M A T H S

1999

硕士研究生入学考试

数学

考点分析及水平测试

（理工类）

主编 陈文灯

学苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

1999硕士研究生入学考试理工类数学考点分析及水平测试/陈文灯 主编.
－北京:学苑出版社，1998.3
ISBN 7-5077-0567-6

Ⅰ.19… Ⅱ. 陈… Ⅲ.数学-研究生-入学考试-试题-教材-1999 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(98)第03884号

1999硕士研究生入学考试
数学考点分析及水平测试
(理工类)
主编 陈文灯
学苑出版社出版发行
北京万寿路西街11号 100036
北京市朝阳印刷厂印刷 新华书店经销
787×1092 16开本 23印张 600千字
1998年3月北京第1版 1998年3月北京第1次印刷
印数:5000册
定价:30.00元

前　言

为了帮助广大准备报考硕士研究生的考生在较短时间内高效率地掌握“考纲”所要求的各知识点，了解考试信息，把握最新考试动态，全面提高应试能力，从而较为顺利地通过统考，作者根据国家教委颁布的《数学考试大纲》的最新精神和近几年统考命题的特点，并结合作者多年来“考研班数学辅导”的成功经验，编写了本书。本书是《1999 硕士研究生入学考试数学复习指南》的续编。

本书特点：

(1) 重点突出。本书对考纲要求重点掌握的基本概念、公式、定理以及相关概念、公式、定理之间的区别和联系作了较为透彻地剖析，便于考生对这些重点内容的理解和正确应用，避免犯概念性及错用公式、定理的解题错误。

(2) 针对性强。本书从总结常考题型的角度出发，精选了 1000 余道例题，详细地介绍了各类题型的解题方法和技巧，分析了各类题型的发展变化过程，并对各类题型的发展趋势进行了预测，特别对综合性较强、难度较大的常考题型作了定式解法处理，从而提高考生解题速度和准确性以及综合运用知识的应试能力。

另外，本书还精心编写了 6 套水平测试题，在内容上紧扣考试大纲，在题型上既有基本题，也有一定数量的综合题，且难易适度，比较适应实际应试要求。考生通过水平测试，不仅能提高应试能力，而且能从中了解到数学试题的命题思路和命题新动向。

本书是考研应试者的良师益友，也是大专院校的学生学习数学的一本极有价值的参考书。

限于水平和时间，疏漏及失误在所难免，恳请广大读者、数学界同仁批评指正。

陈文灯

1998.3

目　录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第一篇　高等数学

第一章　函数　极限　连续

第一节　函　　数

题型(一)　求函数的定义域

【解题思路】　求函数的定义域的方法为

Ⅰ　对于基本初等函数，其定义域可直接给出，应注意：

$y=\dfrac{1}{x}$，　　　$D_f: x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

$y=\sqrt[2n]{x}$，　　　$D_f: x\in[0,+\infty)$

$y=\log_a x$，　　　$D_f: x\in(0,+\infty)$

$y=\sin x$ 或 $\cos x$，　　　$D_f: x\in(-\infty,+\infty)$

$y=\tan x$，　　　$D_f: x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in Z$

$y=\cot x$，　　　$D_f: x\neq k\pi, k\in Z$

$y=\arcsin x$ 或 $\arccos x$，　　　$D_f: x\in[-1,1]$

Ⅱ　对于分段函数，其定义域是各段定义域的并集；

Ⅲ　对于由若干初等函数(包括基本初等函数)通过加、减、乘、除四则运算形式表示的初等函数，其定义域即为各简单函数的定义域所构成的不等式组的解集；

Ⅳ　对于复合函数，其定义域的求法一般是从外层向里层逐步求，具体求法为：求 $f[g(x)]$ 的定义域时(其中 $f(x)$ 为基本初等函数)，首先根据基本初等函数 $f(x)$ 的定义域，给出函数 $g(x)$ 的取值范围，通常得到的是关于 $g(x)$ 的可解不等式，然后解该不等式即得原复合函数的定义域.

【例 1.1】　求下列函数的定义域

(1) $F(x)=\displaystyle\int_{x^2}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}dt$；　　　(2) $y=(x-|x|)\sqrt{-\sin^2\pi x}$

(3) 设函数 $f(x)=\lg\dfrac{x}{x-2}+\arcsin g(x)$ 的定义域是 $[-3,0)\cup(2,3)$，则 $g(x)=(\quad)$.

(a) x^3　　(b) 3^x　　(c) $\dfrac{x}{3}$　　(d) $3x$

【解】(1) 该函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 初学者易写成 $D_f: x\neq 0$，究其原因是对可积函数类不甚了解. 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，所以 $x=0$ 是被积函数的第一类间断点，因此 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在包含 $x=0$ 的区间内积分有意义.

(2) 依题设有 $-\sin^2\pi x\geqslant 0$，但 $\sin^2\pi x\geqslant 0\Rightarrow\quad -\sin^2\pi x\leqslant 0$

于是有 $\sin^2\pi x = 0 \Rightarrow x = k(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

又 当 $x \geqslant 0$ 时, $x - |x| = 0$, 即使 $\sqrt{-\sin^2\pi x}$ 不属于实数范围, 但运算仍有意义.

故其定义域为 $\begin{cases} x = k(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \\ x \geqslant 0 \end{cases}$, 即 $x \geqslant 0$ 及 $x = -k$.

(3) $\begin{cases} \dfrac{x}{x-2} > 0 \\ |g(x)| \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \text{ 或 } x < 2 \\ |g(x)| \leqslant 1 \end{cases}$, 由排除法可知应选(c).

【例 1.2】 设 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}} + \lg(x-2)$, 求

(1) $f(x)$ 的定义域;　　(2) $f(\ln x)$ 的定义域;

(3) $f(x+a) + f(x-a)$ 的定义域 $(a > 0)$.

【解】 (1) $\begin{cases} 3 - x > 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow 2 < x < 3$, 即 $D_f = (2,3)$

(2) $2 < \ln x < 3 \Rightarrow e^2 < x < e^3$

(3) $\begin{cases} 2 < x + a < 3 \\ 2 < x - a < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - a < x < 3 - a \\ 2 + a < x < 3 + a \end{cases}$

当 $a = \dfrac{1}{2}$ 时, $f(x+a) + f(x-a)$ 的定义域为空集

当 $0 < a < \dfrac{1}{2}$ 时, $f(x+a) + f(x-a)$ 的定义域为 $D_f = (2+a, 3-a)$

当 $a > \dfrac{1}{2}$ 时, $f(x+a) + f(x-a)$ 的定义域为空集.

故 $f(x+a) + f(x-a)(a > 0)$ 的定义域是 $D_f = (2+a, 3-a)(0 < a < \dfrac{1}{2})$.

题型(二) 有关函数性质的命题

I 判别函数的奇偶性

【解题思路】 判别给定函数的奇偶性的基本方法是:(1) 主要是根据奇偶性的定义,有时也用其运算性质.即 ① 奇函数的代数和仍为奇函数;偶函数的代数和仍为偶函数;② 偶数个奇(或偶)函数的积为偶函数;③ 一奇函数与一偶函数的乘积为奇函数.(2) $f(x) + f(-x) = 0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法;(3) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的,若函数的定义域关于原点不对称,则该函数就不是奇偶函数.

【例 1.3】 判别下列函数之奇偶性

(1) $F(x) = g(x)\left(\dfrac{1}{a^x - 1} + \dfrac{1}{2}\right) + |x|\operatorname{sgn}x$, 其中 $a > 0, a \neq 1$, $g(x)$ 为奇函数;

(2) $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \int_0^x f(t^2)dx$, 其中 $f(x)$ 是连续函数;

(3) $F(x) = \int_0^x t[f(t) + f(-t)]dt$, 其中 $f(x)$ 为连续函数;

(4) $F(x) = \int_0^x \cos(b + t)\cos(b - t)dt, b \neq 0$;

(5) $F(x) = f(x) + \int_0^x [\int_0^u f(t)dt]du$, 其中 $f(x)$ 为连续奇函数.

【解】 (1) 令 $F_1(x) = g(x)(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}), \varphi(x) = \frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}, F_2(x) = |x| \operatorname{sgn} x$

$\because \quad \varphi(x)+\varphi(-x) = \frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2} = \frac{1-a^x}{a^x-1}+1 = 0$

$\therefore \quad \varphi(x)$ 为奇函数. 又 $g(x)$ 为奇函数，因此 $F_1(x)$ 为偶函数.

又 $F_2(x) = |x| \operatorname{sgn} x = x$, 显然 $F_2(x)$ 是奇函数，而 $F_1(x)$ 为偶函数

故 $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ 为非奇非偶函数.

(2) 令 $F_1(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $F_2(x) = \int_0^x f(t^2)dt$

$\because \quad F_1(x)+F_1(-x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})+\ln(-x+\sqrt{(-x)^2+1}) = \ln 1 = 0$

$\therefore \quad F_1(x)$ 为奇函数.

又 $F_2(-x) = \int_0^{-x} f(t^2)dt \xlongequal{令 u=-t} -\int_0^x f(u^2)du = -F_2(x)$

$\therefore \quad F_2(x)$ 为奇函数，且 $F_1(x)$ 为奇函数.

故 $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ 为奇函数. $f(t)=f(-t)$

(3) 显然 $f(t)+f(-t)$ 是偶函数，即可知 $t[f(t)+f(-t)]$ 是奇函数，而对任意连续奇函数 $\varphi(t)$, $\Phi(t) = \int_0^x \varphi(t)dt$ 是偶函数. 因为

$$\Phi(-x) = \int_0^{-x}\varphi(t)dt = -\int_0^{-x}\varphi(-t)dt \xlongequal{令 t=-u} \int_0^x \varphi(u)du = \Phi(x)$$

(4) $\cos(b+t)\cos(b-t) = \frac{1}{2}(\cos 2t + \cos 2b)$ 是偶函数. 而对任意连续偶函数 $\varphi(t)$, $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt$ 是奇函数，因为

$$\Phi(-x) = \int_0^{-x}\varphi(t)dt = \int_0^{-x}\varphi(-t)dt \xlongequal{令 t=-u} -\int_0^x \varphi(u)du = -\Phi(x).$$

(5) 因 $f(x)$ 为连续奇函数，由以上分析可知 $\int_0^x[\int_0^u f(t)dt]du$ 是奇函数，故 $F(x)$ 是奇函数.

Ⅱ 求或判别函数的周期(性)

【解题思路】 *求或判别给定函数的周期性的基本方法是：主要根据周期函数的定义，有时也用其运算性质，即(1) 若 $f(x)$ 的周期为 T，则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$；(2) 若 $f(x), g(x)$ 的周期均为 T，则 $f(x) \pm g(x)$ 的周期也为 T；(3) 若 $f(x), g(x)$ 的周期分别为 $T_1, T_2 (T_1 \neq T_2)$，则 $f(x) \pm g(x)$ 的周期是 T_1, T_2 的最小公倍数.*

【例 1.4】 定义在 R 上的函数 $f(x)$ 为周期函数的充要条件是( )

(a) $f(x)$ 的图象分别关于 y 轴及与其平行的另一直线对称；

(b) 存在 $T>0$，使 $f(x+T) = -f(x)$；

(c) $f(x)>0$，且存在 $T>0$，使 $f(x+T) = \frac{1}{-f(x)}$；

(d) $f(-x)$ 是周期函数.

【解】 对于(a). 该条件充分但不必要. 充分性证明如下：设和 y 轴平行的 $f(x)$ 的对称直线是 $x=a$. 点 $(x,0)$ 关于 $x=a$ 的对称点是 $(2a-x,0)$，故 $f(x) = f(2a-x)$. 又 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称，$f(x)$ 为偶函数，则 $f(x) = f(x-2a)$. 若 $a<0$, $T=-2a>0$，结论显然成立；若 $a>$

0，用 x 替换上式中的 $x-2a$，即得 $f(x)=f(x+2a)$，$T=2a>0$，结论成立．充分性得证．因周期函数不必是偶函数，故该条件不必要．

对于(b)．该条件充分而不必要．充分性证明如下：由题设有 $f(x+2T)=-f(x+T)=f(x)$，故 $f(x)$ 是周期为 $2T$ 的周期函数．例如 $f(x)=x-[x]+1$，是以 1 为周期的周期函数，对任意 $x\in R$，$f(x)\geqslant 1$，$-f(x)\leqslant -1$．故不存在 $T>0$，使 $f(x+T)=-f(x)$．因此该条件不必要．

对于(c)．该条件充分但不必要．充分性证明如下：由题设有

$$f(x+2T)=-\frac{1}{f(x+T)}=-\frac{1}{-\dfrac{1}{f(x)}}=f(x).$$

由此可知 $f(x)$ 是以 $2T$ 为周期的周期函数，周期函数不必要是非负的，例如 $y=\sin x$，故该条件不必要．

对于(d)．该条件充分且必要，因 $f(x)$ 是周期函数，即存在 $T>0$，使 $f(x+T)=-f(x)$，等价于 $f(-x+T)=f(-x)$，即等价于 $f(-x)$ 是周期函数．

综上所述，应选(d)．

【例 1.5】 求 c 之值，使 $(b+c)\sin(b+c)-(a+c)\sin(a+c)=0$，其中 $b>a$，且均为常数．

【解题提示】 本题若采用解方程的方法求 c 值将是很困难的，如果运用函数的奇偶性将很简便．

【解】 令 $f(x)=x\sin x$，则 $f(x)$ 是偶函数，依题设即求 c，使

$f(b+c)=f(a+c)$ 成立．又 $a\neq b$，则有

$$a+c=-(b+c)\ \Rightarrow\ c=-\frac{1}{2}(a+b).$$

Ⅲ 判别函数的有界性

【解题思路】 判别给定函数在区间 Ⅰ 上的有界性，主要是根据其定义和连续函数在有限闭区间上必有界这一性质来判别．

【例 1.6】 设在 $[1,+\infty)$ 上，$0<f'(x)<\dfrac{2}{x^3}$，证明 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界．

【证】 因 $0<f'(x)<\dfrac{2}{x^3}$，根据积分性质得

$$\int_1^x 0dt<\int_1^x f'(t)dt<\int_1^x \frac{2}{x^3}dt\quad (x>1)$$

即
$$0<f(x)-f(1)<-\frac{1}{x^2}+1\qquad (x>1)$$

亦即
$$f(1)<f(x)<-\frac{1}{x^2}+1+f(1)\quad (x>1)$$

所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界．

【例 1.7】 试证 $f(x)=xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界．

【解题提示】 我们知道有限闭区间上连续的函数必有界．但本题是无穷区间，为此只需证明极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 都存在即可．

【证】 因为 $f(-x)=f(x)$，即 $f(x)$ 是偶函数，所以只需证明 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界．

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{\dfrac{1}{x}e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{2e^{x^2}-\dfrac{1}{x^2}e^{x^2}}=\frac{1}{2}$$

因而存在 $A > 0$，使得对一切 $x \in [A, +\infty)$ 有 $0 < f(x) < 1$，又 $f(x)$ 在 $[0, A]$ 上连续，故存在 $M_1 > 0$，使得对一切 $x \in [0, A]$，有 $0 \leqslant f(x) \leqslant M_1$，取 $M = max(1, M_1)$，则对一切 $x \in [0, +\infty)$，有 $0 \leqslant f(x) \leqslant M$，故命题得证.

【例 1.8】 设函数 $f(x)$ 在 $[1,4)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = A \neq 0$，试证 $f(x)$ 在 $[1,4)$ 上有界.

【解题提示】 若 $f(x)$ 在闭区间上连续，则 $f(x)$ 必有界. 题设中 $[1,4)$ 是半开半闭区间，$f(x)$ 的有界性在区间 $[1,4)$ 的右端得不到定理的保证. 根据有极限必有界的性质，$[1,4)$ 的右端的有界性，可由 $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = A$ 得到.

【证】 函数 $f(x)$ 在 $x_0 = 4$ 处可以补上一个函数值 $f(4) = A$，即在 $[1,4)$ 上就连续了. 设

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in [1,4) \\ A & , x = 4 \end{cases}$$

此时 $F(x)$ 在 $[1,4]$ 上连续，故必有界，即 $|F(x)| \leqslant G$，而 $|f(x)| \leqslant |F(x)| \leqslant G$，故 $f(x)$ 在 $[1,4)$ 上有界.

Ⅳ 判别函数的单调性

【解题思路】 判别或证明某函数 $f(x)$ 在区间 Ⅰ 上的增减性，若题设没有言明函数 $f(x)$ 在区间 Ⅰ 上可导，则用单调性的定义判别或证明之；若题设告诉了函数 $f(x)$ 在区间 Ⅰ 上可导，则利用导数判别法（重点）比较简便.

【例 1.9】 已知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导，且 $f(x)$ 单调下降，证明

$$F(x) = \frac{1}{x - a}\int_a^x f(t)dt$$

在 (a, b) 内也单调下降.

【证】 因为 $F(x)$ 在 (a, b) 内可导，因此有

$$F'(x) = \frac{f(x)}{x - a} - \frac{1}{(x - a)^2}\int_a^x f(t)dt = \frac{1}{x - a}\left[f(x) - \frac{1}{x - a}\int_a^x f(t)dt\right]$$

又 $$\int_a^x f(t)dt = f(c)(x - a) \geqslant f(x)(x - a), \quad c \in (a, x)$$

于是可得 $F'(x) \leqslant 0$，即 $F(x)$ 在 (a, b) 内单调下降.

题型（三） 求复合函数的表达式

将两个或两个以上函数进行复合，通常有以下几种解题方法：

1. 代入法

将一个函数的自变量用另一个函数的表达式替代，这种构成复合函数的方法称之为代入法，该法适用于初等函数的复合.

【例 1.10】 设 $f(x) = \dfrac{x}{x - 1}$，$f_2(x) = f[f(x)]$，$f_3(x) = f(f(f(x)))$，$\cdots$，$f_n(x) = f(f(f\cdots(f(x))))$，求 $f_n(x)$，$f(\dfrac{1}{f(x)})$，$x \neq 0, x \neq 1$.

【解】 令 $f_1(x) = \dfrac{x}{x - 1}$，则

$$f_2(x) = f(f_1(x)) = \frac{x}{x - 1}\Big/\frac{x}{x - 1} - 1 = x$$
$$f_3(x) = f(f_2(x)) = f(x)$$
$$f_4(x) = f(f_3(x)) = f(f(x)) = x$$

于是
$$f_n(x)=\begin{cases}f(x)=\dfrac{x}{x-1} & ,n=2k-1\\ x & ,n=2k\end{cases},k=1,2,\cdots$$

$$f(\frac{1}{f(x)})=\frac{1}{f(x)}\Big/\frac{1}{f(x)}-1=\frac{1}{1-f(x)}=1-x,x\neq 0,x\neq 1.$$

2. 分析法

所谓分析法就是抓住最外层函数定义域的各区间段，结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，从而得出复合函数的方法．该法适用于初等函数与分段函数，或分段函数之间的复合．

【例 1.11】 设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1\\ x, & x\geqslant 1\end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<0\\ x^2-1, & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f[\varphi(x)]$．

【解】 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1\\ \varphi(x), & \varphi(x)\geqslant 1\end{cases}$

1° 当 $\varphi(x)<1$ 时：

当 $x<0$ 时，$\varphi(x)=x+2<1$，即$\begin{cases}x<0\\ x<-1\end{cases}\Rightarrow x<-1$

当 $x\geqslant 0$ 时，$\varphi(x)=x^2-1<1$，即$\begin{cases}x\geqslant 0\\ -\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow 0\leqslant x<\sqrt{2}$

2° 当 $\varphi(x)\geqslant 1$ 时：

当 $x<0$ 时，$\varphi(x)=x+2\geqslant 1$，即$\begin{cases}x<0\\ x\geqslant -1\end{cases}\Rightarrow -1\leqslant x<0$

当 $x\geqslant 0$ 时，$\varphi(x)=x^2-1<1$，即$\begin{cases}x\geqslant 0\\ x\geqslant -\sqrt{2}\text{ 或 }x\leqslant -\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow x\geqslant\sqrt{2}$

综上所述可得 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{x+2}, & x<-1\\ x+2, & -1\leqslant x<0\\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2}\\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}$

根据历年考研试题来看，求复合函数的表达式主要有以下几种题型：

Ⅰ 已知 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 的表达式求 $f[\varphi(x)]$ 或 $\varphi[f(x)]$ 的表达式

【解题思路】 求解该题型的基本方法是代入法．即根据复合函数的概念或函数记号的意义，用 $\varphi(x)$ 替换 $f(x)$ 中的 x 或用 $f(x)$ 替换 $\varphi(x)$ 中的 x，便得 $f[\varphi(x)]$ 或 $\varphi[f(x)]$ 的表达式．

【例 1.12】 已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}(x\neq -1)$，$g(x)=1-x$，求 $f[g(x)]$，$f[f(x)]$，$g[f(x)]$ 及 $g[g(x)]$ 的表达式，并指出它们的定义域．

【解】 $f[g(x)]=\dfrac{1-(1-x)}{1+(1-x)}=\dfrac{x}{2-x}\quad(x\neq 2)$

$$f[f(x)]=\frac{1-\dfrac{1-x}{1+x}}{1+\dfrac{1-x}{1+x}}=x\quad(x\neq -1)$$

$$g[f(x)]=1-\frac{1-x}{1+x}=\frac{2x}{1+x}\quad(x\neq -1)$$

$$g[g(x)]=1-(1-x)=x$$

Ⅱ　**已知 $f[\varphi(x)]$ 的表达式，求 $f(x)$ 的表达式**

【解题思路】　该题型的基本解法是令 $\varphi(x)=t$，解出 $x=\varphi^{-1}(t)$，求出 $f(t)$，再将 t 换成 x 即得 $f(x)$ 的表达式．一般情况下，从 $\varphi(x)=t$ 反解出 x，有时很复杂，因此需采用代数变形等特殊技巧，根据所给表达式凑成 $\varphi(x)$ 的函数，然后利用函数的“无关”特性即得 $f(x)$ 的表达式．

【例 1.13】　已知 $f(\tan x+\dfrac{1}{\tan x})=\tan^2x+\dfrac{1}{\tan^2x}+3$，$x\neq(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ 及 $x\neq k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，求 $f(x)$ 的表达式．

【解】 若令 $\tan x+\dfrac{1}{\tan x}=t$，反解出 x 较繁．可直接将所给表达式凑成 $\tan x+\dfrac{1}{\tan x}$ 的函数，然后利用函数的“无关”特性即得 $f(x)$ 的表达式．

$$f(\tan x+\frac{1}{\tan x})=\tan^2x+\frac{1}{\tan^2x}+3=(\tan x+\frac{1}{\tan x})^2+1$$

即　$$f(x)=x^2+1$$

Ⅲ　**已知 $f[g(x)]$ 的表达式，求 $f[\varphi(x)]$ 的表达式**

【解题思路】　该题型实际上是前面两种题型的综合，其解题方法是按“题型Ⅱ”由 $f[g(x)]$ 求出 $f(x)$，再按“题型Ⅰ”由 $f(x)$ 求出 $f[\varphi(x)]$．

【例 1.14】　设 $f(\sin\dfrac{x}{2})=\cos x+1$，求 $f(\cos\dfrac{x}{2})$．

【解】　$$f(\sin\frac{x}{2})=\cos x+1=1-2\sin^2\frac{x}{2}+1=2-2\sin^2\frac{x}{2}$$

因此　$$f(x)=2-2x^2$$

从而　$$f(\cos\frac{x}{2})=2-2\cos^2\frac{x}{2}=1-\cos x$$

Ⅳ　**已知 $f(x)$，$f[g(x)]$ 的表达式求 $g(x)$ 的表达式及其定义域**

【解题思路】　这是已知复合函数的表达式反过来求“中间变量”$g(x)$ 的表达式的题型．其解题关键是由 $f(x)$ 写出 $f[g(x)]$ 的一般式，然后令其与已知 $f[g(x)]$ 的表达式相等，即可求得 $g(x)$ 的表达式．

【例 1.15】　已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[g(x)]=1-x$ 且 $g(x)\geqslant0$，求 $g(x)$ 并写出它的定义域．

【解】　由 $f(x)=e^{x^2}$ 可得 $f[g(x)]=e^{g^2(x)}$

又　$$f[g(x)]=1-x$$

于是有　$e^{g^2(x)}=1-x$，因为 $g(x)\geqslant0$，所以有

$$g(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$$

由 $\ln(1-x)\geqslant0$，知 $1-x\geqslant1$，即 $x\geqslant0$．

题型(四)　求函数 $f(x)$ 的表达式(重点)

这是常考题型，一般是给定某函数方程，要求函数 $f(x)$ 的表达式，通常有以下解题方法：

Ⅰ　**利用函数表示法与用何字母表示无关的“特性”求函数 f(x) 的表达式**

【例 1.16】　设 $f'(\sin^2x)=\cos2x+\tan^2x$，$0<x<1$，求 $f(x)$．

【解题提示】　对于给定的含有三角函数的函数方程，一般是先将表达式化为对应号 $f()$ 中变量的相关形式，再用“特性”求 $f(x)$．

【解】　因 $f'(\sin^2x)=\cos2x+\tan^2x=1-2\sin^2x+\dfrac{1}{1-\sin^2x}-1$

$$= \frac{1}{1-\sin^2 x} - 2\sin^2 x$$

则. $$f'(x) = \frac{1}{1-x} - 2x \qquad (0 < x < 1)$$

故 $$f(x) = -\ln|1-x| - x^2 + C \qquad (0 < x < 1).$$

Ⅱ　利用极限与连续求函数 f(x) 的表达式

【例 1.17】 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，对任意正数 x 有 $f(x^2) = f(x)$，且 $f(3) = 5$，求 $f(x)$.

【解】 当 $x > 0$ 时，由 $f(x^2) = f(x)$，有

$$f(x) = f(\sqrt{x}) = f(x^{\frac{1}{4}}) = \cdots = f(x^{\frac{1}{2n}})$$

又由连续函数极限符号与函数符号的可交换性，有

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x^{\frac{1}{2n}}) = f(\lim_{n\to+\infty} x^{\frac{1}{2n}}) = f(1)$$

故 $$f(x) = f(1) = f(3) = 5, x \in (0,+\infty).$$

【例 1.18】 设 $P(x)$ 是多项式，且 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P(x)-x^3}{x^2} = 2, \lim\limits_{x\to 0}\frac{P(x)}{x} = 1$，求 $P(x)$.

【解】 $\because \lim\limits_{x\to 0} \frac{P(x)-x^3}{x^2} = 2$，$\quad \therefore P(x)$ 的最高次项应为 x^3，二次项为 $2x^2$.

于是　设 $P(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$，其中 a、b 为待定常数.

又　$\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{P(x)}{x} = 1$，$\therefore P(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$ 与 x 是等价无穷小（$x \to 0$ 时），从而得

$$b = 0, a = 1$$

故　$P(x) = x^3 + 2x^2 + x$

Ⅲ　利用导数的定义求函数 f(x) 的表达式

【例 1.19】 设对任意 x, y 有 $f(xy) = f(x) + f(y)$，且 $f'(1) = a (a \neq 0)$. 试求 $x > 0$ 时 $f(x)$ 的表达式.

【解】 令 $x = y = 1$，得　$f(1) = f(1) + f(1) \quad \Rightarrow \quad f(1) = 0$

当 $x \neq 0$ 时，
$$\lim_{y\to 0}\frac{f(x+xy)-f(x)}{xy} = \lim_{y\to 0}\frac{f(x)+f(1+y)-f(x)}{xy} = \lim_{y\to 0}\frac{f(1+y)-f(1)}{y}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x}f'(1) = \frac{a}{x}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{a}{x} \quad \Rightarrow \quad f(x) = a\ln x (x > 0).$$

Ⅳ　利用变上限积分的可导性求函数 $f(x)$ 的表达式（重点）

【解题思路】 象这类 $f(x)$ 满足含有变上限积分的方程，要求 $f(x)$，一般先利用变上限积分的可导性，将积分方程转化为微分方程，然后利用积分或求解微分方程的方法得出 $f(x)$ 的表达式. 注意方程本身通常蕴含定解条件

【例 1.20】 求满足方程 $\int_0^x f(t)dt = x + \int_0^x tf(x-t)dt$ 的可微函数 $f(x)$ 的表达式.

【解】 $$\int_0^x tf(x-t)dt \xlongequal{令 u = x - t} \int_x^0 (x-u)f(u)(-du)$$

$$= x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du$$

于是原方程变为 $$\int_0^x f(t)dt = x + x\int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du$$

两边对 x 求导得 $\quad f(x)=1+\int_0^x f(u)du+xf(x)-xf(x)=1+\int_0^x f(u)du$

两边再对 x 求导得 $\quad f'(x)=f(x)$

上式积分得 $\quad f(x)=ce^x$

由 $\quad f(0)=1 \Rightarrow c=1,$

故所求函数为 $\quad f(x)=e^x$

注:对于抽象复合函数,在运算之前一定要做变量替换使其成为 $f(u)$ 的形式.

【例 1.21】 已知可微函数 $f(x)$ 满足 $\int_1^x \frac{f(t)}{f^2(t)+t}dt=f(x)-1$.求(1) $f(1)$;(2) $f(x)$ 的表达式.

【解】 (1) 在方程 $\int_1^x \frac{f(t)}{f^2(t)+1}dt=f(x)-1$ 的两端,令 $x=1$,得 $f(1)=1$.

(2) 方程两端对 x 求导,得

$$\frac{f(x)}{f^2(x)+x}=f'(x) \qquad ①$$

记 $y=f(x)$,并视 y 为自变量,x 为未知函数,则方程 ① 变为

$$\frac{dx}{dy}-\frac{x}{y}=y$$

解此方程得 $\quad x=e^{\int\frac{1}{y}dy}(c+\int ye^{-\int\frac{1}{y}dy})$

$$=y(c+\int y\cdot\frac{1}{y}dy)=cy+y^2$$

由条件 $\quad y|_{x=1}=1$ 定出 $C=0$,所以 $x=y^2$,从而 $y=\pm\sqrt{x}$

由初值条件 $\quad y|_{x=1}=1$ 知,$y=f(x)=\sqrt{x}$.

【例 1.22】 设可微函数 $f(x)$ 满足方程 $f(x)=e^x+e^x\int_0^x[f(t)]^2dt$,求 $f(x)$.

【解】 方程两边对 x 求导得 $\quad f'(x)=e^x+e^x\int_0^x[f(t)]^2dt+e^x[f(x)]^2$

即 $\quad f'(x)-f(x)=e^x[f(x)]^2$, $\quad$ 令 $u=\frac{1}{f(x)}$,则有

$$u'+u=-e^x$$

解此方程得 $\quad u=ce^{-x}-\frac{1}{2}e^x$

即 $\quad f(x)=\frac{1}{u}=\frac{1}{ce^{-x}-\frac{1}{2}e^x}=\frac{2}{2ce^{-x}-e^x}$

Ⅴ 利用连续函数的可积性及原函数的连续性求 f(x)

【例 1.23】 (1) 设 $f(x)=x^2-x\int_0^2 f(x)dx+2\int_0^1 f(x)dx$,求 $f(x)$.

(2) 设 $f(x)=x-\int_0^\pi f(x)\cos x dx$,求 $f(x)$.

【解题提示】 因定积分是个数值,因此可令题设中的某定积分为常数,然后采用等式两边同时作定积分(其上下限据题设中给定的定积分的上下限来确定)的方法来求解.

【解】 (1) 令 $A=\int_0^2 f(x)dx$, $\quad B=\int_0^1 f(x)dx$,则原式等变为