普通高等教育“十一五”国家级规划教材

经济数学——微积分

第二版 | 主编　吴传生

高等教育出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

经济数学
——微积分

第二版

主编　吴传生
编者　吴传生　陈盛双　管典安
　　　王卫华　黄小为

高等教育出版社

内容简介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，是在第一版（普通高等教育“十五”国家级规划教材）的基础上修订而成的，是经济数学首门国家级精品课程的使用教材。

本书的主要内容共十一章和三个附录，包含了一元和多元微积分、向量代数与空间解析几何、微分方程与差分方程、无穷级数等内容。

本书注重把微积分理论和方法与经济学的相关问题有机结合，注重利用几何直观、数值计算、语言描述和理论分析相结合的方法介绍微积分基本理论和基本方法，注重适当介绍一些现代数学的概念和术语。本次修订更加突出了极限与连续、函数的变化率与导数、优化方法、元素法、微分方程与差分方程以及无穷级数在经济问题中的应用，还增加了一些图形分析的内容和习题，以培养学生由经济函数的图形对经济问题的性态进行分析的能力。

本书结构严谨，逻辑清晰，叙述清楚，说明到位，行文流畅，例题丰富，可读性强，可作为高等学校经济管理理类专业的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

经济数学.微积分/吴传生主编.—2版.—北京：高等教育出版社，2009.4
ISBN 978-7-04-026482-1

Ⅰ.经… Ⅱ.吴… Ⅲ.①经济数学-高等学校-教材 ②微积分-高等学校-教材 Ⅳ.F224.0 O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第038483号

策划编辑 马 丽　　责任编辑 崔梅萍　　封面设计 张申申
责任绘图 吴文信　　版式设计 余 杨　　责任校对 杨雪莲
责任印制 宋克学

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	400-810-0598
邮政编码	100120	网　址	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　刷	高等教育出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　次	2003年6月第1版
开　本	787×960　1/16		2009年4月第2版
印　张	34.25	印　次	2009年4月第1次印刷
字　数	650 000	定　价	39.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　26482-00

第二版前言

《经济数学》系列教材(第二版)是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，是在第一版(普通高等教育“十五”国家级规划教材)的基础上修订而成的,是经济数学的首门国家级精品课程的使用教材。

该系列教材的主要特点是把数学知识和经济学、管理学的有关内容有机结合,融经济于数学,体现“数学为本,经济为用”的原则。

该系列教材的总的编写原则是:适应经济类、管理类各专业对数学的要求越来越高的趋势,注重适当渗透现代数学思想和方法,理论联系实际,加强学生应用数学知识和方法解决经济问题的能力的培养,突出数学的基本概念、基本理论和基本方法,突出数学的基本思想和应用背景,尽量用数学概念、理论、方法去解释、说明经济学、管理学的相关概念、理论。强调科学性、系统性和准确性。对课程体系进行优化,力求既能保证课程教学基本要求又能降低学习难度,处理好具体和抽象,定量和定性,直观判断和逻辑推理等关系,体现数学文化的精髓。

《经济数学——微积分》的第一版自 2003 年由高等教育出版社出版以来,被全国许多高校作为经济管理类专业的教材。经过几年的教学实践并根据同行们的宝贵建议,我们进一步对国内外优秀的同类教材进行了比较研究,在保持第一版的优点、特色的基础上,第二版更加注意数学和经济的有机结合,更加注重可读性,所作的主要修改如下:

1. 为了更好地与中学数学衔接,第二版分别将二阶和三阶行列式简介、基本初等函数的图形及主要性质、极坐标系的内容用三个附录给出,供需要的学生查阅。

2. 第一章对复合映射的概念作了扩展,使其与复合函数的定义协调;对常见的经济函数一节作了一些精简,突出了均衡价格的概念。

3. 第二章在介绍连续函数的介值定理和零点定理之后增加了一个均衡价格的存在性定理,以更好地体现数学在经济学中的应用。

4. 第三章对边际与弹性一节的内容进行了调整和精简。

5. 第四章中函数图形的描绘部分补充了曲线的渐近线的内容。

6. 为了增加教材使用的灵活性,对第七章空间解析几何与向量代数的内容安排作了适当调整。第一节至第四节比较详细地介绍空间直角坐标系及曲面与空间曲线,这是学习本课程的多元函数微积分所必需的知识;第五节至第七节以

向量代数为基础，介绍平面与直线，虽然标上了“ * ”号，但它们是学习线性代数等后续课程的必要基础，我们建议在学时允许的情况下，尽量安排时间讲授。

7. 鉴于多元函数微分学在经济中的应用十分广泛，在第八章加强了偏导数在经济分析中的应用的内容，以需求函数为例，比较详细地介绍了偏边际与偏弹性的概念。

8. 根据课程内容，调整了部分习题；增加了一些图形的题目，以便培养学生根据经济函数的图像对经济问题的性态进行分析的能力。

讲完本书的基本内容约为 120 学时（不含习题课），讲完本书的全部内容约需 140 学时（不含习题课）。

本版修订工作主要由吴传生、黄小为完成。全书由吴传生负责统稿定稿。研究生何进荣做了大量的具体工作。

本书在修订过程中，参考了众多的国内外教材；高等教育出版社的领导和编辑们对本书的编审和出版给予了热情支持和帮助，尤其是李艳馥、马丽和崔梅萍等老师在本书的编辑和出版过程中付出了大量心血。在此一并致谢！

新版中存在的问题，欢迎广大专家、同行和读者继续给予批评指正。

编　者

2008.12

第一版前言

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材，其主要特点是把微积分和经济学的有关内容进行了有机结合。

该书总的编写原则是：教学内容的深广度与经济类、管理类各专业微积分课程的教学基本要求相当，与教育部最新颁布的研究生入学考试数学三和数学四的考试大纲中的微积分的内容相衔接，符合经济类、管理类各专业对数学要求越来越高的趋势，注重适当渗透现代数学思想，加强对学生应用数学方法解决经济问题的能力的培养，以适应新时代对经济、管理人才的培养要求。

在本书的编写过程中，我们尽可能遵循如下原则：

第一，从特殊到一般，再从一般到特殊；从具体到抽象，再从抽象到具体。

主要体现在如下两方面：

1. 从科学技术和经济学的实际例子出发，引入微积分的基本概念、理论和方法；反过来利用它们解决更多的经济应用问题，将微积分和经济学的有关内容有机结合。

2. 对某些合适的主题，先用几何直观、数值方法引出结论，再从理论上加以阐述、论证，最后用于解决实际问题。

第二，便于组织教学。在保证教学要求的同时，让教师比较容易组织教学内容，学生也比较容易理解接受，并且使学生在知识、能力、素质方面均有大的提高。

主要反映在如下几个方面：

1. 继承和保持经典微积分教材的优点。

2. 适当降低对解题技巧训练的要求，从简处理一些公式的推导，简化一些定理的证明；加强数学思想、几何直观、数值方法和逻辑思维等方面训练；加强应用能力的培养。

3. 适当降低一元函数的极限与连续的理论要求，降低不定积分的技巧要求，适当加强向量代数与空间解析几何以及多元函数微积分的内容，较好地满足后继课程对微积分的要求。

4. 力争从体系、内容、方法上进行改革，有所创新，将教材的结构、体系进一步优化，加强理论联系实际，且能恰到好处地反映一些现代数学的思想、术语。

为体现上述原则，编写本书时，我们对内容作了如下处理：

第一章从集合、映射引入函数概念，适当介绍一些现代数学术语，加强了“函数关系建立”和“经济学中的常用函数”两节内容。

第二章从实际例子、几何直观及数值结果导出极限精确定义，注重极限思想的描述，将用极限定义论证问题的技巧降到较低程度。连续性讨论力求简捷，增加了不动点原理的内容。

第三章对导数、微分讨论得较详尽，和一般教材比较，对经济学上的两个重要概念——边际与弹性的讨论大大加强。

第四章突出了经济应用，将泰勒公式移至本章的最后，可在本章讲授，也可在第十一章的泰勒级数之前讲授。

第五章降低了不定积分的技巧训练，尽量将不定积分计算问题归结为一些规则和步骤，以降低学习难度。

第六章加强了定积分概念的实际背景介绍，加强了对元素法的形式上的描述，增强了定积分经济应用的内容。

第七章专门讨论向量代数与空间解析几何，比一般的经济类、管理类微积分教材的相应内容大为加强。从多方面来看，我们认为这样做是值得的。

第八章从理论和方法上对多元函数微分学的讨论都比较详尽，加强了多元函数微分学在经济学中应用的内容，专列一节对经济学和其他学科中都十分有用的最小二乘法予以详细介绍。根据我们的教学体会，加强这部分的内容，对培养适应新时代的经济管理人才是很必要的。不过，使用本教材时，可根据实际情况对这一部分内容进行取舍。

第九章介绍了二重积分的概念及计算，考虑了二重积分的经济应用，另外，根据后继课程（如概率统计）学习的需要，专列了（无界域上）广义二重积分一节。

第十章开始对微积分学中讨论过的一些基本问题作了适当的小结。本章有三个特点：一是将微分方程和差分方程从理论和方法上完全类比地讨论，且使之成为一个整体，便于学习；二是从经济实际问题引出微分方程、差分方程的基本概念，结合经济实际问题介绍了一阶微分方程的平衡解及其稳定性；三是加强数学建模能力的培养，专列两节讨论微分方程及差分方程的经济应用。

第十一章从逼近的观点提出本书所讨论的级数部分的两个基本问题，函数项级数部分在体系和内容上作了较大改革，突出逼近的思想。首先从几何和数值方法出发，结合泰勒公式，引出泰勒级数的概念。讨论了收敛性定理，介绍了几个基本函数的泰勒级数展开式。再将泰勒级数的概念一般化，引出幂级数的概念，对幂级数作了较为系统的理论讨论，并介绍函数展开成幂级数的唯一性定理。最后，将这些理论综合用于将一些初等函数展开成幂级数。这样处理，一是使得主题和中心明确；二是符合人们的认识规律；三是从数值和几何上引出问

题,比较容易理解,保证了在理论体系完备的前提下,简化推导,减少篇幅。本章的另一个特点是讨论了数项级数和幂级数的经济应用。

本书的习题按节配置,遵循循序渐进的原则,既注意基本概念、基本理论和方法,又注意加强经济学和其他方面应用性习题的配置。每章后配置总习题,供学完一章后复习、总结、提高之用。

本书内容比现行经济类、管理类微积分教材的深广度适当加强,结构严谨,注重应用,文字流畅,叙述详尽,例题丰富,便于自学.本教材的教学内容和教学模式近三年来在我校的经济类、管理类专业的学生中广泛试用,受到了学生及老师的欢迎,收到良好的效果。

本书由吴传生主编.第一、二、三章由陈盛双编写,第四、五、六章由管典安编写,第七、八、九章由王卫华编写,第十、十一章由吴传生编写。全书由吴传生统稿定稿.朱勇教授认真审阅了全书,提出了宝贵的意见。

本书在编写过程中,参考了众多的国内外教材。高等教育出版社对本书的编审、出版给予了热情支持和帮助,武汉理工大学教务处、理学院、数学系也给予了大力支持,在此一并致谢!

由于编者水平有限,加之时间比较仓促,教材中一定存在不妥之处,希望专家、同行、读者批评指正,使本书在教学实践中不断完善。

编　者

2003.2

目　录

第一章　函数 …… 1

第一节　集合 …… 1

一、集合的概念 …… 1

二、集合的运算 …… 2

三、区间和邻域 …… 3

习题 1-1 …… 4

第二节　映射与函数 …… 5

一、映射的概念 …… 5

二、逆映射与复合映射 …… 6

三、函数的概念 …… 8

四、函数的基本性态 …… 11

习题 1-2 …… 14

第三节　复合函数与反函数　初等函数 …… 15

一、复合函数 …… 15

二、反函数 …… 17

三、函数的运算 …… 18

四、初等函数 …… 18

习题 1-3 …… 19

第四节　函数关系的建立 …… 20

习题 1-4 …… 21

第五节　经济学中的常用函数 …… 22

一、需求函数 …… 22

二、供给函数 …… 23

三、总成本函数、总收益函数、总利润函数 …… 24

四、库存函数 …… 25

五、戈珀兹曲线 …… 26

习题 1-5 …… 26

总习题一 …… 27

第二章　极限与连续 …… 30

第一节　数列的极限 …… 30

一、引例 …… 30

二、数列的有关概念 …… 30

三、数列极限的定义 …… 31

四、收敛数列的性质 …… 34

习题 2-1 …… 35

第二节　函数的极限 …… 36

一、函数极限的定义 …… 36

二、函数极限的性质 …… 41

习题 2-2 …… 42

第三节　无穷小与无穷大 …… 43

一、无穷小 …… 43

二、无穷大 …… 45

习题 2-3 …… 47

第四节　极限运算法则 …… 48

习题 2-4 …… 53

第五节　极限存在准则　两个重要极限　连续复利 …… 53

一、夹逼准则 …… 54

二、单调有界收敛准则 …… 57

三、连续复利 …… 61

习题 2-5 …… 62

第六节　无穷小的比较 …… 63

习题 2-6 …… 65

第七节　函数的连续性 …… 66

一、函数连续性的概念 …… 66

二、函数的间断点 …… 69

三、初等函数的连续性 …… 71

习题 2-7 …… 73

第八节　闭区间上连续函数的性质 …… 74

一、最大值和最小值定理与有界性 …… 74

二、零点定理与介值定理 …… 75

三、均衡价格的存在性 …… 77

习题 2-8 …… 78

总习题二 …… 78

第三章　导数、微分、边际与弹性 ········ 81
第一节　导数概念 ································ 81
一、引例 ·· 81
二、导数的定义 ································ 82
三、导数的几何意义 ···························· 86
四、函数可导性与连续性的关系 ·············· 88
习题 3－1 ······································ 90
第二节　求导法则与基本初等函数求导公式 ···· 92
一、函数的和、差、积、商的求导法则 ········ 92
二、反函数的求导法则 ························ 94
三、复合函数的求导法则 ······················ 95
四、基本求导法则与导数公式 ·················· 98
习题 3－2 ······································ 100
第三节　高阶导数 ······························ 101
习题 3－3 ······································ 105
第四节　隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 ···· 106
一、隐函数的导数 ······························ 106
二、由参数方程所确定的函数的导数 ·········· 109
习题 3－4 ······································ 112
第五节　函数的微分 ···························· 113
一、微分的定义 ································ 113
二、微分的几何意义 ···························· 116
三、基本初等函数的微分公式与微分运算法则 ···· 116
四、微分在近似计算中的应用 ················ 120
习题 3－5 ······································ 121
第六节　边际与弹性 ···························· 122
一、边际概念 ·································· 122
二、经济学中常见的边际函数 ················ 123
三、弹性概念 ·································· 125
四、经济学中常见的弹性函数 ················ 128
习题 3－6 ······································ 131
总习题三 ·· 133
第四章　中值定理及导数的应用 ········ 136
第一节　中值定理 ······························ 136
一、罗尔定理 ·································· 136
二、拉格朗日中值定理 ························ 138
三、柯西中值定理 ······························ 141
习题 4－1 ······································ 142
第二节　洛必达法则 ···························· 142
一、$x\to a$ 时的 $\frac{0}{0}$ 型未定式 ············ 143
二、$x\to\infty$ 时的 $\frac{0}{0}$ 型未定式及 $x\to a$ 或 $x\to\infty$ 时的 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式 ············ 144
三、$0\cdot\infty$、$\infty-\infty$、0^0、1^∞、∞^0 型未定式 ···· 145
习题 4－2 ······································ 147
第三节　导数的应用 ···························· 147
一、函数的单调性 ······························ 147
二、函数的极值 ································ 150
三、曲线的凹凸性与拐点 ······················ 154
四、函数图形的描绘 ···························· 156
习题 4－3 ······································ 162
第四节　函数的最大值和最小值及其在经济中的应用 ···· 164
一、函数的最大值与最小值 ·················· 164
二、经济应用问题举例 ························ 165
习题 4－4 ······································ 168
第五节　泰勒公式 ······························ 169
习题 4－5 ······································ 173
总习题四 ·· 173
第五章　不定积分 ···························· 176
第一节　不定积分的概念、性质 ·············· 176
一、原函数与不定积分的概念 ················ 176
二、不定积分的几何意义 ···················· 178
三、基本积分表 ································ 179
四、不定积分的性质 ·························· 181
习题 5－1 ······································ 183
第二节　换元积分法 ···························· 184
一、第一类换元积分法 ························ 184
二、第二类换元积分法 ························ 192
习题 5－2 ······································ 197
第三节　分部积分法 ···························· 199
一、降次法 ···································· 200

二、转换法 …… 200
三、循环法 …… 201
四、递推法 …… 202
习题 5-3 …… 203
第四节　有理函数的积分 …… 204
一、六个基本积分 …… 204
二、待定系数法举例 …… 205
*三、部分分式法简介 …… 206
习题 5-4 …… 207
总习题五 …… 207
第六章　定积分及其应用 …… 209
第一节　定积分的概念 …… 209
一、面积、路程和收益问题 …… 209
二、定积分的定义 …… 212
习题 6-1 …… 215
第二节　定积分的性质 …… 215
习题 6-2 …… 218
第三节　微积分的基本公式 …… 219
一、变速直线运动中位置函数与速度函数之间的关系 …… 219
二、积分上限的函数及其导数 …… 220
三、牛顿-莱布尼茨公式 …… 222
习题 6-3 …… 225
第四节　定积分的换元积分法 …… 226
习题 6-4 …… 230
第五节　定积分的分部积分法 …… 231
习题 6-5 …… 233
第六节　反常积分与Γ函数 …… 233
一、无穷限的反常积分 …… 233
二、无界函数的反常积分 …… 236
三、Γ函数 …… 237
习题 6-6 …… 239
第七节　定积分的几何应用 …… 240
一、定积分的元素法 …… 240
二、平面图形的面积 …… 241
三、旋转体的体积 …… 244
四、平行截面面积已知的立体的体积 …… 247
习题 6-7 …… 248
第八节　定积分的经济应用 …… 249
一、由边际函数求原函数 …… 249
二、由变化率求总量 …… 249
三、收益流的现值和将来值 …… 250
习题 6-8 …… 252
总习题六 …… 252
第七章　向量代数与空间解析几何 …… 255
第一节　空间直角坐标系 …… 255
一、空间点的直角坐标 …… 255
二、空间两点间的距离 …… 256
三、曲面方程的概念 …… 257
四、空间曲线方程的概念 …… 259
五、n 维点集 $\mathbf{R}^n$ …… 259
习题 7-1 …… 260
第二节　柱面与旋转曲面 …… 260
一、柱面 …… 260
二、旋转曲面 …… 261
习题 7-2 …… 263
第三节　空间曲线及其在坐标面上的投影 …… 264
一、空间曲线的一般方程 …… 264
二、空间曲线在坐标面上的投影 …… 265
习题 7-3 …… 266
第四节　二次曲面 …… 267
习题 7-4 …… 270
*第五节　向量及其线性运算 …… 270
一、向量及其几何表示 …… 270
二、向量的线性运算 …… 272
三、向量的坐标 …… 275
四、利用坐标作向量的线性运算 …… 276
五、向量的模、方向角、投影 …… 278
*习题 7-5 …… 280
*第六节　数量积　向量积 …… 280
一、向量的数量积 …… 280
二、向量的向量积 …… 283
*习题 7-6 …… 285
*第七节　平面与空间直线 …… 286
一、平面及其方程 …… 286
二、空间直线及其方程 …… 289
*习题 7-7 …… 293

总习题七 …… 294

第八章　多元函数微分学 …… 296

第一节　多元函数的基本概念 …… 296

一、区域 …… 296

二、多元函数的概念 …… 298

三、多元函数的极限 …… 299

四、多元函数的连续性 …… 301

习题 8－1 …… 302

第二节　偏导数及其在经济分析中的应用 …… 302

一、偏导数的定义及其计算方法 …… 302

二、偏导数的几何意义及函数偏导数存在与函数连续的关系 …… 305

三、高阶偏导数 …… 306

四、偏导数在经济分析中的应用——偏边际与偏弹性 …… 308

习题 8－2 …… 311

第三节　全微分及其应用 …… 312

一、全微分 …… 312

二、全微分在近似计算中的应用 …… 315

习题 8－3 …… 317

第四节　多元复合函数的求导法则 …… 317

习题 8－4 …… 323

第五节　隐函数的求导公式 …… 324

一、一个方程的情形 …… 324

*二、方程组的情形 …… 326

习题 8－5 …… 328

第六节　多元函数的极值及其应用 …… 329

一、二元函数的极值 …… 329

二、二元函数的最值 …… 332

三、条件极值、拉格朗日乘数法 …… 334

习题 8－6 …… 337

*第七节　最小二乘法 …… 338

习题 8－7 …… 343

总习题八 …… 344

第九章　二重积分 …… 346

第一节　二重积分的概念与性质 …… 346

一、二重积分的概念 …… 346

二、二重积分的性质 …… 349

习题 9－1 …… 351

第二节　二重积分的计算 …… 352

一、利用直角坐标计算二重积分 …… 352

二、利用极坐标计算二重积分 …… 359

三、无界区域上的反常二重积分 …… 363

习题 9－2 …… 365

总习题九 …… 367

第十章　微分方程与差分方程 …… 369

第一节　微分方程的基本概念 …… 369

一、引例 …… 369

二、基本概念 …… 371

习题 10－1 …… 373

第二节　一阶微分方程 …… 374

一、可分离变量的微分方程与分离变量法 …… 374

二、齐次方程 …… 377

三、一阶线性微分方程 …… 379

四、一阶微分方程的平衡解及其稳定性简介 …… 382

习题 10－2 …… 384

第三节　一阶微分方程在经济学中的综合应用 …… 385

一、分析商品的市场价格与需求量（供给量）之间的函数关系 …… 385

二、预测可再生资源的产量，预测商品的销售量 …… 387

三、成本分析 …… 388

四、公司的净资产分析 …… 389

习题 10－3 …… 391

第四节　可降阶的二阶微分方程 …… 392

一、$y''=f(x)$型的微分方程 …… 392

二、$y''=f(x,y')$型的微分方程 …… 393

三、$y''=f(y,y')$型的微分方程 …… 395

习题 10－4 …… 396

第五节　二阶常系数线性微分方程 …… 396

一、二阶常系数齐次线性微分方程 …… 396

二、二阶常系数非齐次线性微分方程 …… 400

习题 10－5 …… 405

第六节　差分与差分方程的概念　常系数

线性差分方程解的结构 …………… 406
一、差分的概念 …………………………… 406
二、差分方程的概念 ……………………… 409
三、常系数线性差分方程解的结构 …… 410
习题 10－6 ………………………………… 411
第七节　一阶常系数线性差分方程 ……… 412
一、一阶常系数齐次线性差分方程的求解 …………………………………… 412
二、一阶常系数非齐次线性差分方程的求解 …………………………… 413
习题 10－7 ………………………………… 419
第八节　二阶常系数线性差分方程 ……… 419
一、二阶常系数齐次线性差分方程的求解 ……………………………… 419
二、二阶常系数非齐次线性差分方程的求解 …………………………… 422
习题 10－8 ………………………………… 426
第九节　差分方程的简单经济应用 ……… 426
习题 10－9 ………………………………… 431
总习题十 …………………………………… 432
第十一章　无穷级数 …………………… 434
第一节　常数项级数的概念和性质 ……… 435
一、常数项级数的概念 …………………… 435
二、等比级数(几何级数)及其在经济学上的应用 ……………………… 437
三、无穷级数的基本性质 ………………… 439
习题 11－1 ………………………………… 442
第二节　正项级数及其审敛法 …………… 443
习题 11－2 ………………………………… 450
第三节　任意项级数的绝对收敛与条件收敛 ………………………………… 451
一、交错级数及其审敛法 ………………… 451
二、绝对收敛与条件收敛 ………………… 453
习题 11－3 ………………………………… 456
第四节　泰勒级数与幂级数 ……………… 456
一、函数的泰勒级数 ……………………… 456
二、幂级数 ………………………………… 462
三、将函数 $f(x)$ 展开成泰勒级数的间接方法 ……………………… 469
习题 11－4 ………………………………… 473
第五节　函数的幂级数展开式的应用 …………………………………… 474
一、近似计算 ……………………………… 474
二、微分方程的幂级数解法 ……………… 476
习题 11－5 ………………………………… 476
总习题十一 ………………………………… 477
附录Ⅰ　二阶和三阶行列式简介 ……… 479
附录Ⅱ　基本初等函数的图形及主要性质 ……………………………… 483
附录Ⅲ　极坐标系 ……………………… 486
习题答案 ………………………………… 491

第一章　函　　数

函数是数学中最重要的基本概念之一，是现实世界中量与量之间的依存关系在数学中的反映，也是经济数学的主要研究对象.在这一章中，我们将在中学已有知识的基础上，进一步阐明函数的一般定义，总结在中学已学过的一些函数，并介绍一些经济学中的常用函数.

第一节　集　　合

一、集合的概念

集合是一个只能描述而难以精确定义的概念，我们只给出集合的一种描述：集合是指所考察的具有确定性质的对象的总体，集合简称**集**.组成集合的每一个对象称为该集合的**元素**.

下面举几个集合的例子：

例 1　2003 年元月 1 日在中国出生的人.

例 2　平面上所有直角三角形.

例 3　一元二次方程 $x^2-3x-4=0$ 的根.

例 4　直线 $x-y=1$ 上所有的点.

由有限个元素构成的集合，称为**有限集**，如例 1，例 3；由无限多个元素构成的集合，称为**无限集合**，如例 2，例 4.

通常用大写字母 $A,B,X,Y\cdots$ 等表示集合，用小写字母 $a,b,x,y\cdots$ 等表示集合的元素，若 x 是集合 A 的元素，则说 x 属于 A，记作 $x\in A$；若 x 不是集合 A 的元素，则说 x 不属于 A，记作 $x\notin A$ 或 $x\overline{\in}A$.

不含有任何元素的集合称为**空集**，记为$\varnothing$，空集在研究集合运算和集合之间的关系时，有其逻辑上的意义.如由方程 $x^2+1=0$ 的实根构成的集合，即为空集.

集合一般有两种表示方法：

一是列举法，把它的所有元素一一列举在一个花括号内.例如，集合 A 由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成，表示为 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$；自然数集 $\mathbf{N}$ 表示为 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$.这种表示法一般适用于有限集和可数无限集.二是描述法，指明集合中元素所具有的确定性质.一般形式为

$$A=\{x \mid x \text{ 具有性质} P\}.$$

例如,一元二次方程 $x^2-3x-4=0$ 的解集,记为

$$A=\{x \mid x^2-3x-4=0\}.$$

又如,平面上以原点为中心的单位圆内的点的全体组成的集合,记为

$$B=\{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}.$$

元素为数的集合称为数集,通常用 **N** 表示自然数集,**Z** 表示整数集,**Q** 表示有理数集,**R** 表示实数集和 **C** 表示复数集.有时我们在表示数集的字母右上角添"+"、"-"等上标,来表示该数集的几个特定子集,以实数为例,$\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数之集;$\mathbf{R}^-$ 表示全体负实数之集,其他数集的情况类似,不再赘述.

只有一个元素的集合,称为**单元素集**,记为$\{x\}$.

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的**子集**,或者称 A 包含于 B 或 B 包含 A,记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

若集合 A 与集合 B 互为子集,即 $A\subset B$ 且 $A\supset B$,就称 A 与 B 相等,记作 $A=B$.

若 A 是 B 的子集,而 B 中至少有一个元素不属于 A,则称 A 是 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$,例如 $\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}$,$\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}$,$\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$.

空集$\varnothing$是任何集合的子集.

二、集合的运算

集合有三种基本运算,即并、交、差.

设 A,B 是两个集合,则集合

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或} x\in B\},$$
$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且} x\in B\},$$
$$A\setminus B=\{x \mid x\in A \text{ 但} x\notin B\},$$

分别称为 A 和 B 的**并集**、**交集**、**差集**.

有时,我们把研究某一问题时所考虑的对象的全体称为**全集**,并用 I 表示,把差集 $I\setminus A$ 称为 A 的**余集**或**补集**,记作 A^c.例如在实数集 **R** 中,集合 $A=\{x \mid |x|<1\}$的余集为 $A^c=\{x \mid x\leqslant -1 \text{ 或 } x\geqslant 1\}$.

集合的并、交、余运算满足如下运算律:

交换律 $A\cup B=B\cup A$,$A\cap B=B\cap A$;

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

对偶律 $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$,$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.

以上这些运算律都容易根据集合相等的定义验证.

在两个集合之间还可以定义**直积**或**笛卡儿**(Descartes)**乘积**,设 A,B 是任意的两个集合,则 A 与 B 的直积,记作 $A\times B$,定义为如下的由有序对(a,b)组成的集合:

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}.$$

例如,$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$即为 xOy 平面上全体点的集合,$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

三、区间和邻域

区间和一点的邻域是常用的一类实数集.

实数集$\{x\mid a<x<b\}=(a,b)$称为**开区间**;$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}=[a,b]$称为闭区间;$\{x\mid a\leqslant x<b\}=[a,b)$,$\{x\mid a<x\leqslant b\}=(a,b]$称为半开半闭区间,$a,b$ 称为区间的端点.这些区间统称为有限区间,它们都可以用数轴上长度有限的线段来表示,如图 1-1(a)、(b)分别表示闭区间$[a,b]$与开区间(a,b),此外还有无限区间,引进记号$+\infty$(读作正无穷大)及$-\infty$(读作负无穷大)后,则可用类似的记号表示无限区间,例如$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$,$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$,$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$.

前两个无限区间在数轴上的表示如图 1-1(c)、(d)所示.

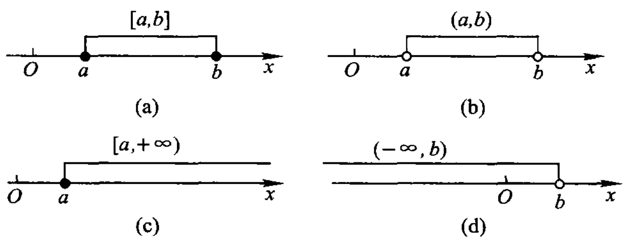

图 1-1

实数集$\{x\mid |x-a|<\delta,\delta>0\}$,称为**点 a 的 δ 邻域**,记为 $U(a,\delta)$.点 a 叫做**邻域的中心**,δ 叫做**邻域的半径**,它在数轴上表示以 a 为中心,长度为 2δ 的对称开区间,如图 1-2 所示.

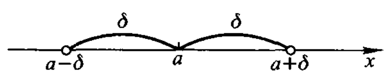

图 1-2

实数集$\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$称为点 a 的**去心 δ 邻域**,记作$\mathring{U}(a,\delta)$.为了方

便,有时把开区间$(a-\delta,a)$称为 a 的**左 δ 邻域**,把开区间$(a,a+\delta)$称为 a 的**右 δ 邻域**.

两个闭区间的直积表示 xOy 平面上的矩形区域,例如$[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\mid x\in[a,b],y\in[c,d]\}$即为 xOy 平面上的一个矩形区域,这个区域在 x 轴与 y 轴上的投影分别为闭区间$[a,b]$和闭区间$[c,d]$.

习题 1-1

1. 按下列要求举例:

(1) 一个有限集合;　　(2) 一个无限集合;

(3) 一个空集;　　(4) 一个集合是另一个集合的子集.

2. 用集合的描述法表示下列集合:

(1) 大于 5 的所有实数的集合;

(2) 圆 $x^2+y^2=25$ 内部(不包含圆周)一切点的集合;

(3) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合.

3. 用列举法表示下列集合:

(1) 方程 $x^2-7x+12=0$ 的根的集合;

(2) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y=0$ 交点的集合;

(3) 集合$\{x\mid |x-1|\leqslant 5$ 的整数$\}$.

4. 下列哪些集合是空集:

$A=\{x\mid x+1=0\}$, $B=\{x\mid x^2+1=0,x\in\mathbf{R}\}$, $C=\{x\mid x>1$ 且 $x<0\}$, $D=\{x\mid x>0$ 且 $x<1\}$, $E=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1$ 且 $x+y=3,x,y$ 均为实数$\}$.

5. 写出 $A=\{0,1,2\}$的一切子集.

6. 如果集 A 有 n 个元素,问 A 共有多少个子集? A 的真子集有几个?

7. 如果 $A=\{0,1,2,\}$, $B=\{1,2\}$,下列各种写法,哪些是对的?哪些不对?

$1\in A$;　$0\notin B$;　$\{1\}\in A$;　$1\subset A$;　$\{1\}\subset A$;　$0\subset A$;

$\{0\}\subset A$;　$\{0\}\subset B$;　$A=B$;　$A\supset B$;　$\varnothing\subset A$;　$A\subset A$.

8. 设 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,3,5\}$, $C=\{2,4,6\}$,求:

(1) $A\cup B$;　　(2) $A\cap B$;

(3) $A\cup B\cup C$;　　(4) $A\cap B\cap C$;

(5) $A\setminus B$.

9. 如果 $I=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,4,6\}$,求:

(1) A^c;　　(2) B^c;

(3) $A^c\cup B^c$;　　(4) $A^c\cap B^c$.

10. 如果 A 是非空集合,下列各个等式哪些是对的?哪些不对?

$A\cup A=A$;　$A\cap A=A$;　$A\cap A=\varnothing$;　$A\cup\varnothing=A$;

$A\cup\varnothing=\varnothing$;　$A\cup I=I$;　$A\cap I=A$;　$A\cap\varnothing=A$;

$A\cap\varnothing=\varnothing$;　$A\setminus A=A$;　$A\setminus A=\varnothing$.