普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学文科数学

（第二版）

严守权　姚孟臣　张伦传　徐西林　编著

中国人民大学出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学文科数学

（第二版）

严守权　姚孟臣　张伦传　徐西林　编著

中国人民大学出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

大学文科数学/严守权等编著. 2 版.
北京：中国人民大学出版社，2008
ISBN 978-7-300-09683-4

Ⅰ. 大…
Ⅱ. 严…
Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材
Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 138196 号

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
大学文科数学(第二版)
严守权　姚孟臣　张伦传　徐西林　编著

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	邮政编码	100080
电　　话	010-62511242（总编室）		010-62511398（质管部）
	010-82501766（邮购部）		010-62514148（门市部）
	010-62515195（发行公司）		010-62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京雅艺彩印有限公司	版　　次	2005 年 8 月第 1 版
规　　格	170 mm×228 mm　16 开本		2008 年 9 月第 2 版
印　　张	24.25　插页 1	印　　次	2008 年 9 月第 1 次印刷
字　　数	444 000	定　　价	36.00 元

内容简介

本书第一版是在作者经过多年文科数学教学改革实践的基础上编写的大学文科数学教材.第二版是作为普通高等教育“十一五”国家级规划教材,在第一版的基础上重新调整修订的.同以往文科数学教材相比,从内容和结构体系上都有较大调整.本书着眼于对文科学生的文化素质教育,内容涵盖了矩阵和线性方程组基本知识及变量数学、随机数学的基本思想、基本理论的和基本方法;行文通俗易懂,案例丰富,贴近现实生活,难度适宜;全书采用模块化结构,各个模块既有一定的逻辑系统,又相对独立,适合文科不同层次的需要,并能适应因课时变动而产生的教学调整;为了满足文科学生对数学知识的进一步了解,同时也为将来转专业和申请第二学位的文科学生提供必要的数学知识储备,书中还附有阅读篇,供课余阅读.同时与本书配套出版的还有《大学文科数学学习指导(附习题解答)》.

本书对从事人文科学的工作者学习数学、了解数学有一定参考价值,也可以用作职业教育和成人教育等相近专业的数学教材.

第二版前言

为了更好地体现大学文科数学课程的功能定位，便于大学文科数学的各个教学环节的有效实施，在广泛征求意见及教学实践的基础上，本书第二版对原书作如下修订：

1. 对内容作必要调整，主要是对有一定难度又过于分散的知识点进行删减. 其中，在第一篇删去了向量空间部分，内容集中围绕矩阵、矩阵的运算、线性方程组及其应用展开；第二篇结构调整为五章，删去了数学模型、无穷级数的内容，将这两部分移至阅读篇；第三篇对知识点进行了合并整理，全篇调整为四章；将原书第四篇移至阅读篇. 调整后，全书的数学知识的系统性、逻辑性、整体性有所增强，结构更加紧凑合理，也更能适应不同需求，实施模块化教学. 书中有些内容加了“*”号，选用本教材时可根据教学需要和学时安排略去不讲.

2. 降低习题难度. 调整后，全书难易度更符合文科学生的实际. 读者若需要本书习题的详细解答或进行更多解题训练，可参考与本书配套的《大学文科数学学习指导(附习题解答)》.

3. 教材最后增加阅读篇，主要满足部分学生希望了解更多数学知识的需要，也是为将来转专业或申请第二学位的学生提供必要的数学知识储备. 这部分内容一般不列入教学计划，仅供学生课外阅读.

本次修订，第一篇、第二篇和第三篇分别由张伦传、严守权、姚孟臣完成. 阅读篇“向量空间中的线性相关性”由张伦传编写，“数学模型化方法”、“数列的部分和的极限——无穷级数简介”、“模糊数学简介”由徐西林编写，“回归分析法”由姚孟臣编写. 许多使用第一版教材的教师和读者对本次修订工作也提出了很多宝贵的建议和意见. 值得提出的是，中国人民大学出版社为再版修订付出了很大心血，对此，我们表示衷心的感谢.

编者

2008 年 3 月

目　录

这本庞大的书(我指的是宇宙)中写了(自然)哲学，它一直敞开在我们的眼前，但若不先学会理解它的语言，并识别它所书写的字符，是不能读懂它的，它是用数学语言写成的.

——伽利略(Galileo Galilei)

数学是这样一种东西：她提醒你有无形的灵魂，她赋予她所发现的真理以生命；她唤起心神，澄净智慧；她给我们内心思想添辉；她涤尽我们有生以来的蒙昧与无知.

哪里有数学，哪里就有美.

——普罗克洛斯(Proclus)

导 言

本书是专门为纯文科类，即文史、哲学、法律、语言类等专业编写的大学数学教材.纯文科类专业学生为什么要学数学，数学与我们专业有什么关系？这是同学们常常提出的一个问题.长期以来，人们往往习惯上把数学学科看做是一门自然学科，或者是一类解决工程技术问题的工具性很强的学科，似乎与人文社科相距甚远.因此，同学们提出疑问并不难理解.数学学科究竟是什么学科？数学与人文社会科学究竟有什么关系？数学思维有什么特点？了解相关问题，对于明确大学数学的学习目的，培养学习情趣，增强学习能力，是非常必要的.

一、关于数学与数学文化

数学是一门历史最悠久最古老的学科，恩格斯曾经把数学定义为关于现实世界中数量关系与空间形式的科学.20世纪80年代开始，根据现代数学的发展，数学又被定义成内涵更为广泛的关于模式的科学.根据考古发现，大约11 000年前就有人造数字系统存在，但数学作为一门独立的知识体系起源于公元前6世纪的古希腊，当地有一著名的学派叫毕达哥拉斯学派，在他们看来，客观世界是按照数学的法则创造的，数学的规律就是宇宙格局的精髓，数学是开启宇宙奥秘的钥匙.传说中的学派创建人毕达哥拉斯是古希腊的哲学家、数学家、音乐理论家、天文学家，他的哲学基础就是“万物皆数”，将数看做万物的本源.学派最具影响的另一个人物是哲学家柏拉图，他突出强调数学对哲学和了解宇宙的重要作用，认为只有数学才能领悟物理世界的实质和精髓.在毕达哥拉斯学派的影响下，其后延续几百年，一大批古希腊数学家，如亚里士多德、欧几里得、阿基米德等，为了通过揭示数的奥秘来探索宇宙永恒的真理，积极开展广泛的数学研究.他们强调要使数学强有力，就必须在一个抽象概念中表示事物的本质特征.他们第一次引入独立的数学对象，将数学向理性科学方面迈出了第一步.他们最先将严密推理系统化，建立了公理化体系，从而使数学研究具备了严密性和抽象性.他们最早提出了归纳法和反证法，发展

了穷竭法，同时在几何学、三角学、代数学等领域取得了一系列重大的成果. 直到今天，欧几里得的《几何原本》仍然是学习几何学的范本，公认是世界上印刷次数最多的教科书. 从源头上说，数学与哲学是相辅相成、交汇发展的，某种程度上，数学也可以看做脱离数量意义的哲学，历史上众多数学家的哲学修养都很深，不乏哲学名家、大师级人物，如柏拉图、莱布尼茨、笛卡儿、庞加莱、康德等. 这说明数学与人文科学的联系源远流长.

数学源于客观世界，又非物质世界中的真实存在，而是人类抽象思维的产物，因此，数学具备文化特征. 从本质上看，数学对对象的抽象，与文学作品的虚构性十分相似. 鲁迅笔下的阿 Q、孔乙己，几何学中的点、线、面，在实际生活中未必客观实在，但都是现实世界的反映，同属于创造性的艺术. 正如英国作家哈代所说："数学家的作品肯定和画家或诗人的一样美，数学概念一定和颜色或文字一样和谐."实际上，数学家写出传世文学佳作的也不乏其人. 数学的文化特征还表现在不同地域、不同民族的数学发展也能折射出各自的人文差异. 例如，古希腊注重理性思维的数学传统，而古代中国则注重于实用性的数学方法论的数学传统. 在西方，数学家怀尔德曾经这样描绘过各民族的数学特点："法国数学偏爱函数论，英国数学对应用感兴趣，德国着重于数学基础，意大利感兴趣于几何，而美国的数学则以其抽象特征著称."另一方面，数学兴衰同样与社会政治环境和文化气候紧密相关. 西方数学史上最为漫长的黑夜就发生在古希腊之后的中世纪，在长达 1 000 年的时间内，欧洲社会陷入愚昧和宗教狂热之中，数学被禁锢在神学范畴之内，几乎没有新的数学成果出现. 数学发展的新机遇则是在 16 世纪的文艺复兴时期，文艺复兴实质上是古希腊文化的复兴，也是古希腊数学的理性精神的复兴. 文艺复兴以及随后的资本主义产业革命中，力学、天文学、物理学、光学等领域提出的实际问题促成了 17 世纪牛顿、莱布尼茨对微积分的创立，标志初等数学(常量数学)时代的结束，以及近代数学(即变量数学)时代的开始；到了 19 世纪，高斯、鲍耶和罗巴切夫斯基又创立了非欧几何学. 非欧几何学的创立，从根本上改变了人们对数学性质的理解以及对它和物质世界关系的理解，把数学的研究从直观、经验的局限下解放出来，推动数学向更广泛、更抽象、更理想化的方向发展，开启了现代数学发展的起点.

因此，无论从源头上说，或是从数学的文化属性上说，数学是一种文化. 正如数学家赫尔希所认为的：数学既不存在于观念世界中，也不存在于人的大脑里，它既不具有物质性质，也不具有精神性质，而是具有社会性质，"如法律、宗教、货币一样，是文化的一部分，历史的一部分". 美国《科学》特约主编斯蒂恩更为明确指出："数学……在人类特性和人类历史中，它的地位绝不亚于语言、艺术或宗教."因此，就学科分类而言，英国大不列颠百科全书把数学和逻辑、历史、人文科学和哲学放在一起，作为人类科学文化知识的几大类别，正是

反映数学学科的文化属性.关于数学与现代文化的关系，数学家M.克莱因指出“数学一直是形成现代文化发展的主要力量，同时也是这种文化极其重要的因素”，“如果我们对数学本质有一定了解，就会认识到数学在形成现代生活的思想中起重要作用这一断言并不是天方夜谭.”我国数学家齐民友则认为：“没有现代的数学就不会有现代的文化，没有现代数学的文化是注定要衰落的.”显然，作为人文社科专业的学生，了解数学的文化属性，并学习必要的数学知识，是学习人类文化传统和历史的一个重要内容，对于加强专业基础，拓展专业视野是十分必要的.

二、数学与数学思维

把数学作为文史类各专业必修课程的又一个重要因素，是数学教育对人的思维训练的重要性.数学是对人的思维训练的体操，美国国家研究委员会在一份名为《人人关心数学教育的未来》的专题报告中写道，“数学提供了有特色的思考方式，包括建立模型、抽象化、最优化、逻辑分析、从数据进行推断，以及运用符号等等.它们是普遍适用并且强有力的思考方式.运用这些思考方式的经验构成了数学能力——是当今这个技术时代日益重要的一种智力，它使人们能批判地阅读，能识别谬误，能探察偏见，能估计风险，能提出变通办法.数学能使我们更好地了解我们生活在其中的充满信息的世界.”“数学在决定国家的各级人才的实力方面起着日益重要的作用.”美国国家研究委员会是由来自美国科学院、美国工程科学院、美国医学研究院的委员组成，具有很高的权威性，这份专题报告指出了数学思维的特点及数学能力在人才综合素质中占有的分量，同时强调了数学教育在人才培养中的特殊地位，值得我们认真思考.那么，数学思维具体包括哪些主要内容呢？了解这些内容和特点，将有助于我们在学习数学的过程中有意识地加强数学的思维训练，增强数学能力.

1. 数学思维的严密性、逻辑性和公理化的方法

逻辑思维是数学思维的主体，逻辑性是数学思维最显著、最重要的特征.从某种程度上说，逻辑也是数学的生命.从数学发展的历史看，许多文明古国在早期数学的发展过程中，都各自有过辉煌的成就.我国古代流传下来的数学巨著《九章算术》记载的许多数学的发现都要早于古希腊.即便如此，我们仍然把古希腊定为数学学科产生的源头，其中的一个重要因素是数学与古希腊卓越的逻辑学的结合，形成了严密的逻辑体系.就思维形态而言，数学与文学艺术均属于创造性的艺术，但不同的是数学属于科学的范畴.一种数学概念或理论，最初可能是个人的自由创造，但一旦这些概念或理论的正确性经过逻辑证明确认，将具有超越个体的普遍性和一义性，与整个数学系统产生前后一贯的逻辑体系.由于整个数学系统是按照逻辑法则构建的，数学的发展不是用破坏和取消原有理论的方式进行的，而是用深化和推广原有理论的方式，用以前的发展作准备而提出的概括理论的方式进行.正如数学家汉克尔所说：“在大多

数科学里，一代人要推倒另一代人所修筑的东西，一个人所树立的另一个人要加以摧毁，只有数学，每一代人都能在旧建筑上增添一层楼.”这就是为什么数学能够成为科学的龙头，各种学科都必须在数学的驾驭下发展的根据.

具体地说，数学逻辑思维，就是要求思维过程必须遵循形式逻辑的基本规律，即同一律、矛盾律、排中律、充足理由律.其中同一律要求思维过程中概念的确定性；矛盾律不允许思维中出现矛盾，是形式逻辑的精华.由矛盾律生成的归谬法就是强有力的推理方法，毕达哥拉斯用归谬法轻易证明了$\sqrt{2}$不是有理数，而罗巴切夫斯基运用归谬法创立了非欧几何学，这些都是归谬法应用的经典范例；排中律，即在同一时间、同一关系下，同一对象对某个性质或者具有或者不具有，不会出现第三种可能性；充足理由律，即只要条件充分，必然有准确的结论.

公理化方法，是逻辑思维发展的高级阶段，其特点就是选取尽可能少的一组原始概念和不加证明的一组公理，并以此为出发点，应用逻辑推演，将某个数学分支组成一个演绎系统.欧几里得通过收集整理前人的研究成果，巧妙设计并创立了欧氏几何，就是这种方法应用的成功范例.数学的严密化正是通过各个分支的公理化来完成的.科学家爱因斯坦曾经指出：“一切科学的伟大目标，即要以尽可能少的假说或者公理出发，通过逻辑演绎，概括尽可能多的经验事实.”公理化为实现这一目标提供了一个有效的途径，因此，公理化的方法也被看做是对理论进行整理和表述的最佳形式，目前已广泛应用于包括人文社科的各个领域，其意义已远远超出数学范畴.数学家希尔伯特说：“的确，不管在哪个领域，对任何严正的研究精神来说，公理化方法都是并且始终是一个合适的不可缺少的助手；它在逻辑上是无懈可击的，同时是富有成果的；因此它保证了研究的完全自由.”“一个理论的建立一旦成熟，就开始服从于公理化方法……通过突进到公理的更深层次……我们能够获得科学思维的更深入的洞察力，并弄清我们的知识的统一性.”

大学数学教育是数学逻辑思维训练的主要途径，通过学习一个数学概念，推导或证明一个命题，求解一个习题，只要我们认真把握，都是增强自身逻辑思维能力的一个机会.另外，做好数学学习的阶段性总结，及时将知识进行梳理，并形成一个前后一贯的知识系统，也是体验公理化方法，增强学习能力的一次有益尝试.

2. 数学思维的抽象性和符号化方法

抽象性是数学的基本特征，不仅数学概念是抽象的、思辨的，而且数学的方法也是抽象的、思辨的.因为要使数学更强有力，就必须在一个抽象概念中包含它所表示的实物的本质特征.例如，数学上的直线必须包括拉伸的绳子、直尺边、田地的边和光线的路径，于是，直线没有粗细、颜色、分子结构和绷紧度之分.正如列宁所说：“一切科学的(正确的、郑重的、不是荒唐的)抽象，都

更深刻、更正确、更完全地反映着自然.”数学正是运用抽象思维去把握客观事实.根据抽象层次不同，数学抽象可以进一步分为：弱抽象、强抽象、构象化抽象、公理化抽象四种形式.数学的发展在很大程度只能借助更高层的抽象得以实现.数学抽象思维的一个应用实例是“哥尼斯堡七桥问题”.利用数学抽象不仅解决了这一问题，而且开创了一个新的数学分支——拓扑学研究的先河.

数学的另一特征是它是一种符号化方法.如同音乐利用符号来代表和传播声音一样，数学也用符号来表示数量关系和空间形式.由于数学符号具有抽象性、精确性、规范性、通用性、开放性，因此已经成为一种世界上的通用语言，而且随着社会的数学化程度的提高，数学语言已成为人类社会中交流和贮存信息的重要手段.数学语言十分严密简洁，不仅有助于提高思维效率，有利于触发人的思维创造性，而且常常是深奥理论的源泉.也正如莱布尼茨指出的：“数学之所以如此有成效，之所以发展极为迅速，就是因为数学有特制的符号语言.”从某种意义上说，一门学科数学符号化的程度，常常是这门学科是否成熟的标志.一个人能否准确运用数学符号和进行符号化的思维，也常常是数学思维能力的一种体现.如今数学语言为社会科学语言注入活力并逐步成为社会科学语言中重要的组成部分，渗透到现代社会各个信息系统之中，在数学学习的过程中大学应该重视这种能力的培养.

3. 数学思维的模型化方法

数学模型化方法是对某种事物或现象中数量关系和空间形式进行数学概括、描述和抽象的基本方法，是应用数学最本质的思维方法之一，也是数学科学联结其他非数学科学的中介和桥梁.由于数学应用的广泛性，许多数学家都把数学看做是模式的科学.数学家则像画家和诗人一样，是模式制造家.数学家、哲学家怀特海认为：“模式具有重要性的看法与文明一样古老.每一种艺术都奠基于模式的研究.”“社会组织的结合力也依赖于模式的保持；文明的进步也侥幸地依赖于这些行为模式的变更.”“数学对于理解模式和分析模式之间的关系，是最强有力的工具.”“数学的本质特征就是从模式化的个体做抽象的过程中对模式进行研究.”随着社会进步，数学化程度的提高，数学模型化已经成为把握并预测自然界和人类社会变化与发展的一种趋势.在欧洲，人文科学和社会科学把模型化称为结构主义的运动，并论证了所有各种范围内的人类行为与意识都以某种形式的数学结构为基础；在美国，社会科学自称有更坚实、定量的东西，也是用数学模型来表示的.数学模型化大致要经过建模、解模、应用三个阶段，分别属于归纳思维、演绎思维、发散思维三种不同的思维形式，大学数学将通过典型实例介绍数学建模的过程，同学们也可以在求解应用题的过程中得到相关的训练.

4. 数学思维的美学思想

数学是人类理性思维的产物，是创造性的艺术，这也就奠定了数学的美学

基础.数学是美学四大中心建构(史诗、音乐、造型和数学)之一.事实上,数学与艺术之间就有许多相通之处,比如音乐,被人称为感性的数学,而数学又称为理性的音乐.数学美不是什么虚无缥缈、忽有忽无的东西,也不是某种纯粹主观、不可捉摸的东西,而是有确定的客观内容的.从历史角度看,“对称美”、“统一美”、“简单美”、“奇异美”可被看做数学美的主要内容.长期以来,数学为之努力的目标就是:将杂乱整理为有序、使经验升华为规律、寻求各种物质运动的简洁统一的数学表达等,这都是数学美的体现,是数学中公认的一种评价标准,体现了人类对美感的追求.数学美是人的审美观素质的一部分,对人精神世界的陶冶起到潜移默化的影响.随着人类文明的发展和科学的进步,数学美学思想正逐渐被人们认识,这也是今后的数学教育亟待加强的一项内容.

5. 数学思维的创造性和创新精神

数学是一门创新的艺术,这是因为数学研究对象并不一定具有明显的直观背景,而是各种量化模式.数学的本质在于自由,这种自由为人们发挥创造性才能提供了最为理想的场所.因此,创新精神始终渗透并体现在整个数学活动之中.数学的创新除了现实社会发展的需要,还源于内在因素,追求数学美就是其中的一个深层动力.真理总是简单的.牛顿和莱布尼茨创立微积分,目的就是要把原来分散在各种特殊问题中的求解方法统一为一种可用的普遍性的方法.在其他科学领域,爱因斯坦创立狭义相对论的动机之一就是希望把牛顿的经典力学与麦克斯韦尔的电动力学统一起来.物理学家狄拉克关于正电子的预言也缘于他对对称性的追求.正如数学家冯·诺伊曼所说:“归结到关键的论点,我认为数学家无论选择题材还是判断成功的标准主要都是美学的.”从思维角度考虑,数学创新过程要特别强调数学的直觉、归纳类比、灵感思维和猜想的重要性.因为这是数学创造性思维的最有活力的精华部分.数学大厦常常是修好了楼层再打地基,微积分创立之初,虽在应用领域取得极大成功,但理论基础极不稳固,为完成其严密化,几十位数学家花费了 200 多年时间.数学在创新中曾多次出现悖论,遭遇危机,而正是在不断对悖论和危机的处理过程中成熟发展起来的.这其中充满了逻辑思维和非逻辑思维的辩证统一,发散思维和收敛思维的辩证统一.

除了以上列举的数学思维的内容外,还有其他一些内容,如辩证思维、对偶思想等.数学思维方法是解决问题的艺术.我国数学教育家高隆昌指出:一个具有“数学思维”修养的人常常具有以下特点:(1) 讨论问题时习惯于强调定义(界定概念),强调问题存在的条件;(2) 在观察问题时,习惯于抓其中的(函数)关系,在微观(局部)认识基础上进一步作出多因素的全局性(全空间)的考虑;在认识问题时,习惯于将已有的数学概念,如对偶、相关、随机、泛函、非线性、周期性、混沌等等概念广义化,用于认识现实中的问题,比如他们会看出价格是商品的对偶,效益是公司的泛函等等.

三、数学与人文社会科学

马克思曾经指出:“一门科学只有在成功地应用数学时,才算达到了真正完善的地步.”马克思所说的科学“真正完善”的时代已经到来,其中最先成功应用数学的是自然科学,尤其是17世纪后,微积分创立不久,就成功地预测了哈雷彗星再现,准确地说明了行星的运动和图像.同时数学在力学、工程学、天文学等领域显示出强大的威力,以致人们认为数学是自然科学的一个分支.相对而言,在相当长的一段时间里,人文社科的研究领域中难以见到数学的踪影.人类进入19世纪,尤其是20世纪,情况发生了变化,数学开始进入几乎所有的学科领域,曾经被恩格斯认为数学“为零”的生物学科,分子生物学、基因理论、生态学、生物动力学等都离不开数学,生物数学已经成应用数学各分支中最振奋人心的前沿之一.这种变化在人文社科领域同样突出,在许多曾经被认为很难用到数学的人文社科领域,数学的应用已经发展到不懂数学的人望尘莫及的阶段.1971年美国学者卡尔·多伊奇等人在《科学》杂志上发表一项研究报告,列举了1900～1965年社会科学方面的62项重大成就,1980年又补充了77项,其中数学化的定量研究占相当大的比例.可以说,数学与人文社会科学的联系,已不仅仅停留在文化范畴或思维方式方面,如同其他学科一样,人文学科发展到这样一个阶段,要成为名符其实的“现代科学”,一个决定步骤就是使自己“数学化”.数学已经直接成为人文社会科学研究必不可少的工具.

在人文社会科学中,与数学结合最广泛最紧密的是经济学.由于任何经济活动都离不开数字,因此也离不开数学.甚至有的专家认为,经济学要成为科学,就必须是一门数学科学.马克思在研究经济学的过程中,就十分重视数学知识的学习.1865年5月20日,马克思在给恩格斯的一封信中写道:在工作之余,我就搞搞微分学.他不仅研究了牛顿和莱布尼茨的工作,而且还研究了微积分产生后一个多世纪内一批数学家的工作,并有许多精辟的见解.马克思在1882年11月22日给恩格斯的另一封信中就对微积分发展作出过深刻而准确的概括,说道:这种方法始于牛顿和莱布尼茨的神秘方法,继之以达朗贝尔和欧拉的唯理论的方法,终于拉格朗日的严格代数方法……马克思在数学方面的极高造诣,无疑对于他在哲学、经济学上取得的巨大成就有着重大影响.数学与经济学的结合始于17世纪中叶,以英国古典政治经济学创始人配第的著作《政治算术》发表为标志.19世纪中叶,伴随近代数学发展,数学与经济学的结合进入“蜜月”期,两个学科相互渗透,产生了许多重要的经济学理论、模型和边缘交叉学科,如数理经济学、计量经济学、经济控制论等.标志着经济学研究最高水平的诺贝尔经济学奖自1969年设立至今共39届,获奖项目几乎全都与数学相关,而获奖人许多是以数学家身份从事研究的,如凯恩斯,也不乏数学大师,如冯·诺伊曼,其中的数学运用几乎达到极致.

数学与语言学的结合是数学成功应用的又一范例.法国数学家哈答玛曾说道：语言学是数学和人文科学之间的桥梁.利用数学方法可以开展对语言学中字频、词频，方言，写作风格等方面的研究.例如，利用统计方法可以鉴定莎士比亚新诗真伪，判断《红楼梦》后四十回是否为曹雪芹的原作.计算机的出现进一步促进了数学与语言学的研究，数学渗透到形态学、句法学、词汇学、语言学、文字学等各语言学分支，形成许多交叉学科，如应用数理语言学、统计语言学、代数语言学，等等.数学、语言学和计算机相结合，实现了机器对文字和语音的自动翻译.

对于历史学科，有意识地系统地利用数学方法，始于20世纪的上半叶至20世纪50年代，统称为计量史学.1960年以后计算机的广泛应用，使得计量史学的研究领域从最初的人口史、经济史扩大到社会史、政治史、文化史、军事史等方面，应用计量方法的历史学家日益增多，有关计量史学的专业刊物、论文和专著不断涌现.20世纪70年代中期，计量史学已成为国际史学研究中最庞大的流派，发展是极为迅速的.计量化使历史学研究的对象从传统的以个人和事件为中心的政治史向以大众和过程为主体的总体史和综合史的转移成为可能.同时计量化将有助于进一步收集整理、挖掘利用过去不为人重视或不曾很好利用的历史资料，从而开辟研究的新领域.计量化将数学语言和方法引入史学研究，定量和定性方法的有机结合使历史学趋于严谨、精确，无疑将大大推动历史学的研究.

与经济学、语言学、历史学等学科相比，在政治学、社会学、法学等领域数学应用的发展相对比较缓慢，这些领域的成熟有待于数学的进一步发展，但也早有了许多有趣和有用的结果.例如，在政治学中，任何一个国家、一个社会团体，或者一个股份制企业都会涉及选举权力机构或通过投票决策的问题.利用数学模型，可以定量与定性相结合，研究比较不同的选举制度和具体的选举方法，以保证选举和投票结果合理公正.在政治学中，相关的社会选择、投票体制委员会决策、联盟行为和策略的相互作用等课题的研究，已经形成了数学的一个主要分支.在社会学和人口学领域，早在18世纪中叶，西方的“政治算术学派”就利用统计学研究人的出生与死亡问题，研究了婚姻的数量和居民的密度与富裕程度的依赖性，研究了影响生育能力的各种原因，分析了死亡与城市和农村生活条件、居民密度、流行病的依赖关系.现在社会统计学已经成为社会学研究必备的知识.在法学中，建立在数学基础上的指纹识别和基因测试等现代侦查手段已经成为侦破案件的强有力的工具.数学的逻辑推理、公理化方法和数理统计方法等也广泛地应用于法学研究，法学专业招收数学专业为背景的研究生现已不再是新闻.

在其他学科，如哲学、逻辑学、心理学、艺术等领域，数学的应用更是不言而喻的.客观地讲目前人文社科领域数学的应用还处于初级阶段，一方面是由

于人文社科领域包含有价值意识等许多不确定的因素，问题远比其他学科复杂，在其他学科得到成功应用的数学工具不能简单地套用.另一方面，由于历史的原因，从事人文社科研究的人员缺乏必要的数学知识，而数学家也很少与人文社科研究人员进行沟通.很多数学家指出，人文社科的基本特征乃至整个社会的基本特征与现代数学的基本特征十分相似，人文社科领域应该是数学，特别是现代数学或未来数学发展的很好的背景空间和应用领地.人文社科的学生应该面向未来，学习掌握必要的数学工具，推动本学科数学化的进程.

四、数学与数学教育

数学家、哲学家怀特海曾经在1939年预言：在人类思想领域里具有压倒性的新情况，将是数学地理解问题占统治地位.人类社会进入21世纪以来，科学技术日新月异，科学的数学化和社会数学化都在加速，怀特海的预言正在变成现实.邓小平同志提出：教育要面向未来，面向世界，面向现代化.鉴于数学对人的综合素质的提高和发展的重要性，许多国家都因此把加强数学教育作为增强综合国力，推行人才战略的一个重要内容，并逐渐形成共识.美国国家研究委员会指出：在技术发达的社会里，扫除数学盲已经代替昔日的扫除文盲的任务.我国也强化了数学教育在教育中的地位，大学文科学生不学数学已经成为历史，而且在一些文科专业，根据自身发展的需要，对数学课程难度的要求还在不断提升.

需要指出的是，要将数学教育功能充分发挥，还需解决许多认识问题.如谈到数学教育，人们往往关注与专业的结合，即强调其工具功能，这是不容置疑的，但是不够全面.由于历史的原因，与国外相比，我国人文科学与数学的结合相对滞后，许多专业教学与研究的内容和方法中数学的应用还是空白，有人因此认为数学无用而轻视数学教学，这显然是无视新时期世界上各学科数学化趋势，也与邓小平同志关于教育的“三个面向”精神相悖.有的人谈到数学教育，就会联想到一连串抽象的定理和推导，或者是变幻莫测的数学技巧，因此有一种畏惧感，显然这是一种误解.数学家指出“数学学科并不是一系列的技巧，这些技巧只不过是它微不足道的方面，它们远不能代表数学，就如同调配颜色远不能当做绘画一样.技巧是将数学的激情、推理、美和深刻的内涵剥落后的产物.”上述种种想法的出现，一方面说明许多人对什么是数学、什么是数学教育缺乏全面的了解，另一方面也反映了长期以来，我们的数学的应试教育的弊端.日本一位数学教育家在谈到数学教育时说，他的学生所学的数学知识在毕业后一两年就忘掉了，然而，不管从事什么业务工作，铭刻于头脑中的数学精神以及数学的思维方法、研究方法、推理方法和着眼点(若培养了这种素质的话)，若能随时随地发生作用，必将收益终身.他强调，最重要的是数学精神、思想、方法，而数学知识是第二位的.他的话很值得我们思考.

根据对数学和数学教育的讨论和理解，我们将把《大学文科数学(第二