教育部高职高专推荐教材

经济应用数学基础(一)

微积分
学习与考试指导

(经济类与管理类)

周誓达 编著

WEI JI FEN

XUE XI YU KAO SHI ZHI DAO

高自考 学历文凭 专升本辅导书

中国人民大学出版社

教育部高职高专推荐教材

经济应用数学基础（一）

微 积 分
学习与考试指导

（经济类与管理类）

周誓达 编著

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

经济应用数学基础（一）微积分学习与考试指导.
经济类与管理类/周誓达编著.
北京：中国人民大学出版社，2003
教育部高职高专推荐教材

ISBN 7-300-04748-3/O·55

Ⅰ. 经…
Ⅱ. 周…
Ⅲ. 微积分-高等学校：技术学校-教学参考资料
Ⅳ. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 047662 号

教育部高职高专推荐教材

经济应用数学基础（一）

微积分

学习与考试指导

（经济类与管理类）

周誓达　编著

出版发行：中国人民大学出版社
（北京中关村大街 31 号　邮编 100080）
邮购部：62515351　门市部：62514148
总编室：62511242　出版部：62511239
本社网址：www.crup.com.cn
人大教研网：www.ttrnet.com
经　　销：新华书店
印　　刷：北京鑫丰华彩印有限公司

开本：850×1168 毫米 1/32　印张：13.375
2003 年 6 月第 1 版　2003 年 6 月第 1 次印刷
字数：333 000

[illegible]00元
[illegible]本社负责调换）

前　言

本套经济应用数学基础学习与考试指导是为高职高专经济类与管理类各专业编著的经济应用数学基础辅导书，包括《微积分学习与考试指导》、《线性代数与线性规划学习与考试指导》及《概率论与数理统计学习与考试指导》。其特点是：突出重点，深入浅出，举一反三，便于自学。本套书内容完全适合全国高等教育经济类与管理类自学考试、学历文凭考试及专升本考试的要求，因此还可以作为这些考试的主要辅导书。

《微积分学习与考试指导》是教育部高职高专推荐教材经济应用数学基础(一)《微积分》(修订本)的辅导书，包括三部分内容：各章学习与考试要点、补充例题及全部习题详细解答。本书引导读者在全面学习的基础上抓住重点，明确主要内容，深入理解主要概念与主要理论，熟练掌握主要运算方法，并适当拓宽知识面，以适应各种考试的要求，把好钢用在刀刃上，达到事半功倍的效果。

本着对读者高度负责的精神，本书整个书稿都经过再三验算，作者自始至终参与排版校对，实现零差错。欢迎广大读者提出宝贵意见，本书将不断改进与完善，坚持不懈地提高质量，突出自己的特色，更好地为科教兴国战略服务。让我们永远记住并实践马克思的名言："在科学上面是没有平坦的大路可走的，只有那在崎岖小路的攀登上不畏劳苦的人，才有希望到达光辉的顶点。"

周誓达

2003年5月28日于北京

目　　录

第一章　函　　数

一、学习与考试要点

1. 反函数

求函数 $y = f(x)$ 的反函数的方法是：先从函数表达式 $y = f(x)$ 出发，将变量 x 表示为 y 的函数；再将变量记号 x 改写为 y，变量记号 y 改写为 x，就得到所求反函数 $y = f^{-1}(x)$.

2. 函数定义域

从函数表达式本身确定函数定义域的基本情况只有四种：

(1) 分式 $\frac{1}{P(x)}$，要求分母 $P(x) \neq 0$；

(2) 偶次根式 $\sqrt[2n]{Q(x)}$（n 为正整数），要求被开方式 $Q(x) \geqslant 0$；

(3) 对数式 $\log_a R(x)$ ($a > 0, a \neq 1$)，要求真数 $R(x) > 0$；

(4) 反正弦式 $\arcsin S(x)$ 与反余弦式 $\arccos S(x)$，要求正弦值或余弦值 $S(x)$ 满足 $-1 \leqslant S(x) \leqslant 1$.

求函数定义域的方法是：观察所给函数表达式是否含上述四种基本情况. 如果函数表达式含上述四种基本情况中的一种或多种，则解相应的不等式或不等式组，得到函数定义域；如果函数表达式不含上述四种基本情况中的任何一种，则说明对自变量取值没有任何限制，所以函数定义域为全体实数，即 $D = (-\infty, +\infty)$.

若两个函数的定义域相同且对应规则也相同，则这两个函数是同一个函数；若两个函数的定义域不相同或对应规则不相同，则这两个函数不是同一个函数.

3. 函数值

关于函数值问题的类型有两种：

(1) 已知函数 $f(x)$ 与 $u(x)$，求复合函数 $f(u(x))$ 的表达式

这时在函数 $f(x)$ 的表达式中，将变量记号 x 都改写为括号，即把函数 $f(x)$ 的对应关系表示为括号的形式，再在括号内填上中间变量 $u(x)$，实际上就是在函数 $f(x)$ 的表达式中，自变量记号 x 都换成中间变量 $u(x)$，就得到复合函数 $f(u(x))$ 的表达式.

(2) 已知复合函数 $f(u(x))$，求函数 $f(x)$ 的表达式

这时令中间变量 $u=u(x)$，通过计算得到函数 $f(u)$ 作为中间变量 u 的表达式，再将中间变量记号 u 换成自变量记号 x，就得到函数 $f(x)$ 的表达式.

4. 函数奇偶性

已知函数 $f(x)$ 的定义域 D 是关于原点的对称区间，对于任意点 $x\in D$，若恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为奇函数；若恒有 $f(-x)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为偶函数.

当然，许多函数既不是奇函数，也不是偶函数，称为非奇非偶函数.

5. 函数有界性

已知函数 $f(x)$ 在区间 I(可以是开区间，也可以是闭区间或半开区间) 上有定义，若存在一个常数 $M>0$，使得对于所有点 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界；若对于任意常数 $N>0$，存在点 $x_0\in I$，恒有 $|f(x_0)|>N$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

6. 分段函数的定义域与函数值

观察分段函数自变量的取值范围，所有分段区间以及分界点的并集为分段函数定义域.

观察分段函数在各分段区间上的对应规则及在分界点处的取

值，明确所给自变量取值属于哪个分段区间或分界点，再用该分段区间上的数学表达式计算函数值或等于该分界点处的函数取值.

二、补充例题

例 1　单项选择题

函数 $y=\dfrac{x-1}{\lg x}+\sqrt{16-x^2}$ 的定义域 $D=(\quad)$.

(a)(0,1)　　(b)$(0,1)\cup(1,4)$

(c)(0,4)　　(d)$(0,1)\cup(1,4]$

解：注意到所给函数表达式含第一种、第三种及第二种基本情况，应该要求分母 $\lg x\neq 0$ 且真数 $x>0$，同时应该要求被开方式 $16-x^2\geqslant 0$，解不等式组

$$\begin{cases}\lg x\neq 0\\ x>0\\ 16-x^2\geqslant 0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x\neq 1\\ x>0\\ x^2-16\leqslant 0\end{cases}$$

得到

$$\begin{cases}x\neq 1\\ x>0\\ -4\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

这些不等式所代表区间的交集就是此不等式组的解，得到函数定义域为

$$D=(0,1)\cup(1,4]$$

如图 1—1.

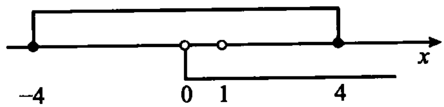

图 1—1

这个正确答案恰好就是备选答案(d),所以选择(d).

对于此题,在理解上面解法的基础上,还必须掌握下面的淘汰解法.由于单项选择题是指:在四项备选答案中,只有一项是正确的,从而意味着另外三项是错误的.若能找出三项错误备选答案,则剩下的那一项备选答案肯定是正确的,当然当选,这样可以迅速得到正确结果.

注意到点 $x=4$ 使得所给函数 y 表达式的第 1 项、第 2 项都有意义,当然使得函数 y 有意义,这说明它属于函数 y 的定义域,但是它不属于备选答案(a),(b),(c) 所给区间,却属于备选答案(d) 所给区间,因此备选答案(a),(b),(c) 所给区间都不是函数 y 的定义域,从而都落选.由于备选答案(a),(b),(c) 都已落选,备选答案(d) 当然当选,所以选择(d).

例 2　单项选择题

函数 $y=\dfrac{\lg(x+1)}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域 $D=($　　$)$.

(a)$(-1,+\infty)$　　　　(b)$[-1,+\infty)$

(c)$(1,+\infty)$　　　　(d)$[1,+\infty)$

解:注意到点 $x=1$ 使得分母 $\sqrt{x-1}=0$,当然使得函数 y 无意义,这说明它不属于函数 y 的定义域,但是它属于备选答案(a),(b),(d) 所给区间,却不属于备选答案(c) 所给区间,因此备选答案(a),(b),(d) 所给区间都不是函数 y 的定义域,从而都落选.由于备选答案(a),(b),(d) 都已落选,备选答案(c) 当然当选,所以选择(c).

例 3　填空题

已知函数 $f(x)=\lg x, g(x)=10^{2x+1}$，则复合函数 $y=f(g(x))$ 的反函数为______.

解：首先求出复合函数 $y=f(g(x))$ 的表达式，把函数 $f(x)$ 的对应关系用括号表示为

$$f(\quad)=\lg(\quad)$$

在括号内填上中间变量 $g(x)$，得到所求复合函数

$$y=f(g(x))=\lg g(x)=\lg 10^{2x+1}=2x+1$$

其次求出复合函数 $y=f(g(x))=2x+1$ 的反函数，从函数表达式 $y=2x+1$ 出发，有

$$x=\frac{1}{2}(y-1)$$

再将变量记号 x 改写为 y，变量记号 y 改写为 x，就得到所求反函数

$$y=\frac{1}{2}(x-1)$$

于是应将 $y=\frac{1}{2}(x-1)$ 直接填在空内.

例 4　填空题

已知函数 $f(x)=\log_2(x-2)$，则复合函数 $f(f(x))$ 的定义域用不等式表示为______.

解：首先求出复合函数 $f(f(x))$ 的表达式，把函数 $f(x)$ 的对应关系用括号表示为

$$f(\quad)=\log_2((\quad)-2)$$

在括号内填上中间变量 $f(x)$，得到所求复合函数

$$\begin{aligned}f(f(x))&=\log_2(f(x)-2)\\&=\log_2[\log_2(x-2)-2]\end{aligned}$$

其次求出复合函数 $f(f(x))$ 的定义域，注意到其函数表达式含第三种基本情况，解不等式组

$$\begin{cases} x-2>0 \\ \log_2(x-2)-2>0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x>2 \\ x>6 \end{cases}$$

得到函数定义域为

$$x>6$$

于是应将 $x>6$ 直接填在空内.

例 5　单项选择题

已知复合函数 $f(x+1)=x^2+x+1$,则复合函数 $f\left(\dfrac{1}{x+1}\right)=$ (　　).

(a) $\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{x+1}+1$　　(b) $\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{x+1}+1$

(c) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+1$　　(d) $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}+1$

解:令中间变量 $u=x+1$,从而有

$$x=u-1$$

得到

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= (u-1)^2+(u-1)+1 \\ &= u^2-u+1 \end{aligned}$$

这样将所给复合函数表达式化为

$$f(u)=u^2-u+1$$

把函数 $f(u)$ 的对应关系用括号表示为

$$f(\quad)=(\quad)^2-(\quad)+1$$

在括号内填上中间变量 $\dfrac{1}{x+1}$,得到所求复合函数

$$f\left(\frac{1}{x+1}\right)=\left(\frac{1}{x+1}\right)^2-\frac{1}{x+1}+1$$

$$=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}+1$$

这个正确答案恰好就是备选答案(b),所以选择(b).

例 6 单项选择题

已知函数 $f(x)$ 为定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的任意函数,则下列函数中( )为偶函数.

(a) $F(x)=f(|x|)$ (b) $G(x)=|f(x)|$

(c) $H(x)=xf(|x|)$ (d) $L(x)=x|f(x)|$

解:可以依次对备选答案进行判别.首先考虑备选答案(a):函数定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,考察

$$F(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=F(x)$$

说明函数 $F(x)=f(|x|)$ 为偶函数,从而备选答案(a)当选,所以选择(a).

至于备选答案(b):函数定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,考察

$$G(-x)=|f(-x)|$$

不一定等于 $G(x)$,说明函数 $G(x)=|f(x)|$ 不一定为偶函数,从而备选答案(b)落选;至于备选答案(c):函数定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,考察

$$H(-x)=-xf(|-x|)=-xf(|x|)=-H(x)$$

说明函数 $H(x)=xf(|x|)$ 为奇函数,从而备选答案(c)落选;至于备选答案(d):函数定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,考察

$$L(-x)=-x|f(-x)|\neq L(x)$$

说明函数 $L(x)=x|f(x)|$ 不为偶函数,从而备选答案(d)也落选,进一步说明选择(a)是正确的.

例 7 填空题

函数 $y=\lg(2x-1)$ 在区间 $(\frac{1}{2},1)$ 内的有界性是______.

解:在区间 $(\frac{1}{2},1)$ 内,自变量 x 取值可以无限接近于数 $\frac{1}{2}$,

这时真数$2x-1$取值可以无限接近于零，因而使得对应的对数$\lg(2x-1)$值为负且绝对值$|\lg(2x-1)|$即$|y|$可以无限增大，说明存在无限接近于数$\frac{1}{2}$的点，使得函数绝对值大于正的任意常数，因此函数$y=\lg(2x-1)$在区间$(\frac{1}{2},1)$内无界，于是应将无界直接填在空内.

例 8 单项选择题

已知分段函数

$$f(x)=\begin{cases}1,0\leqslant x\leqslant 1\\2,1<x\leqslant 4\end{cases}$$

则函数$F(x)=f(2x)-f(x+2)$的定义域$D=($　　$)$.

(a)$[-2,2]$　　(b)$[-2,4]$

(c)$[0,2]$　　(d)$[0,4]$

解:观察分段函数$f(x)$表达式中自变量x的取值范围，得到其定义域为闭区间$[0,4]$，从而对于复合函数$f(u)=f(u(x))$，中间变量$u=u(x)$的取值范围为闭区间$[0,4]$，即

$$0\leqslant u(x)\leqslant 4$$

函数$F(x)=f(2x)-f(x+2)$的定义域D为复合函数$f(2x)$与$f(x+2)$定义域的交集，中间变量分别为$u_1=2x$与$u_2=x+2$，解不等式组

$$\begin{cases}0\leqslant 2x\leqslant 4\\0\leqslant x+2\leqslant 4\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2\\-2\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$$

得到自变量x的取值范围

$$0\leqslant x\leqslant 2$$

于是函数$F(x)=f(2x)-f(x+2)$的定义域

$$D = [0,2]$$

这个正确答案恰好就是备选答案(c),所以选择(c).

三、习题一详细解答

1.01 已知数集 $A = \{1,3,4\}$,$B = \{3,5\}$,并规定全集 $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$,求:

(1)$A \cup B$　　(2)$A \cap B$

(3)$A - B$　　(4)$B - A$

(5)$\overline{A}$　　(6)$\overline{B}$

解:(1) 由于数集 A 与 B 的并集 $A \cup B$ 为数集 A 与 B 的所有元素构成的数集,于是得到并集

$$A \cup B = \{1,3,4,5\}$$

(2) 由于数集 A 与 B 的交集 $A \cap B$ 为数集 A 与 B 的所有公共元素构成的数集,于是得到交集

$$A \cap B = \{3\}$$

(3) 由于数集 A 与 B 的差集 $A - B$ 为属于数集 A 且不属于数集 B 的所有元素构成的数集,于是得到差集

$$A - B = \{1,4\}$$

(4) 由于数集 B 与 A 的差集 $B - A$ 为属于数集 B 且不属于数集 A 的所有元素构成的数集,于是得到差集

$$B - A = \{5\}$$

(5) 由于数集 A 的补集 $\overline{A}$ 为全集 Ω 中不属于数集 A 的所有元素构成的数集,于是得到补集

$$\overline{A} = \{2,5\}$$

(6) 由于数集 B 的补集 $\overline{B}$ 为全集 Ω 中不属于数集 B 的所有元素构成的数集,于是得到补集

$$\overline{B} = \{1,2,4\}$$

1.02　判断是非题

(1) 对应规则 $y > x$ 表示变量 y 为 x 的函数.　　　(　　)

解:无论变量 x 取任何一个实数值,变量 y 符合所给对应规则的取值恒为无限个实数值与之对应,因此所给对应规则不表示变量 y 为 x 的函数,说明所给结论不成立,于是应在括号内填上非.

(2) 对应规则 $y = 1$ 不表示变量 y 为 x 的函数.　　　(　　)

解:尽管所给对应规则不显含变量 x,但无论变量 x 取任何实数值,变量 y 符合所给对应规则的取值为惟一确定的实数值 1 与之对应,因此所给对应规则表示变量 y 为 x 的函数,说明所给结论不成立,于是应在括号内填上非.

(3) 对应规则 $x = y^3$ 表示变量 y 为 x 的函数.　　　(　　)

解:当变量 x 在全体实数集合内任取一个实数值时,由于变量 y 符合所给对应规则的取值恒为惟一确定的实数值与之对应,因此所给对应规则表示变量 y 为 x 的函数,说明所给结论成立,于是应在括号内填上是.

(4) 对应规则 $x = 1$ 不表示变量 y 为 x 的函数.　　　(　　)

解:由于所给对应规则不显含变量 y,意味着当变量 x 取值为实数值 1 时,变量 y 符合所给对应规则的取值为无限个实数值与之对应,因此所给对应规则不表示变量 y 为 x 的函数,说明所给结论成立,于是应在括号内填上是.

1.03　求下列函数的反函数:

(1)$y = 3x + 1$

解:从函数表达式 $y = 3x + 1$ 出发,有

$$x = \frac{1}{3}(y - 1)$$

再将变量记号 x 改写为 y,变量记号 y 改写为 x,就得到所求反函数

$$y = \frac{1}{3}(x - 1)$$

(2) $y = \sqrt[3]{x+1}$

解:从函数表达式 $y = \sqrt[3]{x+1}$ 出发,有

$$x = y^3 - 1$$

再将变量记号 x 改写为 y,变量记号 y 改写为 x,就得到所求反函数

$$y = x^3 - 1$$

(3) $y = 2^{-x} - 3$

解:从函数表达式 $y = 2^{-x} - 3$ 出发,根据指数函数与对数函数的关系,有

$$-x = \log_2(y+3)$$

因而

$$x = -\log_2(y+3)$$

再将变量记号 x 改写为 y,变量记号 y 改写为 x,就得到所求反函数

$$y = -\log_2(x+3)$$

(4) $y = \log_3(x-2)$

解:从函数表达式 $y = \log_3(x-2)$ 出发,根据对数函数与指数函数的关系,有

$$x - 2 = 3^y$$

因而

$$x = 3^y + 2$$

再将变量记号 x 改写为 y,变量记号 y 改写为 x,就得到所求反函数

$$y = 3^x + 2$$

1.04 确定下列函数的定义域 D:

(1) $y = \dfrac{3}{x-2}$

解:解不等式