

近代物理实验

- 华中师范大学物理系
近代物理实验教研室编
- 华中师范大学出版社

近代物理实验

华中师范大学物理系
近代物理实验教研室编

华中师范大学出版社

内 容 提 要

本书是以1980年部颁高师教学大纲为依据，结合本校多年的教学实践，经多次修改编写而成。全书共分为七个部分：光谱技术、原子及原子核实验、X光技术、真空技术、微波磁共振、低温实验、声学，共35个实验，每个实验，有明确的目的要求、实验原理，并作简要叙述，实验内容具体，还附有思考题，以利于对实验基本内容和方法的掌握。书中对实验数据及处理，鉴于已有普通物理实验基础，只作归纳性的阐述。

本书可作高等师范院校的近代物理实验教材，也可作为综合性大学，工院校或其它有关学校近代物理实验教学参考书。

近 代 物 理 实 验

华中师范大学物理系

近代物理实验教研室编

※

华中师范大学出版社出版

(武昌桂子山)

新华书店湖北发行所发行

汉阳县印刷厂印刷

※

开本 787×1092 1/16 印张 15.75 字数400千字

1988年4月第1版 1988年4月第1次印刷

ISBN 7-5622-0133-1/0·16

印数：1—4 500 定价：3.30元

前 言

物理学是一门实验性很强的学科。因此，物理实验在物理系的教学大纲中占有重要的地位。近代物理实验是继普通物理实验、电子线路之后的较为综合的课程，它着重对学生进行物理思想、实验方法的培养和训练。通过近代物理实验课的学习，有助于学生了解物理学的发展，掌握物理完整的知识内容；另一方面，这些知识内容，为学生进一步从事专门学科和开展科学研究提供了必备的方法和手段。

本书是以1980年部颁高师教学大纲为依据，结合我校多年教学实践的具体情况，经过多次修改编写而成。全书分为七个部分，共35个实验。每个实验从内容到方法都是在我校的教学中得到了充分实施，具有较大范围的适用性和可靠性。本书的出版，旨在总结我们前一段工作，满足教学需要，并希望和兄弟院校进行交流，起到抛砖引玉的作用。

参加本书编写的同志按其内容顺序排列。实验误差及数据处理、原子物理和微波磁共振部分，由王国茂副教授编写；光谱技术部分由李来政副教授编写完稿；X光技术和真空技术部分由刘万华副教授编写；低温实验部分由方治元讲师编写；核物理及声学部分由祁守仁副教授编写整理；锁相放大器由漆启年老师编写。祁守仁副教授担任本书主编。在统稿工作中得到了王国茂副教授的协助。

我校的近代物理实验，从实验室的建设到本书的出版，一直得到校、系领导的关怀与具体指导。邓宗琦副校长多次亲临实验室、并给予多方面的关心和具体帮助。在实验室的筹建过程中，龙传安教授亲自领导，确立方案，为实验室的建成付出了艰苦的劳动。在我室工作过的许多同志都为实验室的建设作了贡献，特别是现已调离我校去南京大学工作的叶式公讲师，在声学实验室的建设和讲义的编写方面作出了贡献。本书的插图绘制均由余汉香同志完成，在此一并致谢。

由于我们条件和水平有限，难免有遗漏、错误和不妥之处，恳请广大读者指正。

编 者

1987年11月

目 录

实验误差及数据处理	(1)
§ 1 随机变量遵从的几种分布	(1)
§ 2 曲线拟合中的最小二乘法	(8)
第一部分 光谱技术	(13)
实验一 氢与氘原子光谱	(13)
实验二 钠原子光谱	(17)
实验三 双原子分子光谱	(22)
实验四 激光喇曼光谱	(29)
实验五 光谱分析	(33)
实验六 塞曼效应	(41)
实验七 光电倍增管特性的测量	(48)
实验八 晶体的电光调制	(55)
实验九 全息照相	(60)
附录 I 全息底片溶液的配制	(65)
附录 II 摄谱仪	(66)
附录 III 光谱观测仪	(74)
附录 IV 法布里-珀罗(F-P)标准具	(77)
第二部分 原子与原子核实验	(79)
实验一 夫兰克-赫兹(F-H)实验	(79)
实验二 密立根油滴实验	(83)
实验三 盖革-弥勒(G-M)计数管特性及放射性衰变的统计规律的测量	(87)
实验四 γ 闪烁能谱测量	(93)
实验五 β 吸收	(99)
实验六 用符合法测量放射源的绝对活度	(103)
实验七 穆斯堡尔效应	(108)
实验八 锁相放大器——相干检测特性研究	(114)
附 录 教学中子实验仪使用说明书	(118)
第三部分 X光技术及电子衍射	(121)
基础知识	(121)
§ 1 X射线物理学	(121)
§ 2 晶体学的基本知识	(125)
实验一 多晶体分析——德拜法	(128)
实验二 单晶体分析——劳厄照相法	(135)
实验三 电子衍射	(145)

第四部分 真空技术	(149)
基础知识	(149)
§ 1 真空度的单位及真空区域的划分	(149)
§ 2 真空泵	(150)
§ 3 真空的测量	(152)
§ 4 真空系统	(153)
§ 5 真空检漏	(154)
实验一 真空镀膜	(155)
实验二 氦氛激光器的排气、充气特性研究	(158)
实验三 气体放电中等离子区的研究	(162)
第五部分 磁共振技术	(168)
基础知识	(168)
§ 1 磁共振现象	(168)
§ 2 磁共振现象的经典定性解释	(169)
§ 3 磁共振的宏观理论——布洛赫公式	(170)
实验一 核磁共振	(173)
实验二 电子自旋共振	(177)
实验三 铁磁共振	(184)
实验四 光泵磁共振	(188)
实验五 微波实验	(197)
第六部分 低温实验	(209)
实验一 低温温度计定标和分度	(209)
实验二 低温下固体热导率的测量	(214)
实验三 半导体变温霍尔系数及电导率测量	(218)
实验四 用电阻法测超导材料的临界温度	(226)
第七部分 声学	(230)
基础知识	(230)
实验一 噪声的频谱分析	(232)
实验二 超声探伤	(237)
实验三 用超声驻波干涉法测量液体的比热比 C_p/C_v	(242)

实验误差及数据处理

科学实验测量的任务是定量地测试有关自然现象反映的各种物理量，并通过对测量值的数学处理得到最接近真实值的待测量（平均值），再通过分析得到各物理量之间的定量关系，从而加深人们对客观世界的认识和了解。实验数据的数学处理是实验测量的必不可少的重要组成部分。指导数据处理的理论称为误差理论，现扼要介绍如下。

§1 随机变量遵从的几种分布

一、概率密度函数

1. 随机样本：

物理实验中，由于测量的随机（偶然）误差及物理现象本身的随机性，即使应用相同的仪器、仪表，在相同实验条件下对某一物理量进行 n 次重复测量时，每次测量结果，其测量值 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 不会完全相同，而具有随机性。这些随机数 x_1, x_2, \dots, x_n 的集合 $\{x_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$)，组成容量为 n 的随机样本（以下简称样本），它对应于随机变量 x 的一切可能取值。相同条件下测量的随机样本 $\{x_i\}$ 常称为等精度测量列。

随机变量又分为离散型随机变量，即随机变量仅取有限个可能值；而连续型随机变量在取值区间内具有无限个连续变化的可能取值。

从样本可求出平均值 \bar{x} 、样本标准偏差 S_x 和平均值的标准偏差 $S_{\bar{x}}$ ：

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$S_x = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$S_{\bar{x}} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

2. 随机变量的概率密度函数

对于随机变量 x 不仅要了解它的全部可能取值，而且要知道各个可能值 x_i 在样本中出现的概率 $P(x_i) = m(x_i)/n$ ($m(x_i)$ 表示 x_i 出现的次数， $m(x_i)/n$ 实为频率，当 $n \rightarrow \infty$ 时，频率趋近于某一稳定值，即概率，为方便起见，以下只用概率一词。)以及 $P(x_i)$ 随 x_i 变化的规律性——即概率分布。

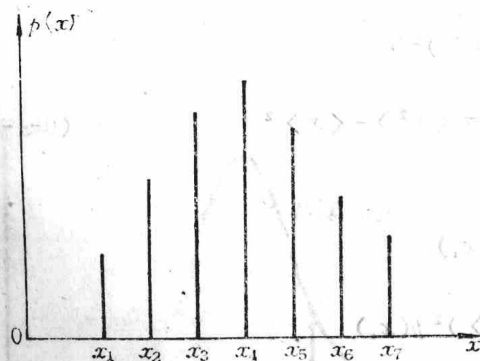


图 0-1-1 离散型随机变量的概率分布

很显然，各个取值 x_1, x_2, \dots 的概率之和应等于1，即

$$\sum_{x_i} P(x_i) = 1 \quad (0-1-1)$$

随机变量 x 为连续型时,常将样本 $\{x_i\}$ 中的随机数 x_i 从小到大排列,取 dx 为微小统计区间,统计样本随机数 x_i 落在区间 $(x_i, x_i + dx)$ 内概率 $p(x_i)$ 。当 $dx \rightarrow 0$ 时,概率分布呈连续变化的光滑曲线,则 $p(x_i)$ 可写为

$$p(x_i) = \int_{x_i}^{x_i + dx} p(x) dx \quad (0-1-2)$$

其中 $p(x)$ 称为概率密度函数。同时有

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1 \quad (0-1-3)$$

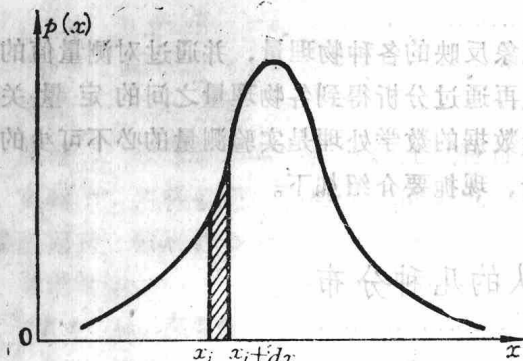


图 0-2-2 连续型随机变量的概率分布

式(0-1-1)和(0-1-3)叫做归一化条件。在以后讨论的任何概率(密度)函数都必须满足归一化条件。随机变量 x 遵从某一概率(密度)函数

$p(x)$, 简言之 x 服从 $p(x)$ 分布。

3. 期待值及概率积分

(1) 期待值

要确定一个随机变量 x 的概率函数 $p(x)$ 的具体数学形式,必须给出式中各个参数(又叫分布参数)的数值,而后者又往往是实验物理工作中需要研究的物理量。虽然 $p(x)$ 的函数形式各异,但参数的求法可按共同定义的特征数字来表征,如随机变量 x 的期待值 $\langle x \rangle$ 的定义:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx \quad (0-1-4)$$

$\langle x \rangle$ 是概率密度曲线重心的位置,是样本的平均值 \bar{x} ,样本 $\{x_i\}$ 中的随机数围绕着它摆动,对于单峰对称的概率密度分布曲线, $\langle x \rangle$ 为曲线峰值的位置。

常用的期待值是随机变量 x 的 n 阶矩 $\langle x^n \rangle$ 和方差 $V_r(x)$,它们的定义分别为

$$\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx \quad (0-1-5)$$

$$V_r(x) = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 p(x) dx = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (0-1-6)$$

对应于离散型分布,式(0-1-5)及(0-1-6)为

$$\langle x^n \rangle = \sum_{x_i} x_i^n p(x_i)$$

$$V_r(x) = \sum_{x_i} (x_i - \langle x \rangle)^2 p(x_i)$$

若已知随机变量 x 的函数 y (亦为随机变量)取 $y = f(x)$ 时,则有

$$p(y) dy = p(x) dx \quad (0-1-7)$$

上式表明, 当 x 值落入区间 $(x, x+dx)$ 内的概率 $p(x)dx$ 应等于 y 值落入相应区间 $(y, y+dy)$ 内的概率。那末, y 的期待值及 n 阶矩可写为

$$\langle y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y p(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p(x) dx \quad (0-1-8)$$

$$\langle y^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} y^n p(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x)]^n p(x) dx \quad (0-1-9)$$

因此, 求 $\langle y \rangle$ 及 $\langle y^n \rangle$, 不需导出 y 的具体遵从某一分布的函数式, 而直接利用 x 的分布求出 y 的方差 $V_{a.r.}(y) = \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2$ 。

当随机变量 y 为两个或两个以上随机变量的函数时, 即 $y = f(x_1, x_2, \dots)$ (x_1, x_2, \dots 此时为随机变量, 它们服从各自的分布 $p(x_1), p(x_2), \dots$), y 的 n 阶矩为

$$\langle y^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int [f(x_1, x_2, \dots)]^n p(x_1, x_2, \dots) dx_1 dx_2 \dots$$

式中 $p(x_1, x_2, \dots)$ 称联合概率密度函数。为计算 y 的方差 $V_{a.r.}(y)$ 还需考虑实验中任意两个随机变量 x_i, x_j 之间的联系, 为此引入表征 x_i 与 x_j 相关程度的物理量——协方差 $\text{Cov}(x_i, x_j)$ 和相关系数 $\rho(x_i, x_j)$, 其定义为

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x_i, x_j) &= \langle (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) p(x_1, x_2, \dots) dx_1 dx_2 \dots \end{aligned} \quad (0-1-10)$$

$$\rho(x_i, x_j) = \frac{\text{Cov}(x_i, x_j)}{\sigma(x_i)\sigma(x_j)} \quad (0-1-11)$$

显然, x_i 与 x_j 不相关时, $\text{Cov}(x_i, x_j) = 0$, $\rho(x_i, x_j) = 0$ 。那末, 对于同一随机变量 x_i , $\text{Cov}(x_i, x_j) = \sigma^2(x_i) = \text{Var}(x_i)$, $\rho(x_i, x_j) = 1$ 。由 x_i 与 x_j 的相关程度不同, $\rho(x_i, x_j)$ 的取值范围为 $-1 \leq \rho(x_i, x_j) \leq 1$ 。

(2) 概率积分

若随机变量 x 的分布已知, 概率积分定义为:

$$P(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx \quad (0-1-12)$$

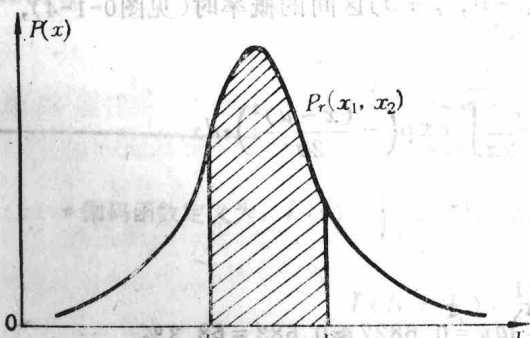


图 0-1-3 概率积分示意图

公式表示样本 $\{x_i\}$ 中随机变量 x 落入 $[x_1, x_2]$ 区间的概率大小, 如图0-1-3中斜线所示的部分。人们对于不同的分布 $p(x)$, 应用一般定积分的近似计算方法, 计算出不同区间 $[x_1, x_2]$ 内概率 $P(x_1, x_2)$ 的数值大小, 并制成各种分布的“数理统计表”供人们使用(见参考书目[4])。

二、常用的几个分布

1. 正态分布——高斯分布

它是最常用的连续型随机变量遵从的分布形式。大量实践证明，只要随机变量 x 受到大量相互独立的微小的随机因素的影响， n 次重复测量的随机样本 $\{x_i\}$ 容量 n 很大时，样本（或者说随机变量 x ）一般服从正态分布，分布曲线为单峰、对称型，如图0-1-4所示。概率密度函数 $p(x)$ 的数学形式为：

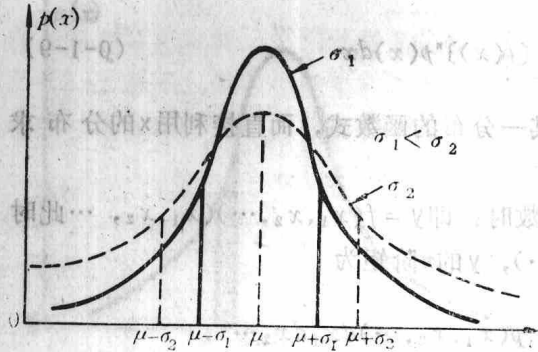


图 0-1-4 正态分布曲线

$$p(x) = n(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (0-1-13)$$

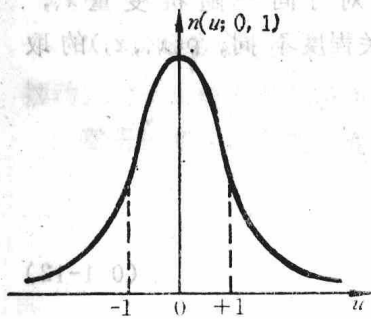
式中 $1/\sqrt{2\pi}$ 为归一化因子， μ ， σ 为分布参数，其中 $\sigma < 1$ ， $(\mu - \sigma)$ 及 $(\mu + \sigma)$ 为分布曲线的拐点； μ 是随机变量 x 的期待值 $\langle x \rangle$ ，是分布曲线峰值的位置。

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x n(x; \mu, \sigma^2) dx = \mu$$

$$\sigma^2(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 n(x; \mu, \sigma^2) dx - \mu^2 = \sigma^2 + \mu^2 = \sigma^2$$

可见， σ 为样本 $\{x_i\}$ 的标准误差，即用 σ 来表征样本 $\{x_i\}$ 的离散性程度， σ 越小离散程度越低，曲线峰值愈大； σ 较大时， $\{x_i\}$ 中随机数的离散程度大，曲线峰值则小（图0-1-4中的虚线所示）。

当应用(0-1-12)式计算服从正态分布 $n(x; \mu, \sigma^2)$ 的随机变量 x 落入 (x_1, x_2) 区间的概率大小时，引用新的变量 $u = (x - \mu)/\sigma$ （数理统计中的 u 又称为统计量），可证明 u 服从 $\mu = 0$ ， $\sigma = 1$ 的正态分布 $n(u; 0, 1)$ ，后者称为标准正态分布，其数学形式为



$$n(u; 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \quad (0-1-14)$$

其分布曲线为峰值在 $u = 0$ 处的对称曲线，如图0-1-5所示，拐点为 $\sigma = \pm 1$ 。利用标准正态分布的概率积分可写为

$$P(-u_s, +u_s) = \int_{-u_s}^{+u_s} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \quad (0-1-15)$$

图 0-1-5 标准正态分布曲线

例如计算 x 落入 $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ 区间的概率时（见图0-1-4），

$$P(\mu - \sigma, \mu + \sigma) = \int_{\mu - \sigma}^{\mu + \sigma} n(x; \mu, \sigma^2) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mu - \sigma}^{\mu + \sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot dx$$

令 $u = \frac{x - \mu}{\sigma}$ ，则 $du = \frac{dx}{\sigma}$ ； $x = \mu \pm \sigma$ 时 $u = \pm 1$

$$P(\mu - \sigma, \mu + \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{+1} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = 0.6827 \approx 0.683 = 68.3\%$$

式中结果值0.683, 是查标准正态分布的概率积分表0.8413-(1-0.8413)≈0.683所得。

同理可求得:

$$p(\mu - 1.654\sigma, \mu + 1.654\sigma) = 0.90 = 90\%$$

$$p(\mu - 1.96\sigma, \mu + 1.96\sigma) = 0.95 = 95\%$$

$$p(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma) = 0.9973 = 99.73\%$$

(1) 无论从实践或者从理论分析, 当样本容量 n 为无限大或其他极限情况时, 样本则服从或渐近服从正态分布。而且样本的平均值 $\bar{x} = \sum x_i/n$ (亦为统计量, 属随机变量)总是服从或渐近正态分布 $n(\bar{x}; \mu, \sigma^2/n)$, 括号内的 n 为样本容量。所以正态分布被认为是误差理论中最基本的分布。

(2) $P(\mu - \sigma, \mu + \sigma) = 0.683$ 告诉我们, 服从正态分布的随机变量 x 取值有68.3%的可能性落入期待值之右左一倍标准误差范围内; 或者说, 此时样本 $\{x_i\}$ 中有68.3%个 x_i 落入用 $\mu \pm \sigma$ 所代表区间内, 68.3%常称为置信水平。

对于平均值 \bar{x} , 也可写出 $P = \left(\mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 68.3\%$ 。此时说明, 样本平均值比样本中任一值 x_i 的可靠性程度大(因为 $\sigma(\bar{x}) = \sigma/\sqrt{n} < \sigma(x)$), 更靠近期待值 μ 。所以常用下式表示测量的最后结果

$$\mu = \bar{x} \pm \sigma(\bar{x}) \quad (P = 68.3\%) \quad (0-1-16)$$

上式的物理意义是期待值以68.3%的概率落入 $[\bar{x} - \sigma(\bar{x}), \bar{x} + \sigma(\bar{x})]$ 区间, 或者说, 期待值 μ 以31.7%概率落在上述区间之外。而不能说 μ 就在 $x \pm \sigma(x)$ 区间内。

2. t 分布——学生分布

当样本容量 n 较小(测量次数有限)时, 很难断言样本服从正态分布, 同时在不知期待值及标准误差的条件下, 用 \bar{x} 代替 μ , 以 S_x 代替 σ , 引入新的随机变量(即统计量) t , 令 $t = (x - \bar{x})/S_x$, 从理论上可推得它服从自由度 $\nu = n - 1$ 的 t 分布 $p(t; \nu)$, 是一条峰值低于正态分布的对称型曲线, 见图0-1-6。而概率密度函数为

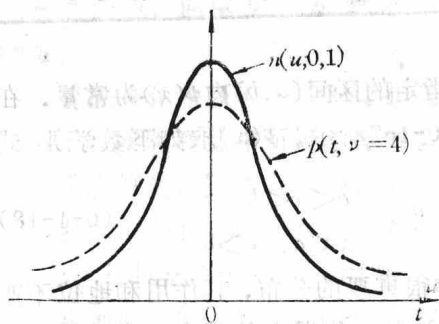


图 0-1-6 t 分布曲线与正态分布曲线比较图

$$p(t; \nu) = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\frac{\nu}{\nu+t^2}\right)^{\frac{\nu+1}{2}} \quad (0-1-17)$$

因而有

$$\langle t \rangle = 0$$

$$\sigma^2(t) = \frac{\nu}{\nu-2} \quad \text{要求 } \nu > 2$$

• 伽码函数定义为: $\Gamma(r) = \int_0^{\infty} x^{r-1} e^{-x} dx$, 当 N 为正整数时

$$\Gamma\left(N + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2N-1)}{2^N} \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(N+1) = N!, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$$

随着样本容量 n 的增大, $p(t; \nu)$ 渐近地趋向标准正态分布 $n(u; 0, 1)$, 即 $t = (x - \bar{x})/S_x \rightarrow (x - \mu)/\sigma(x) = u$. $\langle t \rangle = 0$; $\sigma^2(t) = \frac{\nu}{\nu - 2} \rightarrow 1$

t 分布在误差理论中占有一定的地位, 数据处理时经常被引用。例如, 在报导小样本的数据处理结果时, 不能简单地应用(0-1-16)式。由图0-1-6不难看出, 在同样的置信水平68.3%条件下, 因 t 分布峰值较正态分布低, 所取相应区间的 $|t_c|$ 值是大于1的数值, 因而, 有 $x - \bar{x} = t_c S_x$, 则小样本的测量结果应报导为

$$\text{测量结果} = \bar{x} \pm t_c S_x \quad (P = 68.3\%)$$

式中 t_c 与自由度 $\nu = n - 1$ 有关, 由下式查表求出

$$0.683 = \int_{-t_c}^{t_c} p(t; \nu) dt$$

由 t 分布的专用概率积分数值表, 可得到不同 ν 值时的 t_c

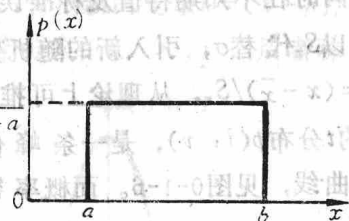
$P = 0.683$ 的 t 值与自由度 ν 的对照表

表 0-1-1

ν	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	30	40
$t_{0.683}$	1.20	1.14	1.11	1.09	1.08	1.07	1.06	1.05	1.04	1.03	1.02	1.01

3. 均匀分布

它是随机变量 x 服从的一种最简单的连续型分布。在指定的区间 $[a, b]$ 内 $p(x)$ 为常量, 在 $[a, b]$ 外 $p(x)$ 为零。如图0-1-7所示。 $p(x)$ 取如下数学形式



$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & x < a, x > b \end{cases} \quad (0-1-18)$$

它是电子测量中一种很重要的分布, 其作用和地位不亚于正态分布。数字仪表的读数、仪器中的刻度盘或其他传动齿轮回差的影响而读得观测值, 都属于均匀分布。均匀分布

的期待值 $\langle x \rangle$ 和方差 $\sigma^2(x)$ 分别为

$$\langle x \rangle = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2(x) = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \frac{1}{12}(b-a)^2$$

4. 泊松分布

它是一种离散型分布, 随机变量 k 取正整数(含零), 例如核物理实验中, 放射源在单位时间内衰变的数目和探测器在时间 Δt 内探测到的脉冲数目均服从泊松分布 $p(k; m)$

$$p(k; m) = \frac{m^k}{k!} e^{-m} \quad (0-1-19)$$

式中 m 为分布参数, 等于样本平均值, 即 k 的期待值, 而方差 $\sigma^2(k)$ 也等于 m 。

$$\langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} k p(k; m) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m^k}{(k-1)!} e^{-m} = m e^{-m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m^{k-1}}{(k-1)!} = m$$

$$\sigma^2(k) = \sum_{k=0}^{\infty} (k - \langle k \rangle)^2 p(k; m) = m^2 + m - m^2 = m$$

相对误差

$$E = \frac{\sigma(k)}{\langle k \rangle} = \frac{1}{\sqrt{m}} \quad (0-1-20)$$

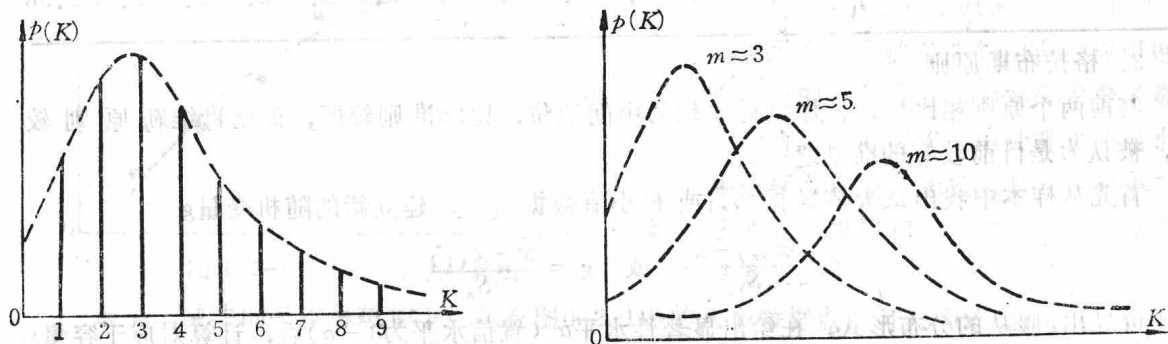


图 0-1-8 泊松分布

核物理实验时，为保证相对误差 $E = 1 \sim 5\%$ 的要求，在大多数情况下只是作长时间的单次测量，并将测得计数 k 看成为平均值 m 。例如，要求 $E = 1\%$ 时，则由 $E = 1/\sqrt{m}$ 可知， k 应为 10000，若单位时间内（每秒）计数 n 较低时，为测 $k = 10000$ 计数则需较长的时间。

图 0-1-8 上图所示 $m \approx 3$ 的直方图和连续化后的曲线图，当 m 逐渐大时，非对称型的单峰泊松分布曲线，向单峰、对称型的正态分布曲线过渡。当 $m \rightarrow 10$ 时，泊松分布已趋向于正态分布。

误差理论中还有一些对数据处理很有用的分布形式，可根据需要查阅有关书籍。

三、实验测量中可疑数据的取舍原则

实验测得的随机样本 $\{x_i\}$ 中，难免因实验者的疏忽大意或实验条件突变而记录的偏离期待值甚大的数据，按常理这些数据应当弃而不用，这就是可疑数据取舍原则讨论的问题。

1. 拉依达准则—— 3σ 准则

由前面已知，服从正态分布的样本 $\{x_i\}$ 中，每个 x_i 值以 99.7% 的置信水平落入 $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ 区间，即是说容量为 n 的样本 $\{x_i\}$ 中应当有 99.7% 的测量值的误差小于 3σ ，只可能有 0.3% 数据的误差大于 3σ 。而由于实际测量的样本的容量 n 一般为 50—100，那末，该样本中不应当存在其误差大于 3σ 的数据，否则该数据为可疑数据，在数据处理过程中求待测量平均值时，应将它弃之不用。这就是 3σ 准则的基本思想。

方法是：首先求出样本平均值 \bar{x} ，计算样本的标准偏差 S_x ，继而检查样本中是否有误差（偏差）大于 $3S_x$ 的数据，若有则舍弃不用，再对剩余的样本求 \bar{x} 及 S_x ，重复上述过程，直至样本的数据均在 $(\bar{x} - 3S_x, \bar{x} + 3S_x)$ 之内为止。

3σ 准则只对大样本 ($n \geq 20$) 才适用，而且与容量 n 大小无关，这使它具有较大的局限性。

2. 肖维勒原则

该原则仍以正态分布为依据，但提出的置信水平与样本容量 n 有关，定为 $1 - 1/2n = P(\mu - \omega_n S_x, \mu + \omega_n S_x)$ ，再利用概率积分公式找出对应于 $(1 - 1/2n)$ 的系数 ω_n ，见表 0-2。如果样本中某一数据 x_i 满足下式时，则 x_i 予以舍弃。

$$|x_i - \bar{x}| > \omega_n S_x \quad (0-1-20)$$

系数 ω_n 与测量次数 n 对照表

表 0-1-2

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	20	30	50
ω_n	1.38	1.53	1.65	1.73	1.80	1.86	1.92	1.96	2.00	2.03	2.07	2.10	2.15	2.24	2.39	2.58

3. 格拉布斯原则

与前两个原则相比较, 该原则处于较为中间地位, 比 3σ 准则较严, 而比肖维勒原则较宽, 被认为是目前较好的准则之一。

首先从样本中找出最大值数据 $x_{(n)}$ 或最小值数据 $x_{(1)}$, 建立新的随机变量 g

$$g = \frac{x_{(n)} - \bar{x}}{S_x} \quad \text{或} \quad g = \frac{\bar{x} - x_{(1)}}{S_x}$$

可导出 g 服从的分布形式, 在给出显著性水平 α (置信水平为 $1-\alpha$)后, 计算对应于容量 n 和 α 条件下的 $g_0(n, \alpha)$ (称临界值), 结果见表0-1-3, 若出现

$$|x_i - \bar{x}| > g_0(n, \alpha) \cdot S_x$$

则认为 x_i 是可疑数据而舍弃。

临界值 $g_0(n, \alpha)$ 与 α, n 的关系表

表 0-1-3

g_0 n	α		g_0 n	α		g_0 n	α	
	0.05	0.01		0.05	0.01		0.05	0.01
3	1.15	1.15	10	2.16	2.41	17	2.47	2.79
4	1.46	1.49	11	2.23	2.48	18	2.50	2.82
5	1.67	1.75	12	2.29	2.55	19	2.53	2.85
6	1.82	1.94	13	2.33	2.61	20	2.56	2.88
7	1.94	2.11	14	2.37	2.66	25	2.66	3.01
8	2.03	2.22	15	2.41	2.71	30	2.75	3.10
9	2.11	3.32	16	2.44	2.75	50	2.96	3.34

§ 2 曲线拟合中的最小二乘法

物理实验中常遇到两个随机变量 x, y 之间存在函数关系, 函数关系形式为已知, 其理论曲线公式为

$$y = f(x; c_1, c_2, \dots, c_m) \quad (0-2-1)$$

式中 c_1, c_2, \dots, c_m 为 m 个待求的未知参数。只要测得 N 对观测值 (x_i^*, y_i^*) ($N > m$), 再根据这些数据应用最小二乘法寻找参数 c_1, c_2, \dots, c_m 的最佳估计值 $\hat{c}_1, \hat{c}_2, \dots, \hat{c}_m$, 就可得到 y 与 x 的具体函数关系式。

如果 y 与 x 之间的函数关系为未知, 但实验测量中它们之间又存在联系, 即 y 随 x 的改变而变化, 这时称 y 与 x 之间存在相关关系, 因此需要进行曲线拟合, 找出 y 和 x 的函数关系之经验公式。对应于两个相关的随机变量 x 和 y , 先测量 N 组数据 (x_i^*, y_i^*) , 利用作图法 (最简便、最直观) 在直角 (或单对数、双对数、极坐标及其它) 坐标纸上作出相应的点, 见图0-2-1,

通过这些点描绘一条平滑的曲线（如图中实线），进而根据曲线的形状，恰当地选择经验公式（函数关系式），如选用多项式为 $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + \dots + c_mx^{m-1} = f(x; c_1, c_2, \dots, c_m)$ 。最后应用最小二乘法求出参数的最佳估计值。

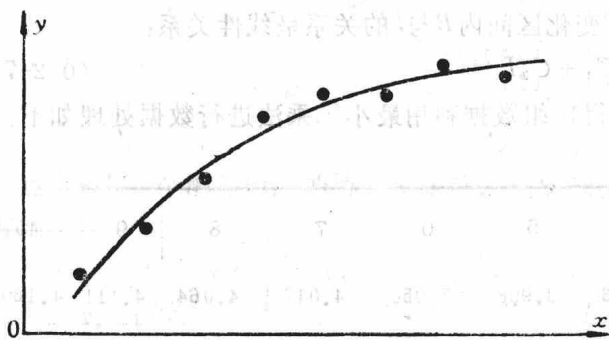


图 0-2-1 最小二乘法原理图

最后应用最小二乘法求出参数的最佳估计值。

1. 最小二乘法原理

最小二乘法是曲线拟合中应用得最为广泛的一种方法，而实际求参数最佳估计值时，可直接使用计算机的最小二乘法标准程序，此处只是介绍最小二乘法的基本思想和一系列公式的由来及物理意义。

最小二乘法的基本思想如下：依据图0-2-1中的八个数据点，可人为地画出许多条曲线，不言而喻，其中必存在一条最接近实际变化关系的最佳曲线。换句话说，存在一组决定该曲线的最佳参数 c_1, c_2, \dots, c_m 值。最佳曲线的条件为：测量值 y_i^* 与曲线上同一 x 值的 $y = f(x_i^*; c_1, c_2, \dots, c_m)$ 值之差（偏差） $v_i = y_i^* - f(x_i^*; c_1, c_2, \dots, c_m)$ 的平方之和为最小值。要注意，此处认为自变量 x 的测量误差 $\sigma(x)$ 远小于函数 y 的测量误差 $\sigma(y)$ ，即 $\sigma(x) \ll \sigma(y)$ ， x 的测量误差可忽略不计；同时认为 y 值的测量误差均相等，即 $\sigma(y_i) = \sigma(y_j)$ 。

$$Q = \sum_{i=1}^N v_i^2 = \sum_{i=1}^N \left[y_i^* - f(x_i^*; c_1, c_2, \dots, c_m) \right]^2 = \min \quad (0-2-2)$$

2. 求最佳估计值 c_1, c_2, \dots, c_m 的公式

曲线不同偏差的平方和 $Q = \sum_{i=1}^N \left[y_i^* - f(x_i^*; c_1, c_2, \dots, c_m) \right]^2$ 也不同，由于 x_i^* 与 y_i^* 为已知数值， Q 值与参数的取值有关，当要求 Q 为最小值时，即要求 Q 对参数 c_1, c_2, \dots, c_m 的偏导数为零。

$$\frac{\partial Q}{\partial c_k} = \sum_{i=1}^N \left[y_i^* - f(x_i^*; c_1, c_2, \dots, c_m) \right] \frac{\partial f(x_i^*; c_1, c_2, \dots, c_m)}{\partial c_k} = 0 \quad (0-2-3)$$

$k = 1, 2, \dots, m$

这样的方程式一共有 m 个，由它们解出 m 个参数 c_1, c_2, \dots, c_m 值是唯一的，也就是所要求的最佳估计值。

(1) 线性情况

在提出的经验公式或已知函数关系式中，未知参数 c_1, c_2, \dots, c_m 是线性关系时，解 (0-2-3) 式代表的方程组就很容易。线性情况下的 $y = f(x; c_1, c_2, \dots, c_m)$ 可写为

$$y = y_0(x) + c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_m f_m(x) \quad (0-2-4)$$

式中 $y_0(x)$ 及 $f_i(x)$ 是不含未知参数 c_1, c_2, \dots, c_m 的 x 的已知函数，当 $y_0(x) = 0$ ； $f_i(x) = x^{i-1}$ 时

$$y = c_1 + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_m x^{m-1} \quad (0-2-5)$$

上式为 x 的 $m-1$ 阶多项式。由 (0-2-4) 及 (0-2-5) 两式可知，所谓线性是对 c_1, c_2, \dots, c_m 而言。

将 (0-2-4) 式代入 (0-2-3) 式，经整理得到

$$\sum_{i=1}^N \left[y_i^* - \left(y_0(x_i^*) + \sum_{j=1}^m c_j f_j(x_i^*) \right) \right] f_k(x_i^*) = 0 \quad (0-2-6)$$

$k = 1, 2, 3, \dots, m$

$$\sum_{i=1}^N c_j \sum_{i=1}^N f_j(x_i^*) f_k(x_i^*) = \sum_{i=1}^N (y_i^* - y_0(x_i^*)) f_k(x_i^*)$$

(0-2-6)是 m 个方程式的方程组,每一方程式中含 m 个未知参数 c_1, c_2, \dots, c_m 。

例如,在核磁共振实验中,要求绘制利用氢核的核磁共振现象测量电磁铁磁场 B 大小与电磁铁励磁电流 I 的关系曲线,假若认为在 B 变化区间内 B 与 I 的关系呈线性关系:

$$B = C_1 + C_2 I \quad (0-2-7)$$

式中只有两个未知参数 c_1, c_2 ,对实验测得10组数据利用最小二乘法进行数据处理如下。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$B \times 10^{-4}(\text{T})$	3.690	3.745	3.790	3.853	3.908	3.954	4.017	4.064	4.111	4.160
$I(\text{A})$	8.92	9.09	9.22	9.40	9.56	9.69	9.87	10.0	10.13	10.27

对应于(0-2-7)式,方程组(0-2-6)式中的 $f_1(x) = 1, f_2(x^*) = I^*, y_0(x^*) = 0, y_i^* = B_i^*$ 。因此有

$$\begin{cases} c_1 \sum_{i=1}^{10} 1 \times 1 + c_2 \sum_{i=1}^{10} I_i^* \times 1 = \sum_{i=1}^{10} B_i^* \times 1 \\ c_1 \sum_{i=1}^{10} 1 \times I_i^* + c_2 \sum_{i=1}^{10} I_i^* \times I_i^* = \sum_{i=1}^{10} B_i^* \times I_i^* \end{cases}$$

将实验数据代入上式,计算和整理后得到

$$\begin{aligned} 10c_1 + 96.15c_2 &= 39.291 \\ 96.15c_1 + 926.36c_2 &= 378.44 \end{aligned}$$

最后求得参数的最佳估计值 c_1 和 c_2 分别为

$$\begin{aligned} c_1 &= 0.565 \text{ T} \\ c_2 &= 0.350 \text{ T/A} \end{aligned}$$

将求出的 c_1 和 c_2 代入(0-2-7)式,为

$$B = 0.565 + 0.350I(\text{T})$$

按此线性公式绘制的函数曲线即为最佳曲线。

3. 最小二乘法的矩阵形式。

仍然是线性情况,即式(0-2-4)所示情况,同时忽略自变量 x 的测量误差 $\sigma(x)$ 。但考虑到对 y 值的测量为非等精度,即 $\sigma(y_i) \neq \sigma(y_j)$,为此,引入所谓偏差的加权平方之和 Q' ;

$$Q' = \sum_{i=1}^N \omega_i v_i^2 = \sum_{i=1}^N \omega_i \left[y_i^* - y_0(x_i^*) - \sum_{j=1}^m c_j f_j(x_i^*) \right]^2$$

其中 ω_i 称为测量值 y_i 的权重因子,与测量误差的关系为 $\omega_i = 1/\sigma^2(y_i) = 1/\sigma_i$ 。应用最小二乘法 $\partial Q'/\partial c_k = 0$,可得到下列方程组。

$$\sum_{i=1}^N c_j \sum_{i=1}^N \omega_i f_j(x_i^*) f_k(x_i^*) = \sum_{i=1}^N \omega_i [y_i^* - y_0(x_i^*)] f_k(x_i^*) \quad (0-2-8)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, m$$

上述线性方程组写为矩阵形式时,则有

$$(F^T W F) C = F^T W (Y^* - Y_0)$$

式中, C, Y^*, Y_0 为列矩阵; F 是 $m \times N$ 矩阵; W 称权重矩阵;它们分别为

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}, \quad Y^* = \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_N^* \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} y_0(x_1^*) \\ y_0(x_2^*) \\ \vdots \\ y_0(x_N^*) \end{pmatrix}, \quad W_y = \begin{pmatrix} \omega_1 & & & 0 \\ & \omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \omega_N \end{pmatrix}$$

$$F = (f_{ij}) = \begin{pmatrix} f_1(x_1^*) & f_2(x_1^*) & \cdots & f_m(x_1^*) \\ f_1(x_2^*) & f_2(x_2^*) & \cdots & f_m(x_2^*) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1(x_N^*) & f_2(x_N^*) & \cdots & f_m(x_N^*) \end{pmatrix}$$

定义 V_y 为 N 个测量值 y_i^* 的协方差矩阵, 考虑到各个 y_i 的测量是独立的, 即 $\text{cov}(y_i^*, y_j^*) = 0$ 有则,

$$V_y = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \text{cov}(y_1^*, y_2^*) & \cdots & \text{cov}(y_1^*, y_N^*) \\ \text{cov}(y_2^*, y_1^*) & \sigma_2^2 & \cdots & \text{cov}(y_2^*, y_N^*) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{cov}(y_N^*, y_1^*) & \text{cov}(y_N^*, y_2^*) & \cdots & \sigma_N^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & 0 \\ & \sigma_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_N^2 \end{pmatrix}$$

因为 $\omega_i = 1/\sigma_i^2$, 很显然, W_y 为 V_y 的逆矩阵, 即 $W_y = V_y^{-1}$.

(1) 最佳估计值的矩阵公式, 应用矩阵运算公式, 由(0-2-9)式可得出:

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \vdots \\ \bar{c}_m \end{pmatrix} = (F^T W_y F)^{-1} F^T W_y (Y^* - Y_0) \quad (0-2-10)$$

这样, 可直接应用计算机的最小二乘法标准编程程序, 只需开始时逐一输入 $m, N, f_{ij}, y_i^*, y_0(x_i^*)$ 及 ω_i 后, 即可打印输出参数的最佳估计值 $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_m$.

(2) 参数最佳估计值的误差: 由(0-2-10)式可以看出 \bar{c} 为 y^* 的线性函数, y_i^* 的测量误差 σ_i 必然影响到 \bar{c} , 利用误差传递公式, \bar{c} 的协方差矩阵为

$$V_{\bar{c}} = [(F^T W_y F)^{-1} F^T W_y] V_y [(F^T W_y F)^{-1} F^T W_y]^T$$

利用矩阵公式 $(ABC)^T = C^T B^T A^T$, 而 W_y 为对称矩阵, 则 $W_y^T = W_y$, $(F^T W_y F)$ 亦为对称矩阵, 再考虑 $W_y = V_y^{-1}$ 的关系, 即 $W_y V_y = I$. 所以有

$$V_{\bar{c}} = (F^T W_y F)^{-1} F^T W_y V_y W_y F (F^T W_y F)^{-1}$$

$$V_{\bar{c}} = (F^T W_y F)^{-1} \quad (0-2-11)$$

协方差矩阵 $V_{\bar{c}}$ 的对角线上第 j 个对角元的平方根即为参数估计值 \bar{c}_j 的标准误差。

(3) 非线性情况

在一般情况下, 待求参数 c_1, c_2, \dots, c_m 在理论曲线公式或经验公式中, 不是以类似于(0-2-4)式中线性关系出现, 而是呈非线性。

$$y = f(x; c_1, c_2, \dots, c_m) \quad (0-2-12)$$

处理的一般方法是利用台劳展开, 将(0-2-12)式线性化, 并用逐次迭代法求参数的最佳估计值。

首先选取参数初值 (零级近似值) $c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, \dots, c_m^{(0)}$, 将函数 $f(x; c_1, c_2, \dots, c_m)$ 在初值附近作台劳展开, 只取一阶导数项, 近似地简化为 $\delta f^{(1)} = c_i - c_i^{(0)}$ 的线性函数:

$$y \approx f(x; c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, \dots, c_m^{(0)}) + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial c_i} \right)_{c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, \dots, c_m^{(0)}} \delta c_i^{(1)} + \dots$$

然后利用(0-2-11)式求出 $\delta c_i^{(1)}$, 可得到参数 c_i 的一级近似值:

$$\delta c^{(1)} = (F^T W_y F)^{-1} F^T W_y (Y^* - Y_0)$$