●普通高等学校“十一五”规划教材●

Higher Algebra

高等代数

胡万宝　汪志华　陈素根　舒阿秀　编著

中国科学技术大学出版社

普通高等学校"十一五"规划教材

Higher Algebra

高等代数

胡万宝　汪志华　陈素根　舒阿秀　编著

中国科学技术大学出版社

内容简介

本书在介绍高等代数课程的传统内容时,在以下两方面进行了有益的探索:尽量做到经典与现代的有机融合;注重理论联系实际,重视在实践教学中培养学生的实践能力和创新能力.全书共分9章,其内容包括行列式、矩阵、线性空间、线性变换、多项式、特征值、λ-矩阵、二次型和欧氏空间.

本书内容编排由浅入深、循序渐进,符合现今二本学生的教学实际,可以作为高等学校数学与应用数学、信息与计算科学等专业的教科书,也可供相关专业师生和自学人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等代数/胡万宝等编著.—合肥:中国科学技术大学出版社,2009.8
ISBN 978-7-312-02504-4

Ⅰ.高…　Ⅱ.胡…　Ⅲ.高等代数—高等学校—教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第145560号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路96号,邮编:230026
网址:http://press.ustc.edu.cn
印刷　安徽联众印刷有限公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　710 mm×960 mm　1/16
印张　20
字数　403千
版次　2009年8月第1版
印次　2009年8月第1次印刷
定价　29.60元

前　　言

“高等代数”是数学与应用数学、信息与计算科学等专业学生学习的一门重要基础课程，在全国已有多种版本的教材，其中不乏经典的好教材，编写本书的主要目的是想为开设高等代数课程的二本院校提供一本比较合适的教材.

本教材是在安徽省精品课程“高等代数”长期教学中积累而成的.编写本教材的指导思想是：

(1)“高等代数”教材首先遵循该课程教学大纲的基本框架，并且覆盖高等代数课程的基本内容：行列式、矩阵、线性空间、线性变换、多项式、特征值、λ-矩阵、二次型和欧氏空间.但在具体授课时，可以根据学时数以及实际需要，有选择地讲解，为此，本教材中加星号的内容可以考虑选讲或者不讲.

(2)考虑到在实践教学中培养学生实践能力和创新能力的需要，在大部分章节中，引入适量的背景来导入理论知识，同时在掌握理论之后，再通过实际例子将理论知识融会贯通.本书精选出一些具有代表性的例题，给出了解题思路和分析方法，题后提示了解题中应注意的问题，目的在于启发学生并培养学生自学能力.

(3)考虑现今二本学生的基础条件，本书在内容编排上由浅入深、循序渐进.

(4)本书的章节编排顺序与其他教材有所不同，特别是将“线性方程组的解法和结构”放在“线性空间”一章里，目的是基于：① 用矩阵的秩来判别解的存在，而矩阵的秩在该章中详细讨论过；② 从线性空间的角度来理解线性方程组的解的结构.另外，本书中将“二次型”这一章挪到“特征值”之后，是为了将二次型的标准化与矩阵的正交化融合，使学生对这两部分有个整体统一的认识.

学数学做习题无疑是重要的.书中习题按难度分A、B两类，A类是为教材理论知识的掌握而设计的，在内容上重视基础理论，覆盖课程全部基本教学要求；B类稍有难度，是为学生能力提高而设计的，使学生能加深理解基本理论并融会贯通，熟练掌握基本的分析计算方法并举一反三，不断提高应试水平和知识的综合应用.

本书的第1、2、8、9章和第3、4、5、6、7章分别由陈素根老师和汪志华老师提供初稿，胡万宝教授和代数几何教研室主任舒阿秀老师做整体框架设计和最后的审定工作.另外，感谢郝庆一博士对本书提出的有益建议.还要感谢“高等代数”精品

课程组的全体成员以及研究生何荣荣、张俊校、张文兵、王贞、吴艳霞、蔡华平等对本书出版的支持和校稿做出的努力.

由于编者水平和经验有限,加之编写时间仓促,本书难免会有不妥之处,敬请广大读者批评指正.

胡万宝

2009 年 5 月

于安庆师范学院

目　录

第1章 行 列 式

1.1 若干准备知识

1.1.1 数域

数是数学的一个最基本的概念.我们的讨论就从这里开始.在历史上,数的概念经历了一个长期发展的过程,大体上看,是由自然数到整数、有理数,然后是实数,再到复数.这个过程反映了人们对客观世界认识的不断深入.按照所研究的问题,我们通常需要明确规定所考虑的数的范围.譬如说,任意两个整数的商不一定是整数,这就是说,限制在整数的范围内,除法不是普遍可以做的,而在有理数范围内,只要除数不为零,除法总是可以做的.因此,在数的不同范围内同一个问题的回答可能是不同的.我们经常会遇到的数的范围有全体有理数、全体实数以及全体复数,它们显然具有一些不同的性质.当然,它们也有很多共同的性质,在代数中经常是将有共同性质的对象统一进行讨论.关于数的加、减、乘、除等运算的性质通常称为数的**代数性质**.代数所研究的问题主要涉及数的代数性质,这方面的大部分性质是有理数、实数、复数的全体所共有的.有时我们还会碰到一些其他的数的范围,为了方便起见,当我们把这些数当作整体来考虑时,常称它为一个数的集合,简称数集.有些数集也具有与有理数、实数、复数的全体所共有的代数性质.为了在讨论中能够把它们统一起来,我们引入一个一般的概念.

定义 1.1.1 设 P 是某些复数所组成的集合,如果 P 中至少包含两个不同的复数,且 P 对复数的加、减、乘、除四则运算是封闭的,即对 P 内任意两个数 a,b(a 可以等于 b),必有 $a\pm b\in P$, $ab\in P$,且当 $b\neq 0$ 时,$a/b\in P$,则称 P 为一个**数域**.

设 R 是一个非空数集,如果 R 中的任意两个元素的和、差、积仍属于 R,则称 R 是一个**数环**.

例如,整数集就是一个数环,称为**整数环**,记为 Z;全体偶数集也是一个数环,称为**偶数环**;显然,$\{0\}$也是一个数环.

数域是一个比较广泛的概念.我们看下面的例子.

例 1.1.1 典型的数域举例：复数域 $\mathbf{C}$；实数域 $\mathbf{R}$；有理数域$\mathbf{Q}$；Gauss 数域：$Q(i)=\{a+b\cdot i \mid a,b\in\mathbf{Q}\}$，其中 $i=\sqrt{-1}$.

例 1.1.2 令 $F=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$，则 F 是一个数域. 首先，容易看出，F 中至少有两个不同的数(例如，$0=0+0\sqrt{2}\in F$，$1=1+0\sqrt{2}\in F$)，且 F 中任意两个数的和、差、积都在 F 中. 现设 $c+d\sqrt{2}\neq 0$，那么 $c-d\sqrt{2}\neq 0$，否则在 $d=0$ 的情形下将得出 $c=0$，这与 $c+d\sqrt{2}\neq 0$ 的假设矛盾；在 $d\neq 0$ 的情形下将得出$\sqrt{2}=\dfrac{c}{d}\in\mathbf{Q}$，这与$\sqrt{2}$是无理数事实矛盾. 因此

$$\begin{aligned}\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}&=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}\\&=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}\in F.\end{aligned}$$

这就证明了 F 是一个数域.

命题 1.1.1 任意数域 P 都包括有理数域 $\mathbf{Q}$.

证明 设 P 为任意一个数域，由定义可知，存在一个元素 $a\in P$，且 $a\neq 0$. 于是

$$0=a-a\in P,\quad 1=\frac{a}{a}\in P;$$

进而 $\forall\, m\in\mathbf{Z}, m>0$，

$$m=1+1+\cdots+1\in P;$$

最后，$\forall\, m,n\in\mathbf{Z}, m>0, n>0, \dfrac{m}{n}\in P, -\dfrac{m}{n}=0-\dfrac{m}{n}\in P$. 这就证明了 $\mathbf{Q}\subseteq P$.

1.1.2 求和号与乘积号

在数学教学中常常会碰到若干个数连加和连乘的式子，为了把加法和乘法表达得更简练，我们引进求和号和乘积号.

设给定某个数域 P 上 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，我们使用如下记号：

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i; \tag{1.1.1}$$

$$a_1a_2\cdots a_n=\prod_{i=1}^{n}a_i. \tag{1.1.2}$$

“$\sum$”称为连加号，“$\prod$”称为连乘号，a_i 表示一般项，i 表示求和指标而连加号和连乘号上下的写法表示 i 的取值由 1 到 n. 例如

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\sum_{i=1}^{n}i^2; \tag{1.1.3}$$

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i x^{n-i} y^i; \qquad (1.1.4)$$

$$1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3) \times (2n-1) = \prod_{i=1}^{n} (2 \cdot i - 1). \qquad (1.1.5)$$

引入了记号后,我们先研究一下它们有哪些性质.容易证明

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_i; \qquad (1.1.6)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i; \qquad (1.1.7)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}. \qquad (1.1.8)$$

事实上,最后一条性质的证明只需要把各个元素排成如下形状:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{matrix}$$

分别先按行和列求和,再求总和即可.

最后,再对求和号加几点说明:

(1) 在求和表达式中,用什么字母作为求和指标是任意的,如

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{it} = \sum_{j=1}^{n} a_{jt} = a_{1t} + a_{2t} + \cdots + a_{nt}.$$

(2) 有时相加的数虽然是用两个指标编号,但是相加的并不是它们的全部,而是指标适合某些条件的那一部分,这时就在连加号下写出指标适合的条件.例如

$$\sum_{j=2}^{n} \sum_{i<j} a_{ij} = a_{12} + (a_{13} + a_{23}) + \cdots + (a_{1n} + a_{2n} + \cdots + a_{(n-1)n}).$$

(3) 当相加的数是用多个指标编号时,我们可以类似地使用多重连加号.例如

$$\sum_{i+r=t}^{n} \sum_{j+k=r}^{n} a_i b_j c_k = \sum_{i+j+k=t}^{n} a_i b_j c_k.$$

1.2 二阶与三阶行列式

行列式是一个数,它由一些数字按一定方式排成的阵列所确定.这个思想早在1683年就由日本数学家关孝和与1693年由德国数学家莱布尼茨各自独立提出,大约比形成独立体系的矩阵理论要早160年.多年以来,行列式主要出现在线性方

程组的讨论中.在中学代数中，我们学过二元、三元线性方程组，但在生产实际中所遇到的线性方程组，它的未知量往往不止两个或3个.例如，在生产实际中有这样一个问题：

例 1.2.1 （炼油厂模型）某石油公司有5个炼油厂，每个炼油厂都生产5种石油产品：汽油、柴油、煤油、机油、液态石油气.已知从1桶原油中，第一个工厂生产出的汽油、柴油、煤油、机油、液态石油气分别是30L、24L、18L、12L、9L；第二、三、四、五个工厂从1桶原油中生产出的这5种油分别是28L、25L、20L、10L、9L；31L、23L、19L、11L、10L；29L、22L、17L、13L、8L；27L、26L、20L、13L、10L.现在需要104620L汽油、88010L柴油、68660L煤油、43240L机油、33690L液态石油气.本着节约资源与提高效益的原则，问给这5个工厂各安排多少桶原油来生产恰好满足这一需要.

事实上，设给这5个工厂各分配 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 桶原油正好能满足需要，由题意可以得到

$$\begin{cases}30x_1+28x_2+31x_3+29x_4+27x_5=104620,\\24x_1+25x_2+23x_3+22x_4+26x_5=88010,\\18x_1+20x_2+19x_3+17x_4+20x_5=68660,\\12x_1+10x_2+11x_3+13x_4+13x_5=43240,\\9x_1+9x_2+10x_3+8x_4+10x_5=33690,\end{cases}\tag{1.2.1}$$

这样问题就转化成了求解方程组了.

方程(1.2.1)是由5个未知量和5个方程构成的线性方程组.实际上，在大量的工程技术问题中，我们经常遇到的线性方程组要远比方程(1.2.1)复杂.就未知量个数和方程个数相等的线性方程组来说，一般形式为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots,\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases}\tag{1.2.2}$$

这里 n 是正整数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是未知量，$a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 是 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 的系数，$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是常数项.形如方程组(1.2.2)的线性方程组称为 $n\times n$ **线性方程组**.在求解 $n\times n$ 线性方程组的过程中便产生了行列式的概念.下面我们先讨论 2×2 与 3×3 这两种比较简单的线性方程组的公式解.

例 1.2.2 探求 2×2 线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}\tag{1.2.3}$$

的公式解.

解 用加减消元法,以 a_{22} 乘以方程组的第一式,以 a_{12} 乘以方程组的第二式得

$$\begin{cases} a_{22}a_{11}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 = a_{22}b_1, \\ a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{12}b_2. \end{cases} \tag{1.2.4}$$

在式(1.2.4)中,用第一式减去第二式,消去 x_2,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$,则

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

同理,在式(1.2.3)中,以 a_{21} 乘以方程组的第一式,以 a_{11} 乘以方程组的第二式,然后相减消去 x_1,在 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 的情况下,得

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

这样,对于方程组(1.2.3)在 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 的情况下,得公式解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2.5}$$

虽然有了公式解,但是看上去比较复杂,不容易记忆.为此我们引入记号.

若我们定义二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \tag{1.2.6}$$

这样就可以很方便的将解(1.2.5)表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.2.7}$$

我们仔细观察用行列式形式表示的公式解(1.2.7),可以发现这样表达的解有一定的规律:

(1) x_1 与 x_2 的分母都是行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,即只需要将原方程组未知量前的系数按原顺序排成的一个行列式即可.

(2) x_1 的分子行列式的第一列是原方程组的常数列,第二列由 x_2 的系数构成,因此这个行列式可以看成将行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 中的第一列换成常数列而得到;同时,x_2 的分子行列式可以看成将行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 中的第二列换成常数列而得到.

显然,这样的公式解更容易记忆.我们自然希望用同样的公式来得到 3×3 线性方程组的公式解,乃至 $n\times n$ 线性方程组的公式解.

例 1.2.3 探求 3×3 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{1.2.8}$$

的公式解.

解 同例 1.2.2 一样,用加减消元法,先从前面两式中消去 x_3,再从后两式消去 x_3,得到只含 x_1 与 x_2 的 2×2 的线性方程组,然后再用消元法消去 x_2,就得到

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})x_1 \\ &\quad = b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3.\end{aligned}$$

若 $D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \neq 0$,则得到

$$x_1 = \frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}b_2a_{32} - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3);$$

$$x_2 = \frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33} + b_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}b_3 - a_{11}a_{23}b_3 - b_1a_{21}a_{33} - a_{13}b_2a_{31});$$

$$x_3 = \frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}).$$

这就是 3×3 线性方程组(1.2.8)的公式解,为了便于记忆,同样引入三阶行列式的概念.

我们定义三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{1.2.9}$$

这样,我们可以很方便的表示出方程组(1.2.8)的公式解.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

当 $D\neq0$ 时,方程(1.2.8)的公式解就可以表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

观察上述公式解，可以看出此解有类似于 2×2 线性方程组公式解的规律.

例 1.2.4 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + y_1 + z_1 = 0, \\ 2x_1 - 5y_1 - 3z_1 = 10, \\ 4x_1 + 8y_1 + 2z_1 = 4. \end{cases}$$

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 34 \neq 0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 10 & -5 & -3 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 68,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 10 & -3 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 10 \\ 4 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -68,$$

所以

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 0, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = -2.$$

通过二阶和三阶行列式，我们就可以把系数行列式不为零的线性方程组(1.2.3)与(1.2.8)的解很简单地表示出来. 于是，我们自然就想，一般的 $n\times n$ 线性方程组(1.2.2)的解能否用 n 阶行列式表示出来？为此，我们首先要定义 n 阶行列式.

1.3 n 阶行列式

为了给出 n 阶行列式的定义，必须先弄清楚二阶、三阶行列式的结构，为此需要先介绍一下排列的概念.

1.3.1 排列

定义 1.3.1 由数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 称为一个 n 元排列.

例如，3214 是一个 4 元排列，324615 是一个 6 元排列. 事实上，n 元排列的总数是

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot2\cdot1 = n!.$$

例 1.3.1 由数码 1,2,3 构成的全部 3 元排列共有 $3!=6$ 个，它们是

$$123, \quad 132, \quad 213, \quad 231, \quad 312, \quad 321.$$

在所有的 n 元排列中，排列 $123\cdots n$ 称为**标准排列**，它的特点是较大的数码排在较小的数码之后.而在其他 n 元排列中，都可以找到一个较大的数码排在较小的数码前面.例如，在排列 321 中，3 排在 2 的前面，2 排在 1 的前面，这样的次序与自然顺序相反，我们称它为反序(或逆序).

定义 1.3.2 在一个排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，如果较大的数码排在较小的数码前面，则称这两个数码构成一个**反序**(**或逆序**).一个排列中的全部反序的个数称为这个排列的**反序数**，记作 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

说明 ($N(i_1 i_2 \cdots i_n)$的算法)给定 n 个自然数，按大小顺序排列：

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n,$$

现在把它们按任意次序重排，得 n 元排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$，这个排列的反序数可用下法计算：先找出排在 i_1 前面的数字有多少，设为 $\tau(i_1)$，然后划去 i_1，再看 i_2 前面未划去的数字有多少，设为 $\tau(i_2)$，然后划去 i_2，再看 i_3 前面未划去的数字有多少，设为 $\tau(i_3)$，然后划去 i_3，…，经过 n 次后，即得

$$N(i_1 i_2 \cdots i_n) = \tau(i_1) + \tau(i_2) + \cdots + \tau(i_n).$$

例 1.3.2 在排列 2431 中，21，43，41，31 是反序，2431 的反序数就是 4，即 $N(2431)=4$.而 $N(3421)=5$.

定义 1.3.3 反序数为偶数的排列称为**偶排列**；反序数为奇数的排列称为**奇排列**.

例如，排列 2431 为偶排列，排列 3421 为奇排列.

由例 1.3.2 知，排列 2431 与 3421 仅是交换了 2 与 3 的位置，但它们却一个是偶排列一个是奇排列.这不是偶然的.关于排列的奇偶性，有如下基本事实.

我们把一个排列中某两个数码的位置互换，而其余的数码保持不动，就得到一个新的排列，这样的一个变换称为**对换**.

定理 1.3.1 一次对换改变排列的奇偶性.

证明 **情形 1** 被对换的两个数码在排列中是相邻的情形.

设原排列为

$$\cdots j\, k \cdots, \tag{1.3.1}$$

经过 j, k 对换变成

$$\cdots k\, j \cdots, \tag{1.3.2}$$

这里"…"表示那些不动的数.显然，在排列(1.3.1)与(1.3.2)中，j, k 与前后不动的数码构成的反序或顺序都是相同的，不同的只是 j 与 k 的次序变了.若原来构成反序，经过对换后，则 k 与 j 不构成反序，这样排列(1.3.2)比排列(1.3.1)的反序数少 1.反之，则排列(1.3.2)比(1.3.1)的反序数多 1.无论是减少 1 还是增加 1，排列的奇偶性都发生改变.

情形 2 被对换的两个数码在排列中不相邻的情形.

设原排列为

$$\cdots j i_1 i_2 \cdots i_s k \cdots, \tag{1.3.3}$$

对换 j 与 k，得到新的排列

$$\cdots k i_1 i_2 \cdots i_s j \cdots, \tag{1.3.4}$$

不难看出，这样一个不相邻的两个数码的对换可以通过若干个相邻的两个数码的对换来实现. 从(1.3.3)出发，将 k 与 i_s 对换，再与 i_{s-1} 对换，…，与 i_1 对换，最后与 j 对换，共经过 $s+1$ 次相邻数码的对换，排列(1.3.3)变成

$$\cdots k j i_1 i_2 \cdots i_s \cdots, \tag{1.3.5}$$

再从(1.3.5)出发，把 j 与 $i_1, i_2, \cdots, i_s$ 一个一个地对换，共经过 s 次相邻数码的对换，排列(1.3.5)就变成了排列(1.3.4). 因此，j 与 k 的直接对换可经过 $2s+1$ 次相邻数码的对换来实现. 由于 $2s+1$ 是奇数，根据情形 1，排列(1.3.3)与(1.3.4)的奇偶性不同. 证毕.

推论 1.3.1 奇数次对换改变排列的奇偶性，偶数次对换不改变排列的奇偶性.

定理 1.3.2 在全部 $n(n\geqslant 2)$ 元排列中，奇偶排列的个数相等，各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

证明 设在这 $n!$ 个 n 元排列中，有 p 个互不相同的奇排列，有 q 个互不相同的偶排列，则有 $p+q=n!$. 对这 p 个互不相同的奇排列都施行同一个对换(例如都对换数码 1 和 2)，则由定理 1.3.1 得到 p 个互不相同的偶排列，而偶排列只有 q 个，所以 $p\leqslant q$. 同理，对这 q 个互不相同的偶排列都施行同一个对换，得到 q 个互不相同的偶排列，于是，$q\leqslant p$. 因此，$p=q=\frac{n!}{2}$. 证毕.

定理 1.3.3 由数码 $1,2,\cdots,n$ 构成的任意一个 n 元排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 都可以经过若干次对换变成标准排列，并且所做对换的次数与 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 有相同的奇偶性.

证明 对排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 讲，若 $i_1\neq 1$ 时，对换 i_1 与 1 得到新排列 $1 j_2 j_3 \cdots j_n$，这里 $j_2 j_3 \cdots j_n$ 是数码 $2,3,\cdots,n$ 构成的排列. 若 $j_2\neq 2$，对换 j_2 与 2 得到新排列 $12 k_3 \cdots k_n$，这里 $k_3 k_4 \cdots k_n$ 是数码 $3,4,\cdots,n$ 构成的排列. 因 n 是有限数，如此下去，排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 就变成了标准排列 $1,2,\cdots,n$.

若 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是偶排列，则所做的对换次数一定是偶数，因为标准排列 $1,2,\cdots,n$ 也是偶排列.

若 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是奇排列，则所做的对换次数一定是奇数，因为将 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 对换成 $1,2,\cdots,n$ 时，改变了排列的奇偶性. 证毕.