WUTP 普通高等学校电气信息类专业基础课新编系列教材

《电磁场与电磁波理论基础》
学习指导与习题解答

刘岚 黄秋元 胡耀祖 程莉 编著

武汉理工大学出版社
WUTP Wuhan University of Technology Press

普通高等学校电气信息类专业基础课新编系列教材

《电磁场与电磁波理论基础》学习指导与习题解答

刘 岚 黄秋元 胡耀祖 程 莉 编著

武汉理工大学出版社
·武 汉·

内 容 简 介

本书是《电磁场与电磁波理论基础》的配套教材。全书按照《电磁场与电磁波理论基础》的章节顺序，给出每章的“基本内容概述”、“教学基本要求及重点和难点”、“典型例题分析”及“习题解答”。

本书可供高等院校电气信息类专业的教师和学生使用，作为“电磁场与电磁波”课程的教学参考书和学习指导书。

图书在版编目(CIP)数据

《电磁场与电磁波理论基础》学习指导与习题解答/刘岚等编著. 一武汉：武汉理工大学出版社，2009.1

ISBN 978-7-5629-2866-9

Ⅰ. 电…

Ⅱ. 刘…

Ⅲ. ① 电磁场-高等学校-教学参考资料 ② 电磁波-高等学校-教学参考资料

Ⅳ. 0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 208871 号

出版发行：武汉理工大学出版社

武汉市武昌珞狮路 122 号　邮编：430070

http://www.techbook.com.cn

E-mail：wutpbook@sohu.com

huangchun@mail.whut.edu.cn

wutbbailih@163.com

经 销 者：各地新华书店

印 刷 者：荆州市鸿盛印务有限公司

开　　本：787×1092　1/16

印　　张：12.75

字　　数：330 千字

版　　次：2009 年 1 月第 1 版

印　　次：2009 年 1 月第 1 次印刷

印　　数：3000 册

定　　价：22.00 元

普通高等学校电气信息类专业基础课新编系列教材

出版说明

世纪之交,我国高等学校的人才培养工作正处在一个关键的历史时期。为了适应我国改革开放和社会主义现代化建设特别是社会主义市场经济体制对高等教育人才培养工作的新要求,为了适应世界科学技术发展的新趋势和新特点,原国家教育委员会组织对普通高等学校本科专业目录进行了第四次全面修订,并于1998年7月由教育部正式颁布实施。修订后的专业目录中,自动化类专业的专业面大大拓宽,相应的专业培养目标、业务培养要求、主干学科、主要课程、主要实践性教学环节等都有了不同程度的变化。要适应新的专业培养目标和教学要求,组织一套新的自动化类专业系列教材就成了当务之急。为此,武汉理工大学出版社在广泛调研的基础上,组织国内近30所大学的近100位教授共同编写了“普通高等学校自动化类专业新编系列教材”。

经过了一轮的教学实践,许多学校的教授提出了一些修改和修订意见,并建议其中的《电路分析》、《电路实验指导书》、《模拟电子技术基础》、《数字电子技术基础》、《电子技术实验》五本书组成“普通高等学校电气信息类专业基础课新编系列教材”,同时组织编写《电磁场与电磁波理论基础》、《信号与系统》等书以充实本套教材。本套教材具有如下特点:

观念新——主动适应教学改革的需要和市场经济对人才培养的要求。

内容新——电气信息技术在近20年来发展巨大,这套教材尽可能反映了这些内容。

体系新——在以前的基础上重构和重组,而非重建。各门课程及内容的组成、顺序、比例更加优化,避免遗漏和不必要的重复。

与国际接轨——电气信息类专业教育要面向世界,面向未来,面向区域经济。在借鉴发达国家高等教育的专业模式和课程设置的同时,适当兼顾当前各地区经济文化发展不平衡的现状。

教学手段现代化——本套教材力求具有网络化、电子化、数字化的特色,大力推进电子讲稿和多媒体课件的出版工作。这也是近五年来我们遇到困惑最多、难度最大的事情。近两年来我们取得了突破性的进展,无论是多媒体教学的理念还是精湛的制作技术,都赢得广泛关注和赞同。

“用信息化改造传统教学,让传统教学现代化”,“让教学中只有重点,没有难点”是我们的工作目标,近百所大学使用过的交互式智能型多媒体课件就是最好的证明。我们将高度重视,兢兢业业,保证质量,恳请选用本套教材的广大师生在使用过程中给我们多提意见和建议,以便我们不断修订、补充、完善全套教材。

21世纪已经到来,知识经济的曙光已经初现。面向新世纪的中国高等教育正在经历前所未有的变革和发展,人文与理工相通,科学与技术相融,教学与研究并重,知识与智慧同尊,以培养社会经济文化发展所需要的复合型人才,这是我国建立知识创新体系的重大挑战和空前机遇。我社愿与各位专家、读者真诚合作,共同努力,为新世纪的中国高等教育事业作出更大的贡献!

武汉理工大学出版社

2009年1月

前　　言

“电磁场与电磁波”是电气信息类本科学生必修的一门重要的专业基础课程，它所涉及的内容是电气信息类本科学生知识结构的必要组成部分。通过该课程的学习，可使学习者在建立场与路的统一认识的基础上，从集总参数电路理论过渡到分布参数的高频电路理论，为学习半导体技术、光电子技术、微波技术、天线理论、光纤通信、移动通信等专业课程或从事电磁工程研究奠定必要的基础。

但是，由严密的数学推证、精确的实验和科学的抽象所构成的电磁场与电磁波理论却实在是一门既难教又难学的课程，它在数学方法和物理概念不断相互交融中所表现出来的轮廓和内涵，常常会令人感到望而生畏，从而使学生难以提高学习兴趣。

为了对改善这种情况有所帮助，我们编写了这本与《电磁场与电磁波理论基础》(刘岚、胡钋、黄秋元、胡耀祖等编写，武汉理工大学出版社 2006 年 9 月出版)配套的教学指导书。希望本书能够帮助教师正确理解和掌握各章的教学基本要求，处理好教学中的重点和难点；也希望本书能够帮助学生正确理解和掌握电磁场与电磁波理论的基本内容，提高分析问题和解决问题的能力。

全书共分 11 章，按照《电磁场与电磁波理论基础》教材的内容和顺序逐章编写，每章均分为以下四个部分：

(1) 基本内容概述

对本章内容作简要归纳，给出重要的公式和结论。

(2) 教学基本要求及重点和难点

根据课程教学大纲，提出本章必须掌握的内容和一般了解的内容，对重点和难点进行简要讨论。

(3) 典型例题分析

详细分析和解答具有代表性的例题，使读者加深对基本理论的掌握，拓宽解题思路，提高解题技巧。

(4) 习题解答

对《电磁场与电磁波理论基础》教材的各章习题进行了解答。

武汉理工大学刘岚、黄秋元、胡耀祖老师和武汉工程大学的程莉老师共同编写了本书，全书由刘岚审核定稿。

本书是在总结了作者们多年从事电磁场与电磁波课程教学的经验，并参阅了近年来国内外的相关教材和参考书的基础上编写的。由于编者的水平和经验有限，书中难免有错误和不妥之处，敬请广大同仁及读者批评指正。

编著者

2008 年 8 月于武汉

目　录

1 矢 量 分 析

本课程所研究的内容是电磁场的基本理论及其宏观变化规律，电磁场是空间分布的一个矢量场，因此有必要首先了解矢量、矢量运算、空间坐标系，以及表述矢量场的散度和旋度、标量场的梯度等基本概念。

1.1 基本内容概述

1.1.1 标量与矢量、标量场与矢量场

分析与研究某个物理现象时，一般都需要用一个或几个物理量来进行描述，而一个物理量随空间、时间或其他量的变化关系，就是这个物理量的函数，简称物理函数。

若所讨论的物理量只需考虑大小就能完整描述它的物理现象或物理概念，则它是一个标量，其函数是标量函数。该标量函数在某一空间区域内确定了该物理量的一个场，该场称为标量场。若所讨论的物理量既需有大小又需有方向才能描述它的物理现象或物理概念，则它是一个矢量，其函数是矢量函数。例如，作用力是一个矢量，同样大小的作用力在不同方向上，作用的效果是不同的。该矢量函数在某一空间区域内确定了该物理量的一个场，称为矢量场。

“场”一般是指某种物理量的空间分布，它是本课程研究的核心。一个场可以用多个不同的物理量进行描述，例如电场可以用电场强度、电位移矢量等不同物理量来描述，在某种情况下还可以用电位来描述，尽管电位场是一个标量场。

矢量场的分析运用了矢量微积分。矢量微积分运算比较复杂，所以在进行矢量微积分运算时，往往需要将其转化为标量微积分的运算。

本课程就是要研究在不同情况下电场和磁场的产生，以及电场和磁场随空间和时间变化的规律。

1.1.2 矢量代数

电磁场是一个矢量场，一般情况下需要使用矢量来描述。在进行矢量场的研究过程中，需要对矢量物理量进行运算，因此必须熟悉矢量的运算规则，即矢量代数的内容。矢量代数包括矢量的加减乘除运算，重点要掌握矢量标积、矢量矢积以及矢量的混合运算。

1.1.3 正交坐标系

电磁场与电磁波理论讨论的是电场与磁场的空间分布和空间变化规律，因此必须使用坐标系来表示电场或磁场等物理量在空间的位置和方向，亦即电磁场的空间分布和空间变化规律的研究必须在一定坐标系下进行。讨论电磁场常用的坐标系有直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系，这三类坐标系均属于正交坐标系。正交坐标系的特点是坐标面两两相互垂直、单位矢量两两相互垂直，且满足右手螺旋法则。每个坐标系均有三个坐标变量，需要熟悉这三类坐

标系的坐标变量的建立，以及空间位置、空间线元、面元和体元的坐标单位矢量的表示和运算方法。注意：首先，在空间的矢量微积分运算中，要涉及线积分、面积分和体积分，其中的线元和面元需要用矢量来表示；其次，在圆柱坐标系和球坐标系中，单位矢量有可能是变量。

1.1.4　场的“三度”：散度、旋度和梯度

场是由源产生的，不同的源将产生不同的场。产生矢量场的源有两种，即通量源和旋涡源，我们分别用散度和旋度描述这两种源产生的矢量场变化规律。矢量场在某种情况下可以使用标量来描述，标量函数描述能够简化分析过程的复杂性，梯度就是在这样的前提下引入的。

(1) 散度

电力线和磁力线统称为矢量线，矢量线可以形象地描述矢量物理量在空间的分布规律。矢量 $\boldsymbol{A}$ 穿过曲面 S 的通量为 $\Phi=\int_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$，它表示矢量 $\boldsymbol{A}$ 穿过曲面 S 的矢量线总数目，因此矢量 $\boldsymbol{A}$ 也叫通量面密度矢量。

通量是一个标量，其正负与面元方向有关。由高斯通量定理可知，对于闭合曲面的通量只表示闭合曲面通量源的大小，不能描述通量源的分布。要确定空间场的分布，不仅要确定源的大小，还要确定源的分布。散度就是确定空间任意一点通量源大小的，它不仅能确定源的大小，也可以确定源的分布。矢量 $\boldsymbol{A}$ 在某点的散度定义为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}$$

它是一个标量，表示从该点散发的通量体密度，即描述了该点的通量源强度。

通量与散度之间的关系由高斯散度定理进行描述，其数学表达式为

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V=\oint_S \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

高斯散度定理的物理意义是：一个矢量函数对一个闭合曲面的通量等于这个矢量函数的散度对这个闭合曲面的体积分，亦即一个闭合曲面内通量源的大小等于通量源产生场的散度对这个闭合曲面的体积分。该定理在矢量场分析中还常用来在面积分与体积分之间进行换算，或者积分与微分的换算。

在直角坐标系下，散度的表达式为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

在圆柱坐标系下，散度的表达式为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

在球坐标系下，散度的表达式为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2A_R)+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

其中，∇ 是一个具有矢量性质的微分算符，叫哈密顿算符，它在不同坐标系下有不同的表达式。

(2) 旋度

矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿闭合曲线 l 的线积分 $\oint_l \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$，称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 沿该曲线的环量。环量是一个数学定义，只有结合具体的物理量才有其物理意义。

由安培环路定理可知，环量只能表示环路内是否有旋涡源。这表明环量可描述旋涡源的大小，却不能描述旋涡源的分布。描述旋涡源的分布需要借助旋度的概念。

矢量 $\boldsymbol{A}$ 在某点的旋度定义为

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{A} = \nabla\times\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\left[\oint_l \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\right]_{\max}}{\Delta S}$$

旋度是一个矢量，其大小和方向是该点最大环量面密度的大小和最大环量密度的方向，它描述了场中一点的旋涡源强度。

环量与旋度之间的关系可由斯托克斯定理描述，其数学表达式为

$$\int_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_l \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

其物理意义是：一个矢量的环量等于该矢量的旋度按照环量所确定的闭合曲线为边界的任意曲面的面积分，即通过一个环路的旋涡源的大小等于该旋涡源所产生场的旋度对以该环路为边界的任意曲面的面积分。

旋度的一个重要恒等式：**任何一个矢量的旋度的散度恒等于零**。用数学公式可表示为

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = 0$$

在直角坐标系下，旋度的表达式为

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\boldsymbol{e}_y\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{e}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

在圆柱坐标系中，旋度的表达式为

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)+\boldsymbol{e}_\varphi\left(\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r}\right)+\boldsymbol{e}_z\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)-\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right]$$

在球坐标系下，旋度的表达式为

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{e}_R}{R\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\varphi)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]+\frac{\boldsymbol{e}_\theta}{R}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_R}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial R}(RA_\varphi)\right]$$
$$+\frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{R}\left[\frac{\partial}{\partial R}(RA_\theta)-\frac{\partial A_R}{\partial\theta}\right]$$

(3) 梯度

标量函数 u 在某点沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的变化率 $\frac{\partial u}{\partial l}$，称为标量场 u 沿该方向的方向导数。方向导数只表示沿某个方向的函数变化率，不能表示标量场中函数最大变化率和最大变化率的方向。

标量场 u 在某点的梯度为

$$\mathrm{grad}u = \nabla u$$

梯度与方向导数的关系为

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \nabla u\cdot\boldsymbol{l}$$

标量场 u 的梯度是一个矢量，它的大小和方向就是该点最大变化率的大小和方向。

梯度的一个重要恒等式：**任意一个标量函数的梯度的旋度恒等于零**。其数学表达式为

$$\mathbf{rot}(\mathrm{grad}u) = \nabla \times \nabla u = 0$$

在标量场 u 中，具有相同 u 值的点构成一等值面。在等值面的法线方向上，u 值变化最快。因此，梯度的方向也就是等值面的法线方向。

在直角坐标系下，梯度的数学表达式为

$$\nabla u = \boldsymbol{e}_x \frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \frac{\partial u}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

在圆柱坐标系下，梯度的数学表达式为

$$\nabla u = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial u}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial u}{\partial z}$$

在球坐标系下，梯度的数学表达式为

$$\nabla u = \boldsymbol{e}_R \frac{\partial u}{\partial R} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{R\sin\theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

1.1.5　哈密顿微分算子∇

哈密顿微分算子∇是一个兼有矢量和微分运算作用的矢量运算符号。∇u 可看做矢量与标量相乘，$\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ 可看做两个矢量的标量积，$\nabla \times \boldsymbol{A}$ 可看做两个矢量的矢量积。计算时，先按矢量运算法则展开，然后再做微分运算。

在直角坐标系中，∇算子可表示为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

在圆柱坐标系中，∇算子可表示为

$$\nabla = \boldsymbol{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \boldsymbol{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

在球面坐标系中，∇算子可表示为

$$\nabla = \boldsymbol{e}_R \frac{\partial}{\partial R} + \boldsymbol{e}_\theta \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}_\varphi \frac{1}{R\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

本课程中还有一个算符∇^2，这是拉普拉斯算符，并且$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$。

1.1.6　亥姆霍兹定理

亥姆霍兹定理总结了矢量场共同的性质：矢量场可由矢量场的散度和旋度唯一地确定；矢量场的散度和旋度各对应矢量场中的一种源。

分析矢量场时，由亥姆霍兹定理可知，应从研究场的散度和旋度入手。旋度方程和散度方程构成了矢量场的基本方程。

1.2　教学基本要求及重点和难点

1.2.1　教学基本要求

(1) 理解矢量与标量的定义，矢量场与标量场的概念，掌握矢量的代数运算关系。

(2) 应熟练掌握直角坐标系、圆柱坐标系和球面坐标系这三个最常用的正交坐标系，以及

三种坐标系中单位矢量之间的关系。

(3) 深刻理解矢量函数的通量与散度、环量与旋度、标量函数的方向导数与梯度等基本概念，掌握散度、旋度和梯度的物理意义、相关计算公式和方法。

(4) 掌握高斯散度定理和斯托克斯定理的定义，了解其应用。

(5) 理解亥姆霍兹定理及其重要的意义。

1.2.2 重点与难点

本章重点：

(1) 矢量运算：矢量的标积和矢积，矢量的混合运算，以及结合∇的矢量运算。

(2) 坐标系的建立：三个正交坐标系的坐标变量的定义，以及不同坐标系下线元和面元的表达式；单位矢量的变换。

(3) 场的“三度”：三度的定义和物理意义；三度所面对和要解决的问题；三度的表达式及其物理意义。

(4) 哈密顿微分算子∇的理解是本课程的重点之一。∇的点乘与∇的叉乘分别是散度和旋度，事实上就是二者组成了电磁场的基本方程。

(5) 亥姆霍兹定理的物理意义。

本章难点：

(1) 矢量的通量与散度、矢量的环流与旋度、标量的梯度等概念的理解和计算

掌握矢量的通量与散度、矢量的环流与旋度、标量的梯度等概念的物理意义的理解及其运算规律。电磁场是空间分布的矢量场，场是由源产生的。散度和旋度分别用来确定电磁场的两种源的空间分布。由亥姆霍兹定理可知，当源的空间分布确定，场的性质和变化规律就都可确定。其中旋度是三度中最不容易理解的，可借助流体力学的概念加以理解。

(2) 两个重要定理及两个恒等式的理解

高斯散度定理和斯托克斯定理是典型的微积分表达式，而且是矢量微积分，其物理意义的理解要结合散度和旋度的概念以及微积分的概念。

两个恒等式是散度和旋度的性质，也是后面定义矢量位和标量位的理论依据。

(3) 亥姆霍兹定理的认识与理解

要研究电磁场的规律，就是要分别确定电场和磁场的散度和旋度，亦即分别确定电场和磁场的散度和旋度方程。散度和旋度确定了，场中任意一点的通量源和旋涡源的大小与位置确定了，场的分布和变化规律就确定了。

1.3 典型例题分析

【例 1.1】 给定三个矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 如下

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z$$
$$\boldsymbol{B}=-4\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z$$
$$\boldsymbol{C}=5\boldsymbol{e}_x-2\boldsymbol{e}_z$$

求：(1) 矢量 $\boldsymbol{A}$ 的单位矢量 $\boldsymbol{a}_A$；(2) $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$；(3) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$；(4) θ_{AB}；(5) $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量；(6) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$；(7) $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$和$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$；(8) $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$。

分析:本题主要训练在直角坐标系中的矢量运算问题。

【解】 (1) $\boldsymbol{a}_A=\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=\dfrac{\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}\boldsymbol{e}_x+\dfrac{2}{\sqrt{14}}\boldsymbol{e}_y-\dfrac{3}{\sqrt{14}}\boldsymbol{e}_z$

(2) $|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=|(\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z)-(-4\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)|=|\boldsymbol{e}_x+6\boldsymbol{e}_y-4\boldsymbol{e}_z|=\sqrt{53}$

(3) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z)\cdot(-4\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)=-11$

(4) 由 $\cos\theta_{AB}=\dfrac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|}=\dfrac{-11}{\sqrt{14}\times\sqrt{17}}=-\dfrac{11}{\sqrt{238}}$,得

$$\theta_{AB}=\arccos\left(-\frac{11}{\sqrt{238}}\right)=135.5^\circ$$

(5) $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量

$$A_B=|\boldsymbol{A}|\cos\theta_{AB}=\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|}=-\frac{11}{\sqrt{17}}$$

(6)

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 1 & 2 & -3\\ 5 & 0 & -2\end{vmatrix}=-4\boldsymbol{e}_x-13\boldsymbol{e}_y-10\boldsymbol{e}_z$$

(7) 由于

$$\boldsymbol{B}\times H=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 0 & -4 & 1\\ 5 & 0 & -2\end{vmatrix}=8\boldsymbol{e}_x+5\boldsymbol{e}_y+20\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 1 & 2 & -3\\ 0 & -4 & 1\end{vmatrix}=-10\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y-4\boldsymbol{e}_z$$

所以　$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z)\cdot(8\boldsymbol{e}_x+5\boldsymbol{e}_y+20\boldsymbol{e}_z)=-42$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 2 & 3 & -4\\ -6 & -4 & 1\end{vmatrix}=-13\boldsymbol{e}_x+22\boldsymbol{e}_y+10\boldsymbol{e}_z$$

(8)

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 1 & 2 & -3\\ 8 & 5 & 20\end{vmatrix}=55\boldsymbol{e}_x-44\boldsymbol{e}_y-11\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 1 & 2 & -3\\ 8 & 5 & 20\end{vmatrix}=55\boldsymbol{e}_x-44\boldsymbol{e}_y-11\boldsymbol{e}_z$$

【例 1.2】 在圆柱坐标系中,一点的位置由$(4,\frac{2\pi}{3},3)$定出。求:(1) 该点在直角坐标中的坐标;(2) 该点在球坐标中的坐标。

分析:本题主要涉及不同坐标系之间的变换问题。

【解】 (1) 在直角坐标中

$$x = 4\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -2,\quad y = 4\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3},\quad z = 3$$

故该点的直角坐标为$(-2,2\sqrt{3},3)$。

(2) 在球坐标中

$$r = \sqrt{4^2+3^2} = 5,\quad \theta = \arctan(4/3) = 53.1^\circ,\quad \varphi = 2\pi/3 = 120^\circ$$

故该点的球坐标为$(5,53.1^\circ,120^\circ)$。

【例 1.3】 求:(1) 矢量$\boldsymbol{A} = x^2\boldsymbol{e}_x + x^2y^2\boldsymbol{e}_y + 24x^2y^2z^3\boldsymbol{e}_z$的散度;(2) $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$对中心在原点的一个单位立方体的积分;(3) $\boldsymbol{A}$对此立方体表面的积分,验证散度定理。

分析:本题在直角坐标系中验证散度定理$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V = \oint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$,需要进行体积分和面积分计算以及矢量散度计算。

【解】 (1) $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \dfrac{\partial(x^2)}{\partial x} + \dfrac{\partial(x^2y^2)}{\partial y} + \dfrac{\partial(24x^2y^2z^3)}{\partial z} = 2x + 2x^2y + 72x^2y^2z^2$

(2) 对中心在原点的一个单位立方体的积分为

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V = \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}(2x + 2x^2y + 72x^2y^2z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{24}$$

(3) 对此立方体表面的积分

$$\begin{aligned}\oint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} &= \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &\quad + \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 2x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z - \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 2x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z \\ &\quad + \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 24x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\left(-\frac{1}{2}\right)^3 24x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{24}\end{aligned}$$

故有

$$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V = \frac{1}{24} = \oint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

【例 1.4】 求矢量$\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{e}_x + x^2\boldsymbol{e}_y + y^2z\boldsymbol{e}_z$沿平面上的一个边长为 2 的正方形回路的线积分,此正方形的两边分别与x轴和y轴相重合。再求$\nabla\times\boldsymbol{A}$对此回路所包围的表面积分,验证斯托克斯定理。

分析:本题在直角坐标系中验证斯托克斯定理$\oint_l \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$,需要进行线积分和面积分计算以及矢量旋度计算。

【解】

$$\oint_l \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_0^2 x\mathrm{d}x - \int_0^2 x\mathrm{d}x + \int_0^2 2^2\mathrm{d}y - \int_0^2 0\mathrm{d}y = 8$$

又

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & x^2 & y^2z\end{vmatrix} = 2yz\boldsymbol{e}_x + 2x\boldsymbol{e}_z$$