解法 2】 设午夜零时，两针重合的位置为始边，且时针旋转 θ 角后与分针重合，由于分针的旋转速度是时针速度的 12 倍，则重合时分针旋转了 12θ，且

三级题型测训

Ⅰ 夯实基础

1. 设 $A=\{$第一象限角$\}$，$B=\{$锐角$\}$，$C=\{$小于 $90°$ 的角$\}$，则下列关系式中正确的是(　　)。
(A) $A=B=C$　(B) $A\subsetneqq C$　(C) $A\cap C=B$　(D) $B\cup C\subseteq C$

Ⅱ 能力提升

7. 设角 α 的终边为射线 OP，射线 OP_1 与 OP 关于 y 轴对称，射线 OP_2 与 OP_1 关于直线 $y=-x$ 对称，则以 OP_2 为终边的角的集合是(　　)。
(A) $\{\beta|\beta=k\cdot 360°+\alpha, k\in\mathbf{Z}\}$
(B) $\{\beta|\beta=(2k+1)\cdot 180°+\alpha, k\in\mathbf{Z}\}$
(C) $\{\beta|\beta=k\cdot 360°+90°+\alpha, k\in\mathbf{Z}\}$
(D) $\{\beta|\beta=k\cdot 360°+270°+\alpha, k\in\mathbf{Z}\}$

Ⅲ 探索拓展

15. 已知 $180°<\alpha+\beta<240°$，$-180°<\alpha-\beta<-60°$，求 $2\alpha-\beta$ 的取值范围。

第一章综合评价

(满分：150 分，测试时间：120 分钟)

一、选择题(每小题 5 分，共 50 分)

1. 终边在第一、四象限的角的集合可表示为(　　)。
(A) $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
(B) $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$

答案详解与提示

第一章　三角函数

1.1　任意角和弧度制

1.1.1　任意角

1. D [提示：易知 $B\subseteq C$，$B\subseteq A$，但 $A\nsubseteq C$，$C\nsubseteq A$.]
2. A [提示：两式同时去掉 $k\cdot 360°$，$k\in\mathbf{Z}$ 后比较.]
3. B [提示：用作图法，$-\alpha$ 在第二象限，α 与 $-\alpha$ 关于 x 轴对称，$180°-\alpha$ 与 $-\alpha$ 终边互为反向延长线.]
4. $\{\alpha|\alpha=k\cdot 360°-136°, k\in\mathbf{Z}\}$ 或 $\{\alpha|\alpha=k\cdot 360°+224°, k\in\mathbf{Z}\}$；三；$224°$；$-136°$.
5. D [提示：角 α 的终边是由角 x 的终边逆时针旋转 $45°$ 而得，角 β 的终边是由角 x 的终边顺时针旋转 $45°$ 而得，所以角 α 的终边可以由角 β 的终边逆时针旋转 $90°$ 而得，故有 $\alpha=\beta+90°+k\cdot 360°$，即 $\alpha-\beta=2k\cdot 180°+90°$，$k\in\mathbf{Z}$.]
6. A [提示：对于任意角 α，一定存在 $0°\leqslant\beta<360°$，使得 $\alpha=k\cdot 360°+\beta$ $(k\in\mathbf{Z})$，则 $-\alpha=-k\cdot 360°-\beta$ $(k\in\mathbf{Z})$，因为 β 与 $-\beta$ 的终边关于 x 轴对称，所以 α 与 $-\alpha$ 的终边关于 x 轴对称.]

探究创新拓展

体现特色栏目的全新面貌，融入新课程的全新理念，给出具有探究性的命题，为学生提供自主探索、相互交流的专有平台。

三级题型测训

立足于消化教材，注重基本题型的训练，以中档题为出发点，帮助同学们更深刻地领会相应知识点，逐步养成灵活的解题能力和应用能力，并精心挑选了少量高考拔高题与奥赛题，使学生在收到立竿见影的学习效果的同时，体验到探索拓展的广阔空间。

章末综合评价

选择新颖、典型、难度适中的试题进行检测，引领主干知识，使您在考试中立于不败之地！

答案详解与提示

附有三级题型测训和各章综合评价的参考答案，并对全部的试题给出了提示和解答过程。

《数学重难点手册》编委会

主　编　汪江松

编　者　汪江松　刘　芸　刘元利　黄立俊
谢志庆　田祥高　甘大旺　杨志明
赵　泓　柯红兵　齐凤玲　蔡有缘
胡燕丽　陈留闯　周　鹏　汪　丹
徐　斌　袁　雯　宋　庆　黄　伟

目 录

第一章 三角函数

1.1 任意角和弧度制

1.1.1 任意角

课程目标点击

1. 理解任意角的概念，能正确区分正角、负角和零角.

2. 理解象限角、轴线角、终边相同的角的概念，能判断已知角所在的象限以及几个已知角是否为终边相同的角.

3. 熟练掌握用集合的形式表示象限角、轴线角和终边相同的角，能进行简单的角的集合之间的运算.

4. 能熟练运用数形结合的方法，将区间角在直角坐标系中用图形表示出来；反之，对于直角坐标系中的图形所表示的角的范围，能正确地运用区间角表示.

重点难点突破

1. 任意角

角可以看成射线OA(称为始边)绕其端点O，旋转到一个新的位置OB(称为终边)所形成的图形. 并规定

(1) **正角**：按逆时针方向旋转而成的角；

(2) **负角**：按顺时针方向旋转而成的角；

(3) **零角**:一条射线没有作任何旋转,我们称它为零角.

注意 (1) 角度的范围不再限于 $0^\circ\sim360^\circ$;

(2) 任意角是通过角的终边和旋转方向得到的,其中旋转方向确定角的正、负性;

(3) 当两个角的顶点和始边都相同时,若角相等,则终边相同,反之,终边相同其角却不一定相等.

2. 象限角和轴线角

为了研究问题的方便,我们常常在平面直角坐标系中研究角. 此时,必须将角的顶点与原点重合,角的始边与 x 轴的非负半轴重合. 当角的终边落在第几象限,就说这个角是第几**象限角**(或者说这个角属于第几象限);当角的终边落在坐标轴上,就说这个角不属于任何象限,亦可称为**非象限角或轴线角**.

如图 1.1-1 中,570°的终边 OB 落在第三象限,则 570° 是第三象限角;而 180° 与 -180° 都是 x 轴负半轴上的轴线角.

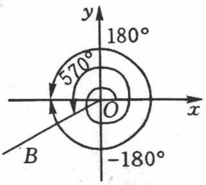


图 1.1-1

3. 终边相同的角

与角 α 终边相同的角为 $\beta=k\cdot360^\circ+\alpha\ (k\in\mathbf{Z})$(这里也包含角 α),可构成一个集合

$$S=\{\beta\,|\,\beta=k\cdot360^\circ+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}.$$

注意 ① 终边相同的角的前提条件是:角的顶点与原点重合,角的始边与 x 轴的非负半轴重合. ② α 是任意角. ③ k 为整数. ④ $k\cdot360^\circ$ 与 α 之间用"+"号连接. ⑤ 终边相同的角有无数个,它们相差 360° 的整数倍. ⑥ 终边相同的角不一定相等,但相等的角的终边一定相同. ⑦ 终边相同的角的表示形式不唯一,如$\{x\,|\,x=k\cdot360^\circ-90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$与$\{x\,|\,x=k\cdot360^\circ+270^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$均表示终边在 y 轴的负半轴上的角的集合.

4. 轴线角与象限角的集合表示形式

(1) 轴线角的集合表达式

为叙述方便,我们把逆时针旋转不足一周所形成的角称为**周内角**. 如图 1.1-2 所示,终边在轴上的周内角从小到大依次是 $0^\circ,90^\circ,180^\circ,270^\circ$. 将这些轴线角各加上周角的整数倍 $k\cdot360^\circ\ (k\in\mathbf{Z})$,就得到了终边在该坐标轴上的所有角,于是

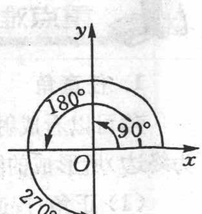


图 1.1-2

x 轴正向上的角可表示为 $0°+k\cdot 360°\ (k\in\mathbf{Z})$，$x$ 轴负向上的角可表示为 $180°+k\cdot 360°\ (k\in\mathbf{Z})$，$x$ 轴上的角可统一表示为 $k\cdot 180°\ (k\in\mathbf{Z})$；

y 轴正向上的角可表示为 $90°+k\cdot 360°\ (k\in\mathbf{Z})$，$y$ 轴负向上的角可表示为 $270°+k\cdot 360°\ (k\in\mathbf{Z})$，$y$ 轴上的角可统一表示为 $90°+k\cdot 180°\ (k\in\mathbf{Z})$.

进而，所有的轴线角可统一表示为 $k\cdot 90°\ (k\in\mathbf{Z})$.

说明 这里 $k\cdot 360°$，$k\cdot 180°$，$k\cdot 90°$ 分别是周角、平角、直角的整数倍，由这一特征来记住轴线角的集合表达式是很直观的.

(2) 象限角的集合表达式

如果以 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4$ 分别表示第一、二、三、四象限中的角，那么它们的取值范围分别是

$$0°+k\cdot 360°<\theta_1<90°+k\cdot 360°,\ (k\in\mathbf{Z},\text{下同})$$
$$90°+k\cdot 360°<\theta_2<180°+k\cdot 360°,$$
$$180°+k\cdot 360°<\theta_3<270°+k\cdot 360°,$$
$$270°+k\cdot 360°<\theta_4<360°+k\cdot 360°.$$

注意 初学者要正确区分以下几个容易混淆的概念：

(1) 对于第一象限角 α 即 $\{\alpha|k\cdot 360°<\alpha<90°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$，它不一定是锐角. 例如当 $k=1$ 时有 $360°<\alpha<450°$，显然，它不是锐角.

(2) 对于锐角 α 即 $\{\alpha|0°<\alpha<90°\}$，它一定是第一象限角.

(3) 对于小于 $90°$ 的角即 $\alpha<90°$，它不一定是锐角，因为其中还包括了零角和负角.

方法技巧点拨

1. 正确理解角的相关概念

例 1 以下四个命题：

① 第一象限的角一定不是负角；② 小于 $90°$ 的角是锐角；③ 锐角一定是第一象限的角；④ 第二象限的角是钝角.

其中不正确的命题的个数是( ).

(A) 1个 (B) 2个 (C) 3个 (D) 4个

思路点拨 本例涉及几个极易混淆的概念，可在相应的象限角的表达式中对 k 取特殊值或举反例来验证.

【解】 第一象限角为 $k\cdot 360°<\alpha<k\cdot 360°+90°$，$k\in\mathbf{Z}$；第二象限角为 $k\cdot 360°+90°<\alpha<k\cdot 360°+180°$，$k\in\mathbf{Z}$. 取 $k=-1$，即知①、④错. 一切负角均

小于 90°,故②错.

答案 C

2. 应用终边相同的角的集合表达式

例2 已知 $\theta=-1845°$,在与 θ 终边相同的角中,求满足下列条件的角.

(1) 最小的正角;(2) 最大的负角;(3) $-360°\sim720°$之间的角.

思路点拨 先写出与角 θ 终边相同的角的一般形式 $\theta+k\cdot360°$ $(k\in\mathbf{Z})$,然后根据条件列不等式求出 k 即可. 注意最小的正角在 $0°\sim360°$之间,最大的负角在 $-360°\sim0°$之间.

【解】 与角 $\theta=-1845°$终边相同的角的集合是

$$\{\alpha|\alpha=-1845°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}.$$

(1) 由 $0°<k\cdot360°-1845°<360°$,得 $5\frac{1}{8}<k<6\frac{1}{8}$.

又 $k\in\mathbf{Z}$, $\therefore k=6$. 故所求最小的正角是 315°.

(2) $-360°<k\cdot360°-1845°<0°$,得 $4\frac{1}{8}<k<5\frac{1}{8}$.

又 $k\in\mathbf{Z}$, $\therefore k=5$. 故所求最大的负角是 $-45°$.

(3)由 $-360°<k\cdot360°-1845°<720°$,得 $4\frac{1}{8}<k<7\frac{1}{8}$.

又 $k\in\mathbf{Z}$, $\therefore k=5,6,7$. 故所求的在 $-360°\sim720°$之间的角是 $-45°$,315°,675°.

例3 求终边在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上的角的集合.

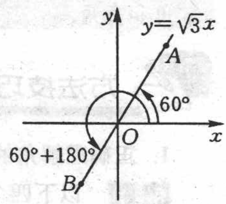


图 1.1-3

思路点拨 以 x 轴的非负半轴为始边,终边在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上,如图 1.1-3 所示,则终边可以为射线 OA,也可以为射线 OB.

【解】 如图 1.1-3 所示,令 $x=1$,则 $y=\sqrt{3}$,易知 $\angle AOx=60°$.

由于终边在直线 $y=\sqrt{3}x$ 上等价于终边在射线 OA 或在射线 OB 上,于是这些终边相同的角的集合是$\{k\cdot360°+60°,k\in\mathbf{Z}\}$或$\{k\cdot360°+60°+180°=(2k+1)180°+60°,k\in\mathbf{Z}\}$,将两式合为一式就是$\{k\cdot180°+60°,k\in\mathbf{Z}\}$.

3. 讨论终边的位置不要漏掉轴线角

例4 若 α 为第三象限角,那么 $-\alpha,2\alpha$ 的终边将在何处?

思路点拨 由 α 的范围确定 $-\alpha,2\alpha$ 的范围,应将它们化为"周内角+

$k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}$"(称 $0°<\theta<360°$ 为周内角)的形式,然后确定终边的位置.

【解】 $\because 180°+k\cdot 360°<\alpha<270°+k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}$, ①

$\therefore -270°-k\cdot 360°<-\alpha<-180°-k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}$, ②

即 $90°-(k+1)\cdot 360°<-\alpha<180°-(k+1)360°, k\in \mathbf{Z}$.

如图 1.1-4 所示,$-\alpha$ 是第二象限的角,即终边落在第二象限.

再由①式,得 $(2k+1)\cdot 360°<2\alpha<180°+(2k+1)\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}$.

如图 1.1-5 所示,2α 的终边在第一、二象限或 y 轴的正半轴上.

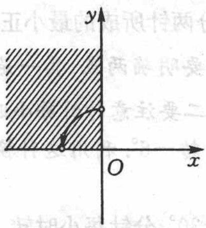


图 1.1-4

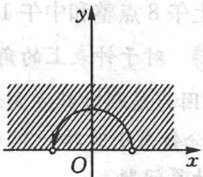


图 1.1-5

4. 求 $\frac{\alpha}{n}(n\in \mathbf{N}^*)$ 的所在象限应分类讨论

例 5 已知 α 是第三象限角,则 $\frac{\alpha}{3}$ 是第几象限角?

思路点拨 由 α 的范围可以求出 $\frac{\alpha}{3}$ 的范围,再按照 k 被 3 除的余数对 k 进行分类讨论.

【解】 $\because 180°+k\cdot 360°<\alpha<270°+k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}$,

$\therefore 60°+\frac{k}{3}\cdot 360°<\frac{\alpha}{3}<90°+\frac{k}{3}\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}$.

(1) 当 $k=3m\ (m\in \mathbf{Z})$ 时,可得

$60°+m\cdot 360°<\frac{\alpha}{3}<90°+m\cdot 360°, m\in \mathbf{Z}$,

故 $\frac{\alpha}{3}$ 是第一象限角.

(2) 当 $k=3m+1\ (m\in \mathbf{Z})$ 时,可得

$180°+m\cdot 360°<\frac{\alpha}{3}<210°+m\cdot 360°, m\in \mathbf{Z}$,

故 $\frac{\alpha}{3}$ 是第三象限角.

(3) 当 $k=3m+2\ (m\in \mathbf{Z})$ 时,可得

$300°+m\cdot 360°<\frac{\alpha}{3}<330°+m\cdot 360°, m\in \mathbf{Z}$,

故$\frac{\alpha}{3}$是第四象限角.

综上所述,当α是第三象限角时,$\frac{\alpha}{3}$是第一、第三或第四象限角.

5. 钟表上的角度问题

例 6 自上午8点整上学到中午11点40分放学,时钟的时针和分针各转了多少度?上午8点整和中午11点40分两针所成的最小正角各是多少度?

思路点拨 对于钟表上的角度问题,要明确两点:其一是它们所转过的角度都是负角(因为是顺时针方向旋转);其二要注意时针每小时转$-30°$,每分钟转$-0.5°$,而分针每小时转$-360°$,每分钟转$-6°$.利用这种换算关系很容易解决钟表上的计算问题.

【解】 ∵ 时针每小时转$-360°\div 12=-30°$,分针每小时转$-360°$.

又上午8点整到中午11点40分经过了3小时40分,而3小时40分$=3\frac{2}{3}$小时,

∴ 时针转过的角度是$-30°\times 3\frac{2}{3}=-110°$,

分针转过的角度是$-360°\times 3\frac{2}{3}=-1320°$.

若以时针指在12点整时为角的始边,则8点整时,时针与分针各指在“8”字和“12”字上,此时,时针与其成$-240°$角,分针与其成$0°$角.

∴ 8点整时,两针所成的最小正角为$120°$.经过$3\frac{2}{3}$小时后,时针与其成的角度为$-240°-110°=-350°$,分针与其成的角度为$0°-1320°=-1320°$,

又 $-1320°-(-350°)=-970°=110°-3\times 360°$,

∴ 在11点40分时,两针所成的最小正角为$110°$.

高考真题链接

例题 (2005·全国Ⅲ)已知α为第三象限角,则$\frac{\alpha}{2}$所在的象限是(　　).

(A) 第一或第二象限　　(B) 第二或第三象限

(C) 第一或第三象限　　(D) 第二或第四象限

【解法1】 ∵ α为第三象限角,

$\therefore\quad 180^\circ+k\cdot 360^\circ<\alpha<270^\circ+k\cdot 360^\circ,\ k\in\mathbf{Z}$,

得 $90^\circ+k\cdot 180^\circ<\frac{\alpha}{2}<135^\circ+k\cdot 180^\circ,\ k\in\mathbf{Z}$.

若 k 为偶数,设 $k=2n,n\in\mathbf{Z}$,

则 $90^\circ+n\cdot 360^\circ<\frac{\alpha}{2}<135^\circ+n\cdot 360^\circ,\ n\in\mathbf{Z}$,此时$\frac{\alpha}{2}$为第二象限角;

若 k 为奇数,设 $k=2n+1,\ n\in\mathbf{Z}$,

则 $270^\circ+n\cdot 360^\circ<\frac{\alpha}{2}<315^\circ+n\cdot 360^\circ,\ n\in\mathbf{Z}$,此时$\frac{\alpha}{2}$为第四象限角.

故$\frac{\alpha}{2}$为第二或第四象限角.

【解法 2】 取 $\alpha=240^\circ$,则$\frac{\alpha}{2}=120^\circ$,为第二象限角;

取 $\alpha=-120^\circ$,则$\frac{\alpha}{2}=-60^\circ$,为第四象限角.

答案 D

反思 解法 1 是通法,必须掌握并能熟练运用;解法 2 是特值法,应注意的是取同终边的角的特值时,一定要取两个,且它们的差为 360°,否则会漏解.

探究创新拓展

例 1 有人说,钟的时针与分针一天内会重合 24 次,你认为这种说法是否正确?请说明理由.

思路点拨 这是圆周上的相遇问题,可根据两针的旋转速度、时间、角度以及第 n 次相遇时它们共旋转的圈数列方程求解.

【解法 1】 设从午夜零时起,经过 t 分钟后,分针与时针第 n 次重合.

因为分针、时针旋转的角速度分别为 $6^\circ/\text{min}$、$0.5^\circ/\text{min}$,

所以 $(6^\circ-0.5^\circ)t=n\cdot 360^\circ$,即 $t=\frac{720}{11}n$.

又分针旋转一天所用时间为 $24\times 60=1440(\text{min})$,

所以 $\frac{720}{11}n=1440$,解得 $n=22$(次).

故分针与时针一天内共重合 22 次.

【解法 2】 设午夜零时,两针重合的位置为始边,且时针旋转 θ 角后与分针重合,由于分针的旋转速度是时针速度的 12 倍,则重合时分针旋转了 12θ,且

有
$$12\theta=\theta+k\cdot 360^\circ,k\in \mathbf{Z},$$
即
$$\theta=\frac{k\cdot 360^\circ}{11},k\in \mathbf{Z}.$$
又因为时针旋转一周需要12小时，所以$0^\circ\leqslant\theta<360^\circ$，且$0\leqslant k<12$，

即$\begin{cases}0^\circ\leqslant\dfrac{k\cdot 360^\circ}{11}<360^\circ,\\ 0\leqslant k<12,\end{cases}$ $(k\in \mathbf{Z})$

解得$0\leqslant k<11,k\in \mathbf{Z}$，即$k=0,1,2,\cdots,10$.

故12小时内，两针共重合11次，则一天内两针共重合22次.

例2 如图1.1-6所示，点P沿单位圆从点$A(1,0)$出发，依顺时针方向匀速运动，在1秒钟内转过的角度为θ. 经过2秒钟第一次到达第三象限，经过14秒钟后又恰好回到出发点A，求θ.

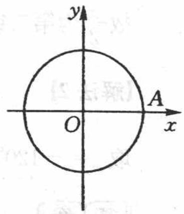


图1.1-6

思路点拨 将题设“2秒后到达第三象限”和“14秒钟后回到点A”用角表示，列方程(或不等式)求解.

【解】 依题意有：

$$\begin{cases}-180^\circ<2\theta<-90^\circ,\\ 14\theta=k\cdot 360^\circ\ (k\in \mathbf{Z})\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-90^\circ<\theta<-45^\circ,\\ \theta=\dfrac{180^\circ}{7}k\ (k\in \mathbf{Z}),\end{cases}$$

即$-90^\circ<\dfrac{180^\circ}{7}k<-45^\circ$，解得$-\dfrac{7}{2}<k<-\dfrac{7}{4}$ $(k\in \mathbf{Z})$，

所以 $k=-2$或$k=-3$，

故 $\theta=-\dfrac{360^\circ}{7}$或$\theta=-\dfrac{540^\circ}{7}$.

三级题型测训

Ⅰ 夯实基础

1. 设$A=\{$第一象限角$\}$，$B=\{$锐角$\}$，$C=\{$小于90°的角$\}$，则下列关系式中正确的是(　　).

(A) $A=B=C$　(B) $A\subsetneqq C$　(C) $A\cap C=B$　(D) $B\cup C\subseteq C$

2. 设$k\in \mathbf{Z}$，下列终边相同的角是(　　).

(A) $(2k+1)\cdot 180^\circ$与$(4k\pm 1)\cdot 180^\circ$　(B) $k\cdot 90^\circ$与$k\cdot 180^\circ+90^\circ$

(C) $k\cdot 180^\circ+30^\circ$与$k\cdot 360^\circ\pm 30^\circ$　(D) $k\cdot 180^\circ+60^\circ$与$k\cdot 60^\circ$

3. 若$90^\circ<-\alpha<180^\circ$，则$180^\circ-\alpha$与$\alpha$的终边(　　).

(A) 关于 x 轴对称　　(B) 关于 y 轴对称

(C) 关于原点对称　　(D) 以上都不对

4. 与$-496°$终边相同的角是________，它是第________象限角，它们中最小正角是________，最大负角是________.

5. 如果角 α 与角 $x+45°$ 的终边重合，角 β 与角 $x-45°$ 的终边重合，那么角 α 与 β 的关系式为(　　).

(A) $\alpha-\beta=0°$　　(B) $\alpha-\beta=90°$

(C) $\alpha+\beta=2k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}$　　(D) $\alpha-\beta=2k\cdot180°+90°,k\in\mathbf{Z}$

6. α 为一任意角，则 α 与 $-\alpha$ 的终边(　　).

(A) 关于 x 轴对称　　(B) 关于原点对称

(C) 关于 y 轴对称　　(D) 关于 $y=x$ 对称

Ⅱ 能力提升

7. 设角 α 的终边为射线 OP，射线 OP_1 与 OP 关于 y 轴对称，射线 OP_2 与 OP_1 关于直线 $y=-x$ 对称，则以 OP_2 为终边的角的集合是(　　).

(A) $\{\beta|\beta=k\cdot360°+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$

(B) $\{\beta|\beta=(2k+1)\cdot180°+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$

(C) $\{\beta|\beta=k\cdot360°+90°+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$

(D) $\{\beta|\beta=k\cdot360°+270°+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$

8. 在直角坐标系中，若 α 与 β 的终边互相垂直，那么 α 与 β 的关系是(　　).

(A) $\beta=\alpha+90°$　　(B) $\beta=\alpha\pm90°$

(C) $\beta=\alpha+90°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$　　(D) $\beta=\alpha\pm90°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$

9. 射线 OA 绕端点 O 逆时针旋转 $120°$ 到达 OB 位置，由 OB 位置顺时针旋转 $270°$ 到达 OC 位置，则 $\angle AOC=$(　　).

(A) $150°$　　(B) $-150°$　　(C) $390°$　　(D) $-390°$

10. 集合 $A=\{\alpha|\alpha=k\cdot90°-36°,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{\beta|-180°<\beta<180°\}$，则 $A\cap B$ 等于(　　).

(A) $\{-36°,54°\}$　　(B) $\{-126°,144°\}$

(C) $\{-126°,-36°,54°,144°\}$　　(D) $\{-126°,54°\}$

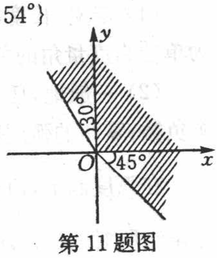
11. 如图，终边落在阴影部分的角的集合是(　　).

(A) $\{\alpha|-45°\leqslant\alpha\leqslant120°\}$

(B) $\{\alpha|120°\leqslant\alpha\leqslant315°\}$

(C) $\{\alpha|k\cdot360°-45°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360°+120°,k\in\mathbf{Z}\}$

(D) $\{\alpha|k\cdot360°+120°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360°+315°,k\in\mathbf{Z}\}$



第 11 题图