测绘行业职业技能培训教材

工程测量

GONGCHENG CELIANG

（技师版）

国家测绘局人事司
国家测绘局职业技能鉴定指导中心 编

测绘出版社

测绘行业职业技能培训教材

工 程 测 量

GONGCHENG CELIANG

（技师版）

国 家 测 绘 局 人 事 司
国家测绘局职业技能鉴定指导中心 编

测绘出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

工程测量:技师版/国家测绘局人事司,国家测绘局职业技能鉴定指导中心编.—北京:测绘出版社,2009.6

测绘行业职业技能培训教材

ISBN 978-7-5030-1927-2

Ⅰ.工… Ⅱ.①国…②国… Ⅲ.工程测量—技术培训—教材 Ⅳ.TB22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 100595 号

责任编辑 贾晓林 田 力 吴 芸　　责任校对 董玉珍 李 艳　　封面设计 李 伟

出版发行	测绘出版社		
社　址	北京市西城区三里河路 50 号	邮政编码	100045
电　话	010-68531160 68512386	网　址	www.sinomaps.com
印　刷	北京建筑工业印刷厂	经　销	新华书店
成品规格	210mm×297mm	印　张	34.5
字　数	1107 千字		
版　次	2009 年 6 月第 1 版	印　次	2009 年 6 月第 1 次印刷
印　数	0001—2000	定　价	88.00 元

书　号 ISBN 978-7-5030-1927-2/P·435

如有印装质量问题,请与我社发行部联系

编写说明

测绘是经济社会发展和国防建设的一项基础性工作。随着经济社会的全面进步，各方面对测绘的需求不断增长，测绘滞后于经济社会发展需求的矛盾日益突出。为进一步加强测绘工作，提高测绘对落实科学发展观和构建社会主义和谐社会的保障服务水平，国家对测绘事业发展越来越重视，《国务院关于加强测绘工作的意见》提出：加大测绘人才培养力度，全面提高测绘队伍整体素质；加强测绘职业资格管理，积极实施注册测绘师制度；加强基础地理信息获取和服务队伍建设，形成一支布局合理、功能完善、保障有力的基础测绘队伍。

高技能人才是我国测绘人才队伍的重要组成部分，在加快产业优化升级、提高企业竞争力、推动技术创新和科技成果转化等方面具有不可替代的重要作用。改革开放以来，我国高技能测绘人才工作取得了显著成绩，人才队伍不断壮大。但是，随着经济全球化趋势深入发展，科技进步日新月异，我国经济结构调整不断加快，人力资源能力建设要求不断提高，高技能测绘人才工作也面临严峻挑战。从总体上看，高技能测绘人才工作基础薄弱，与现代测绘技术的发展不适应。

国家测绘局《关于加强“十一五”测绘人才工作的意见》指出：认真贯彻落实中央《关于进一步加强高技能人才工作的意见》，大力加强技能人才的培养，力争用 5 年时间在测绘行业培养 5 000 名左右高技能人才、1 000 名左右技师和高级技师；以职业院校和职业培训机构为依托，加大对技能人才的上岗培训、岗位技能培训，支持和鼓励职工参加各种职业技能学习；健全和完善技能人才考核评价制度，进一步加强测绘行业特有工种职业技能鉴定工作；大力开展多种形式的测绘职业技能竞赛、岗位练兵和技术创新活动，为测绘高技能人才脱颖而出创造条件；研究建立测绘就业和岗位准入制度，并探索把高技能人才的配备情况作为测绘单位资质评估和参加重大工程项目招投标的必要条件。

为推动测绘高技能人才队伍建设，配合测绘行业技师、高级技师的培训和考评工作顺利开展，我们组织编写了这套测绘行业职业技能培训教材。本套教材是测绘行业技师考评的指定培训教材，亦可供有关院校师生及其他测绘专业技术人员参考使用。

本套教材内容翔实，结构合理，统筹考虑和兼顾了测绘理论知识和实际测绘生产技能的关系，做到了理论联系实际，实现了知识和技能的统一。该教材与国家职业标准紧密结合，对国家职业标准的基本要求、工作要求以及理论知识和技能操作所占比重，特别是工作要求中所涉及的职业功能、工作内容、技能要求和相关知识，都有直接的反映和体现。同时，教材中引入了大量技术实例，融入了大量测绘实际工作中的经验、方法和技术，贯穿了测绘规范的相关规定，加强了依据测绘规范进行生产操作的观念，重点突出了测绘生产过程中技术设计、作业方案、组织实施、数据处理、技术总结、质量检验、技术指导、技术培训等各个技术环节，注重实际操作能力培养，具有较强的实用性和指导性。

本套教材由国家测绘局人事司、国家测绘局职业技能鉴定指导中心组织编写，郑州测绘学校承担本套教材的编写工作。陕西测绘局、黑龙江测绘局、四川测绘局、中国测绘科学研究院、北京市测绘设计研究院、浙江省测绘局等单位承担本套教材的审稿工作。测绘出版社对本套教材的出版给予了大力支持。此外，在 2007 年 12 月出版的由浙江省测绘局主持编写的《房产测量》测量员版教材中已经涵盖了房产测量技师的培训内容，在技师版教材中暂未单独成册。

读者在使用过程中如发现问题，可书面向国家测绘局职业技能鉴定指导中心反映，以便今后修订过程中加以完善。

测绘行业职业技能培训教材编审委员会

2009 年 6 月

测绘行业职业技能培训教材编审委员会

主任委员　李永春　赵继成　李玉潮

副主任委员　雷　斌　韩力援　李骏元　高锡瑞

委　　员　任振宇　庞秋红　曾晨曦　胡秀琴

张彦东　常　玲　刘忠卿　崔　巍

薛雁明　王军德　杨国清　尚国旗

郑殿军　侯方国

主　　编　李玉潮

副 主 编　李骏元　薛雁明

《工程测量》编审人员

执行主编　王军德

参　　编　郭红霞　李　晓

审　　稿　陈　倬　岳京宪

前　言

本书依据《工程测量员》国家职业标准(6-01-02-04)编写，为测绘行业工程测量技师职业技能培训教材，可供有关院校师生及其他测绘技术人员参考。

根据职业功能和工作内容，本书共编写了九章。内容包括测量平差基础、工程测量方案及精度分析、测绘技术设计、工程测量组织与实施、工程测量数据处理、测绘成果质量管理、测绘成果检查验收与质量评定、测绘技术总结、仪器设备的检校与维护。本书所需要的其他测绘基础知识，可参见配套培训教材《测量基础》、测绘行业工程测量员职业技能培训教材《工程测量》。这种编写思路既考虑了实际测绘生产技能的先后顺序，又考虑了教材中理论知识的先后顺序，对二者进行了兼顾和统筹考虑，从而使教材编写由浅入深，通俗易懂，顺应测绘生产的实际；既可以供有关测绘院校和其他测绘技术人员学习，又可以指导中小型测绘单位参与生产，实现了知识和技能的统一。

本书的编写采用了"特殊与一般"、"纵向与横向处理"相结合的结构体系。所谓"特殊"，是指个别工程的特殊性，"一般"是指各种工程的共性、一般性。所谓"纵向处理"，是指按测绘生产的先后顺序，而"横向处理"是指按典型工程分别进行描述。全书引入了大量的技术实例，融入了大量工程测绘中的经验、方法和技术；同时自始至终贯穿最新测绘规范的相关规定，加强了依据测绘规范进行生产操作的观念；全书重点突出了测绘生产过程中技术设计、作业方案、组织实施、数据处理、质量管理、质量检验、技术总结等技术环节。这对培训和考核工程测量技师和高级技师，对培养测绘生产单位的中高级人才，都具有很强的实用性、指导性和可借鉴性。

书中未标"*"的内容是要求工程测量技师必须掌握的，全书所有内容工程测量高级技师必须掌握。

本书由王军德担任主编，郭红霞、李晓参编。具体分工如下：第一章、第五章、第九章由郭红霞编写；第二章、第三章、第四章、第八章由王军德编写；第六章、第七章由李晓编写；全书由王军德统稿。

在本书编写过程中，得到了郑州测绘学校教材编审委员会的诸多指导，同时听取了有关专家和有关老师的意见。北京市测绘设计研究院的岳京宪同志进行了认真细致的审稿，提出了许多宝贵建议。在此一并表示感谢！

本书在编写过程中，部分内容参考了互联网上收集的文献资料，在此表示感谢！如果涉及版权问题，可与国家测绘局职业技能鉴定指导中心联系，共同协商解决。

热忱希望广大读者对书中错误给予批评指正。

编　者

2009 年 4 月

目　录

第一章　测量平差基础

§1-1　观测误差与传播律

对任何一个量进行观测，总存在着观测误差。

观测误差包括系统误差和偶然误差。由于系统误差可以通过适当的观测方法来消除或是通过计算进行改正，因此一般所说的观测误差主要是指偶然误差。偶然误差的产生是一种随机现象，因此，偶然误差又称为随机误差，或者说偶然误差是一个随机变量。

由于观测结果不可避免地受偶然误差的影响，因此，在实际工作中，为了提高成果质量，同时也为了检查和及时发现观测值中有无错误存在，通常要进行多余观测。对一系列带有偶然误差的观测值，运用概率统计的方法来消除它们之间的不符值，求出未知量的最可靠值，是测量平差的一个主要任务。测量平差的另一个主要任务，就是评定测量成果的精度和质量。

一、真值和真误差

设某一观测量为随机变量，进行了 n 次同精度独立观测，其观测值为 $L_1, L_2, \cdots, L_n$，假定观测量的真值为 $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \cdots, \tilde{L}_n$，相应真误差（简称误差）为 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$，则三者之间存在如下关系

$$\Delta_i = \tilde{L}_i - L_i \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1-1-1}$$

二、衡量精度的指标

所谓精度就是指误差分布的密集或离散的程度。衡量精度的指标有很多，下面介绍几种常用的精度指标。

（一）方差和中误差

理论和实践证明，观测误差 Δ 服从正态分布，其概率密度函数为

$$f(\Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}\right) \tag{1-1-2}$$

式中，σ^2 为误差分布的方差；σ 为标准差，测量上习惯称它为中误差；Δ 的数学期望 $E(\Delta)=0$。σ 越大，观测值精度越低，反之精度越高，故常用中误差 σ 作为衡量精度的指标。

由于

$$\sigma = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{1-1-3}$$

即 σ 是 $\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$ 的极限值，是理论上的数值。但实际上观测值个数 n 总是有限的，由有限个观测值的真误差值只能求得方差和中误差的估（计）值。方差 σ^2 和中误差 σ 的估值数学上一般用符号 $\hat{\sigma}^2$ 和 $\hat{\sigma}$ 来表示，但在测绘界，习惯于用 m^2 和 m 分别表示方差和中误差的估值，且

$$m = \hat{\sigma} = \pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{1-1-4}$$

顺便指出，由于分别采用不同的符号以区分方差和中误差的理论值和估值，因此在本书以后的文字叙述中，在不需要特别强调“估值”意义的情况下，也将“中误差的估值”简称为“中误差”。

（二）平均误差

在一定的观测条件下，称一组独立的偶然误差的绝对值的算术平均值之极限值为平均误差，记为

$$\theta=\lim_{n\to\infty}\frac{[|\Delta|]}{n} \tag{1-1-5}$$

平均误差 θ 与相应的标准差 σ 之间存在以下理论关系式

$$\theta=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\approx0.797\,9\sigma\approx\frac{4}{5}\sigma \tag{1-1-6}$$

由式(1-1-6)可以看出：不同大小的 θ 对应着不同的 σ，也就对应着不同的误差分布曲线。因此，可以用平均误差 θ 作为衡量精度的指标。

由于实际工作中观测值的个数 n 总是有限值。因此，在实用上也只能用 θ 的估值来衡量精度，并用 $\hat{\theta}$ 来表示 θ 的估值，但仍简称之为平均误差，即

$$\hat{\theta}=\pm\frac{[|\Delta|]}{n}\approx\frac{4}{5}m \tag{1-1-7}$$

当 n 不大时，中误差 m 比平均误差 $\hat{\theta}$ 能更灵敏地反映大的真误差的影响。因此，各国在实用上通常都是采用中误差作为精度指标，我国测绘界也统一采用中误差作为衡量精度的指标。

(三) 极限误差

观测必然会产生误差，那么，多大的误差算是正常情况下出现的偶然误差？多大的误差是由于观测条件不好或人为因素而造成的粗差或错误呢？这就需要规定出一个标准来，这个标准就是极限误差，简称限差。

由概率论、误差理论及实践证明：在大量同精度观测的一组误差中，绝对值大于一倍中误差的偶然误差出现的可能性是 31.7%；大于二倍中误差的偶然误差出现的可能性是 4.5%；大于三倍中误差的偶然误差出现的可能性小到只有 0.3%，实际上就是不可能出现的。即误差出现在 $(-\sigma,+\sigma)$，$(-2\sigma,+2\sigma)$，$(-3\sigma,+3\sigma)$ 中的概率分别为

$$\left.\begin{aligned}P(-\sigma<\Delta<+\sigma)&\approx68.3\%\\P(-2\sigma<\Delta<+2\sigma)&\approx95.5\%\\P(-3\sigma<\Delta<+3\sigma)&\approx99.7\%\end{aligned}\right\} \tag{1-1-8}$$

因此，人们通常以三倍中误差作为偶然误差的极限误差，即

$$\Delta_{限}=3\sigma \tag{1-1-9}$$

若对观测的要求较为严格，也可规定二倍中误差作为极限误差，即

$$\Delta_{限}=2\sigma \tag{1-1-10}$$

实用上是以中误差的估值 m 来代替 σ，即以 $3m$ 或 $2m$ 作为极限误差的。

极限误差在实际测量工作中是经常采用的。测量规范中明确规定了各类不同等级测量的极限误差值。在测量中，如果某误差超过极限误差，就认为该误差是粗差或错误，其相应的观测值应舍去不用或返工重测。

(四) 相对中误差

对于某些观测结果，有时单靠中误差还不能完全表达观测结果的好坏。例如，假设分别丈量了 1 000 m和 80 m 的两段距离，观测值的中误差均为±2 cm，虽然两者的中误差相同，但就单位长度来说，两者精度并不相同。因此经常采用另一种方法来衡量精度，它就是相对中误差。

相对中误差是中误差与观测值之比，它是一个无量纲的数。为了便于比较，在测量中通常将其分子化为 1，即用 $\frac{1}{N}$ 表示。

例如上述两段距离，前者的相对中误差为 1/50 000，后者则为 1/4 000。显然前者的相对精度要高于后者。

与相对误差相比，真误差、中误差和极限误差等均称为绝对误差。

(五) 权

1. 权的定义

比较各观测值之间的精度，除了可以用方差以外，还可以通过方差之间的比例关系来衡量观测值之间

的精度高低。这种表示各观测值方差之间的比例关系的数字量，称之为权。

在实际测量工作中，平差计算之前，观测值的方差往往是不知道的，而权却可以根据事先给定的条件予以确定，然后再根据平差的结果进而求出方差。因此，在平差计算中，权起着非常重要的作用。

设一组随机观测值 $L_i(i=1,2,\cdots,n)$，它们的方差为 $\sigma_i^2(i=1,2,\cdots,n)$，如选定任一常数 σ_0，则权定义为

$$p_i=\frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \tag{1-1-11}$$

式中，p_i 为观测值 L_i 的权。

由式(1-1-11)可知，观测值 L_i 的权 p_i 与方差成反比。方差越小，其权越大。所以权的大小也可以说明观测值本身精度的高低。

对一组已知中误差 $\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的观测值 $L_i(i=1,2,\cdots,n)$ 而言，有如下结论：

(1) 选定了一个 σ_0，即有一组对应的权。或者说，有一组权，必有一个对应的 σ_0 值。

(2) 一组观测值的权，其大小是随 σ_0 的不同而异，但不论 σ_0 选用何值，权之间的比例关系始终不变。

(3) 为了使权能起到比较精度的作用，在同一问题中只能选定一个 σ_0 值，不能同时选定几个不同的 σ_0 值，否则就破坏了权之间的比例关系。

(4) 只要事先给定了一定条件，就可以确定出权的数值。

由上可知，方差是用来反映观测值的绝对精度的，而权是用来比较各观测值相互之间的比例关系。因而，权的意义，不在于它们本身数值的大小，而重要的是它们之间所存在的比例关系。

2. 单位权中误差

σ_0 在定权时只起比例常数的作用，但 σ_0 值一经选定，它就有了具体含义。

若令 $\sigma_i=\sigma_0$，并代入式(1-1-11)，则 $p_i=1$。可见，观测值的方差等于 σ_0^2 时，其权必然等于1；或者说，权为1的观测值的方差必然等于 σ_0^2。因此，通常称 σ_0^2 为单位权观测值的方差(简称单位权方差或方差因子)，把权等于1的观测值，称为单位权观测值。

用权衡量各观测值之间的相对精度，可以是同一类的观测值，也可以是不同类的观测值。在确定一组同类元素的观测值的权时，所选取的单位权方差 σ_0^2 的单位一般与观测值方差 σ_i^2 的单位相同。确定两种不同类型的观测值的权时，若某类观测量的权是无单位的，则另一类观测值的权必然是有单位的，这种情况在平差计算中是常常会遇到的。

三、协方差与协方差传播律

前面讲到，对于一个随机观测量，衡量其精度的指标，通常采用方差或中误差来衡量观测值的精度。但当有两个或两个以上随机观测量时，除了各自的方差或中误差，还需引进随机变量之间的协方差以及协方差阵的概念来衡量其相互关系。

(一) 协方差

设随机观测变量 X 和 Y，它们的协方差定义为

$$\sigma_{XY}=\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta_X\Delta_Y]}{n} \tag{1-1-12}$$

可见，协方差是两种真误差 Δ_X、Δ_Y 所有可能取值的乘积的理论平均值。显然，协方差描述了两个随机变量之间的关系。当 $\sigma_{XY}=0$ 时，就表示 X 和 Y 这两个随机变量是不相关的，或者说是相互独立的。若 $\sigma_{XY}\neq 0$，则表示它们的误差是相关的，即 X 和 Y 是相关的、不独立的。因测量上涉及的观测值和观测误差都服从正态分布，按照概率统计的理论，对正态变量而言，“不相关”和“独立”是等价的，因此，两个不相关的观测值称为独立观测值，反之称为相关观测值。

实际工作中，因 n 总是有限的，所以只能求得协方差的估值，且记为

$$m_{XY}=\hat{\sigma}_{XY}=\frac{[\Delta_X\Delta_Y]}{n} \tag{1-1-13}$$

(二) 协方差阵

由两个随机变量推广之，在有 n 个观测量的情况下，把它们写成向量的形式，设

$$\underset{n\times 1}{\boldsymbol{X}}=[X_1 \quad X_2 \quad \cdots \quad X_n]^{\mathrm{T}} \tag{1-1-14}$$

则根据方差和协方差的定义，把随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的方差-协方差阵$\underset{n\times n}{\boldsymbol{D}_{XX}}$定义为 n 阶方阵

$$\underset{n\times n}{\boldsymbol{D}_{XX}}=\begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1X_2} & \cdots & \sigma_{X_1X_n} \\ \sigma_{X_2X_1} & \sigma_{X_2}^2 & \cdots & \sigma_{X_2X_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{X_nX_1} & \sigma_{X_nX_2} & \cdots & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix} \tag{1-1-15}$$

为方便起见，以后在公式中全部省略矩阵的行列号。$\boldsymbol{D}_{XX}$ 阵中的主对角元素 $\sigma_{X_i}^2$ 为各随机变量 X_i 的方差，而非对角线元素 $\sigma_{X_iX_j}$ 为随机变量 X_i 关于 $X_j\,(i\neq j)$ 的协方差，故称 $\boldsymbol{D}_{XX}$ 为随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的方差-协方差阵，简称为 $\boldsymbol{X}$ 的方差阵或自协方差阵。

可以证明：$\sigma_{X_iX_j}=\sigma_{X_jX_i}$，故 $\boldsymbol{D}_{XX}$ 为 n 阶对称方阵。

当随机向量 $\boldsymbol{X}$ 中的任意两个随机变量两两相互独立时，则有 $\sigma_{X_iX_j}=\sigma_{X_jX_i}=0\,(i\neq j)$，此时随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的方差-协方差阵为一对角阵，即

$$\boldsymbol{D}_{XX}=\begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & & & \\ & \sigma_{X_2}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix} \tag{1-1-16}$$

今后，在不致引起混淆的情况下，简记方差 $\sigma_{X_i}^2$ 为 σ_i^2，协方差 $\sigma_{X_iX_j}$ 为 σ_{ij}。

（三）观测值线性函数的协方差传播律

设有观测值向量$\underset{t\times 1}{\boldsymbol{X}}$，其方差阵为$\boldsymbol{D}_{XX}$，若 $\boldsymbol{X}$ 的 n 个线性函数为

$$\underset{n\times 1}{\boldsymbol{Y}}=\boldsymbol{KX}+\boldsymbol{K}_0 \tag{1-1-17}$$

式中，$\boldsymbol{K}$ 是已知系数矩阵，$\boldsymbol{K}_0$ 是常数向量。

按照协方差定义，可以推导出 $\boldsymbol{Y}$ 的方差阵为

$$\boldsymbol{D}_{YY}=\boldsymbol{KD}_{XX}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}} \tag{1-1-18}$$

从式(1-1-18)可以看出，常数向量 $\boldsymbol{K}_0$ 对求函数的方差没有影响。

当式(1-1-17)中 $n=1$ 时，把式(1-1-18)展开为纯量形式，可得

$$\boldsymbol{D}_{YY}=\sigma_Y^2=k_1^2\sigma_1^2+k_2^2\sigma_2^2+\cdots+k_t^2\sigma_t^2+2\sum_{i=1}^{t-1}k_i\sum_{j=i+1}^{t}k_j\sigma_{ij} \tag{1-1-19}$$

当向量中的各分量 $X_i\,(i=1,2,\cdots,t)$ 两两独立时，它们之间的协方差 $\sigma_{ij}=0$，此时式(1-1-19)简化为

$$\boldsymbol{D}_{YY}=\sigma_Y^2=k_1^2\sigma_1^2+k_2^2\sigma_2^2+\cdots+k_t^2\sigma_t^2 \tag{1-1-20}$$

若设 $\boldsymbol{X}$ 的两个函数向量为

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{Y}&=\boldsymbol{KX}+\boldsymbol{K}_0 \\ \boldsymbol{Z}&=\boldsymbol{FX}+\boldsymbol{F}_0 \end{aligned}\right\} \tag{1-1-21}$$

根据互协方差阵的定义可知

$$\boldsymbol{D}_{YZ}=\boldsymbol{KD}_{XX}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \tag{1-1-22}$$

这就是由 $\boldsymbol{X}$ 的方差阵求它的两个函数向量 Y 和 Z 的互协方差阵的公式。

通常将式(1-1-18)、式(1-1-19)、式(1-1-20)和式(1-1-21)都称为协方差传播律，也叫误差传播定律。其中式(1-1-20)是式(1-1-19)的一个特例。

以后经常要由观测值的方差阵推求观测值函数的方差阵。协方差传播律是一个非常有力的工具。

例 1　设向量 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的函数向量

$$\boldsymbol{Z}=F_1\boldsymbol{X}+F_2\boldsymbol{Y} \tag{1-1-23}$$

已知 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的方差阵为 $\boldsymbol{D}_{XX}$ 和 $\boldsymbol{D}_{YY}$，$\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的互协方差阵为 $\boldsymbol{D}_{XY}$，求 $\boldsymbol{Z}$ 的方差阵及 $\boldsymbol{Z}$ 关于 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的互协方差阵。

解：因为

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{X}+\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{Y}$$
$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{I}\boldsymbol{X}+0\boldsymbol{Y}$$
$$\boldsymbol{Y}=0\boldsymbol{X}+\boldsymbol{I}\boldsymbol{Y}$$

式中，$\boldsymbol{I}$ 表示单位矩阵，也即

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}\\\boldsymbol{X}\\\boldsymbol{Y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}_1 & \boldsymbol{F}_2\\\boldsymbol{I} & 0\\0 & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}\\\boldsymbol{Y}\end{bmatrix}$$

令 $\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}\\\boldsymbol{X}\\\boldsymbol{Y}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}\\\boldsymbol{Y}\end{bmatrix}$，系数阵 $\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}_1 & \boldsymbol{F}_2\\\boldsymbol{I} & 0\\0 & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{D}_{MM}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{ZZ} & \boldsymbol{D}_{ZX} & \boldsymbol{D}_{ZY}\\\boldsymbol{D}_{XZ} & \boldsymbol{D}_{XX} & \boldsymbol{D}_{XY}\\\boldsymbol{D}_{YZ} & \boldsymbol{D}_{YX} & \boldsymbol{D}_{YY}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{D}_{NN}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{XX} & \boldsymbol{D}_{XY}\\\boldsymbol{D}_{YX} & \boldsymbol{D}_{YY}\end{bmatrix}$。利用协方差传播律，可知

$$\boldsymbol{D}_{MM}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{D}_{NN}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}$$

展开后即可求得

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{D}_{ZZ}&=\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{D}_{XX}\boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{D}_{YY}\boldsymbol{F}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{D}_{XY}\boldsymbol{F}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{D}_{YX}\boldsymbol{F}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{D}_{ZX}&=\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{D}_{XX}+\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{D}_{YX}\\\boldsymbol{D}_{ZY}&=\boldsymbol{F}_1\boldsymbol{D}_{XY}+\boldsymbol{F}_2\boldsymbol{D}_{YY}\end{aligned}\right\}\tag{1-1-24}$$

以后在公式推演或计算时，式(1-1-24)也可作为公式应用。

例 2　在图 1-1-1 的三角形中，β_1、β_2、β_3 为等精度观测，其中误差为 m_β，试求经过三角形闭合差平均分配后的平差角向量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}=[\hat{\beta}_1\ \ \hat{\beta}_2\ \ \hat{\beta}_3]^{\mathrm{T}}$ 的方差阵 $\boldsymbol{D}_{\hat{\beta}\hat{\beta}}$。

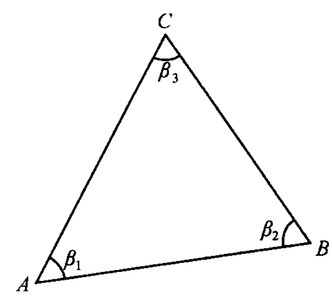

图 1-1-1　三角形角度观测值

解：设三角形的闭合差为

$$\omega=\beta_1+\beta_2+\beta_3-180°$$

经过闭合差平均分配后的平差角值为

$$\hat{\beta}_1=\beta_1-\frac{\omega}{3}=\frac{2}{3}\beta_1-\frac{1}{3}\beta_2-\frac{1}{3}\beta_3+60°$$

同理

$$\hat{\beta}_2=-\frac{1}{3}\beta_1+\frac{2}{3}\beta_2-\frac{1}{3}\beta_3+60°$$

$$\hat{\beta}_3=-\frac{1}{3}\beta_1-\frac{1}{3}\beta_2+\frac{2}{3}\beta_3+60°$$

写成矩阵形式为

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}=\begin{bmatrix}\hat{\beta}_1\\\hat{\beta}_2\\\hat{\beta}_3\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\-1 & 2 & -1\\-1 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}60°\\60°\\60°\end{bmatrix}$$

应用协方差传播律，得

$$\boldsymbol{D}_{\hat{\beta}\hat{\beta}}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\-1 & 2 & -1\\-1 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_\beta^2 & & \\ & m_\beta^2 & \\ & & m_\beta^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\-1 & 2 & -1\\-1 & -1 & 2\end{bmatrix}=\frac{m_\beta^2}{3}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\-1 & 2 & -1\\-1 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

(四) 观测值非线性函数协方差传播律的应用

以上所述协方差传播律只能用在线性函数的情况，但在测量中常常会遇到一些函数是非线性的情况。若函数是非线性的，则必须先进行线性化后才能应用协方差传播律。设有随机向量 $\underset{t\times 1}{\boldsymbol{X}}$ 的非线性函数为

$$\boldsymbol{Z}=f(\boldsymbol{X})=f(X_1,X_2,\cdots,X_t)\tag{1-1-25}$$

且已知 $\underset{t\times1}{\boldsymbol{X}}$ 的方差阵为 $\boldsymbol{D}_{XX}$，欲求 $\boldsymbol{Z}$ 的方差阵 $\boldsymbol{D}_{ZZ}$。

假定观测值 $\boldsymbol{X}$ 有近似值 $\underset{t\times1}{\boldsymbol{X}^0}$

$$\underset{t\times1}{\boldsymbol{X}^0}=[X_1^0 \quad X_2^0 \quad \cdots \quad X_t^0]^{\mathrm{T}} \tag{1-1-26}$$

则可将式(1-1-26)按泰勒级数在 X^0 处展开，并取至一次项为

$$\boldsymbol{Z}=f(X_1^0,X_2^0,\cdots,X_t^0)+(\frac{\partial f}{\partial X_1})_0(X_1-X_1^0)+(\frac{\partial f}{\partial X_2})_0(X_2-X_2^0)+\cdots+(\frac{\partial f}{\partial X_t})_0(X_t-X_t^0) \tag{1-1-27}$$

式中，$(\frac{\partial f}{\partial X_i})_0$ 是函数对各个变量所取的偏导数，并以近似值 X^0 代入所算的数值，它们都是常数。令

$$\boldsymbol{K}=[k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_t]=\left[(\frac{\partial f}{\partial X_1})_0 \quad (\frac{\partial f}{\partial X_2})_0 \quad \cdots \quad (\frac{\partial f}{\partial X_t})_0\right]$$

$$k_0 = f(X_1^0,X_2^0,\cdots,X_t^0)-\sum_{i=1}^{t}k_iX_i^0$$

则式(1-1-27)可写为

$$\boldsymbol{Z}=k_1X_1+k_2X_2+\cdots+k_tX_t+k_0=\boldsymbol{KX}+k_0 \tag{1-1-28}$$

这样，就可以将非线性函数式(1-1-25)化为线性函数式(1-1-28)，并按照线性函数的协方差传播律来求 $\boldsymbol{Z}$ 的方差阵了。由于在线性化的过程中，常数项 k_0 对方差的计算不起作用，起作用的只是函数的偏导数向量，即系数向量 $\boldsymbol{K}$，所以为求函数的方差，只要对 $\boldsymbol{K}$ 求全微分即可。

如果要求随机向量 $\boldsymbol{Z}$ 的 n 个非线性函数的协方差，应先对 n 个函数求全微分，再应用协方差传播律求其协方差阵。

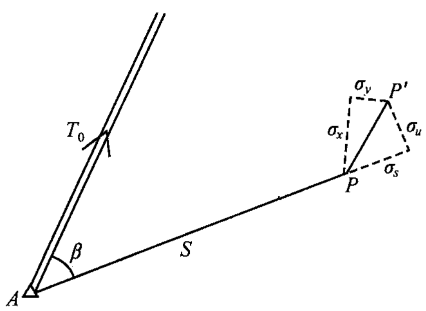

图 1-1-2　点位误差

例 3　有一支导线如图 1-1-2 所示，图中 A 为已知点，α_0 为已知方位角，β 为观测角，其中误差 $m_\beta=\pm2.5''$，观测边长 S 为 800.000 m，其边长相对中误差为 1/80 000，即边长观测中误差 $m_S=\pm1.0$ cm，试求 P 点的点位中误差 m_P。

由图可知，P 点的点位中误差 m_P 有两种计算方法：$m_P=\pm\sqrt{m_x^2+m_y^2}=\pm\sqrt{m_S^2+m_u^2}$。

解法一：由 P 点的坐标方差 m_x^2,m_y^2 计算 P 点的点位中误差 m_P。

设 AP 方向的坐标方位角为 α，则有

$$x_P=x_A+S\cos\alpha$$
$$y_P=y_A+S\sin\alpha$$
$$\alpha=\alpha_0+\beta$$

对 x_P,y_P 求全微分，因为 $\mathrm{d}\alpha=\mathrm{d}\beta$，所以

$$\mathrm{d}x_P=\cos\alpha\cdot\mathrm{d}S-S\sin\alpha\cdot\frac{\mathrm{d}\beta}{\rho}$$

$$\mathrm{d}y_P=\sin\alpha\cdot\mathrm{d}S+S\cos\alpha\cdot\frac{\mathrm{d}\beta}{\rho}$$

将以上两式写成矩阵表达式为

$$\mathrm{d}x_P=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\frac{S}{\rho}\sin\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{d}S\\ \mathrm{d}\beta\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{d}y_P=\begin{bmatrix}\sin\alpha & \frac{S}{\rho}\cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{d}S\\ \mathrm{d}\beta\end{bmatrix}$$

应用协方差传播律求 P 点坐标的方差 m_x^2,m_y^2。因为观测角 β 和观测边长 S 相互独立，则有

$$m_x^2=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\frac{S}{\rho}\sin\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_S^2 & 0\\ 0 & m_\beta^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha\\ -\frac{S}{\rho}\sin\alpha\end{bmatrix}=1.0\cos^2\alpha+6.25\frac{S^2}{\rho^2}\sin^2\alpha$$

同理,可得

$$m_y^2=\left[\sin\alpha \quad \frac{S}{\rho}\cos\alpha\right]\begin{bmatrix}m_S^2 & 0\\ 0 & m_\beta^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin\alpha\\ \frac{S}{\rho}\cos\alpha\end{bmatrix}=1.0\sin^2\alpha+6.25\frac{S^2}{\rho^2}\cos^2\alpha$$

最终得

$$m_P=\pm\sqrt{m_x^2+m_y^2}=\pm\sqrt{1.0+6.25\frac{S^2}{\rho^2}}=\pm 1.39\ \mathrm{cm}$$

解法二:由 P 点的纵横向方差 m_S^2,m_u^2 计算 P 点的点位中误差 m_P。

在图 1-1-2 中,P 点在 AP 方向上的方差 m_S^2 称为纵向方差,而在它的垂直方向上的方差 m_u^2 称为横向方差。横向方差是由 AP 边的方位角 α 的方差引起的。即

$$m_u^2=\frac{S^2}{\rho^2}m_\alpha^2=\frac{S^2}{\rho^2}m_\beta^2=0.94\ \mathrm{cm}^2$$

又因为

$$m_S^2=1.0\ \mathrm{cm}^2$$

所以

$$m_P=\pm\sqrt{m_S^2+m_u^2}=\pm 1.39\ \mathrm{cm}$$

由以上讨论可以看出,非线性函数应用协方差传播律的具体步骤是:

(1) 按题目的要求列出函数式;

(2) 对函数式求全微分;

(3) 将微分式写成矩阵形式;

(4) 应用协方差传播律,求函数的方差或协方差阵(实用上是求估值)。

§1-2 协方差传播律在测量上的应用

一、协因数与协因数阵

由权的定义可知,观测值的权与它的方差成反比。设有观测值 L_i 和 L_j,它们的方差分别为 σ_i^2 和 σ_j^2,它们之间的协方差为 σ_{ij},我们令

$$\left.\begin{aligned}Q_{ii}&=\frac{1}{p_i}=\frac{\sigma_i^2}{\sigma_0^2}\\ Q_{jj}&=\frac{1}{p_j}=\frac{\sigma_j^2}{\sigma_0^2}\\ Q_{ij}&=\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0^2}\end{aligned}\right\}\tag{1-2-1}$$

或写为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_i^2&=\sigma_0^2Q_{ii}\\ \sigma_j^2&=\sigma_0^2Q_{jj}\\ \sigma_{ij}&=\sigma_0^2Q_{ij}\end{aligned}\right\}\tag{1-2-2}$$

则称 Q_{ii} 和 Q_{jj} 分别为 L_i 和 L_j 的协因数或权倒数,而称 Q_{ij} 为 L_i 关于 L_j 的协因数或相关权倒数。在式(1-2-1)和式(1-2-2)中,σ_0 仍然是单位权中误差。

由上可以看出,观测值的协因数 Q_{ii} 和 Q_{jj}(权倒数)与方差成正比,而协因数 Q_{ij}(相关权倒数)与协方差成正比。容易理解,协因数 Q_{ii} 和 Q_{jj} 与权 p_i 和 p_j 有类似的作用,它们是比较观测值精度高低的一种指标,而协因数 Q_{ij} 是比较观测值之间相关程度的一种指标。

将协因数的概念扩充,假定有观测值向量(或者是观测值函数向量)$\underset{n\times 1}{\boldsymbol{X}}$ 和 $\underset{r\times 1}{\boldsymbol{Y}}$,它们的方差阵分别为 $\underset{n\times n}{\boldsymbol{D}_{XX}}$ 和 $\underset{r\times r}{\boldsymbol{D}_{YY}}$,$\boldsymbol{X}$ 关于 $\boldsymbol{Y}$ 的互协方差阵为 $\underset{n\times r}{\boldsymbol{D}_{XY}}$,令

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{Q}_{XX}&=\frac{1}{\sigma_0^2}\boldsymbol{D}_{XX}\\\boldsymbol{Q}_{YY}&=\frac{1}{\sigma_0^2}\boldsymbol{D}_{YY}\\\boldsymbol{Q}_{XY}&=\frac{1}{\sigma_0^2}\boldsymbol{D}_{XY}\end{aligned}\right\} \tag{1-2-3}$$

或写成

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{D}_{XX}&=\sigma_0^2\boldsymbol{Q}_{XX}\\\boldsymbol{D}_{YY}&=\sigma_0^2\boldsymbol{Q}_{YY}\\\boldsymbol{D}_{XY}&=\sigma_0^2\boldsymbol{Q}_{XY}\end{aligned}\right\} \tag{1-2-4}$$

则称 $\boldsymbol{Q}_{XX}$ 和 $\boldsymbol{Q}_{YY}$ 分别为 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的协因数阵，而称 $\boldsymbol{Q}_{XY}$ 为 $\boldsymbol{X}$ 关于 $\boldsymbol{Y}$ 的互协因数阵。由于协因数阵 $\boldsymbol{Q}_{XX}$ 中的对角线元素就是各个 X_i 的权倒数，它的非对角元素是 X_i 关于 $X_j(i\neq j)$ 的相关权倒数；而 $\boldsymbol{Q}_{XY}$ 中的元素就是 X_i 关于 Y_j 的相关权倒数，所以，也称 $\boldsymbol{Q}_{XX}$ 和 $\boldsymbol{Q}_{YY}$ 为 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的权逆阵，而称互协因数阵 $\boldsymbol{Q}_{XY}$ 为 X 关于 Y 的相关权逆阵。

因为 $\boldsymbol{D}_{YX}=\boldsymbol{D}_{XY}^{\mathrm{T}}$，所以 $\boldsymbol{Q}_{YX}=\boldsymbol{Q}_{XY}^{\mathrm{T}}$。当 $\boldsymbol{Q}_{XY}=\boldsymbol{Q}_{YX}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 也是相互独立的观测向量。

若记

$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}\\\boldsymbol{Y}\end{bmatrix} \tag{1-2-5}$$

则 $\boldsymbol{Z}$ 的方差阵 $\boldsymbol{D}_{ZZ}$ 和协因数阵（权逆阵）$\boldsymbol{Q}_{ZZ}$ 为

$$\boldsymbol{D}_{ZZ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{XX} & \boldsymbol{D}_{XY}\\\boldsymbol{D}_{YX} & \boldsymbol{D}_{YY}\end{bmatrix} \tag{1-2-6}$$

$$\boldsymbol{Q}_{ZZ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{XX} & \boldsymbol{Q}_{XY}\\\boldsymbol{Q}_{YX} & \boldsymbol{Q}_{YY}\end{bmatrix} \tag{1-2-7}$$

且有

$$\boldsymbol{Q}_{ZZ}=\frac{1}{\sigma_0^2}\boldsymbol{D}_{ZZ}$$

或

$$\boldsymbol{D}_{ZZ}=\sigma_0^2\boldsymbol{Q}_{ZZ} \tag{1-2-8}$$

二、权阵

设有独立观测值 $L_i(i=1,2,\cdots,n)$（下同），其方差为 σ_i^2，权为 p_i，单位权方差为 σ_0^2，现组成向量和矩阵

$$\underset{n\times 1}{\boldsymbol{L}}=\begin{bmatrix}L_1\\L_2\\\vdots\\L_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{D}_{ZZ}=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0\\0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}_{LL}=\begin{bmatrix}p_1 & 0 & \cdots & 0\\0 & p_2 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & p_n\end{bmatrix}$$

则由式(1-2-3)可知，$\boldsymbol{L}$ 的协因数阵为

$$\boldsymbol{Q}_{LL}=\frac{1}{\sigma_0^2}\boldsymbol{D}_{LL}=\begin{bmatrix}\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} & 0 & \cdots & 0\\0 & \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & \frac{\sigma_n^2}{\sigma_0^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{p_1} & 0 & \cdots & 0\\0 & \frac{1}{p_2} & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & \frac{1}{p_n}\end{bmatrix} \tag{1-2-9}$$

则有

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{P}_{LL}&=\boldsymbol{Q}_{LL}^{-1}\\\boldsymbol{P}_{LL}\boldsymbol{Q}_{LL}&=\boldsymbol{I}\end{aligned}\right\} \tag{1-2-10}$$

可见，$\boldsymbol{P}_{LL}$ 是由独立观测值 L_i 的权 p_i 构成的对角阵，且 $\boldsymbol{P}_{LL}$ 与权逆阵（协因数阵）$\boldsymbol{Q}_{LL}$ 互为逆阵，通常称