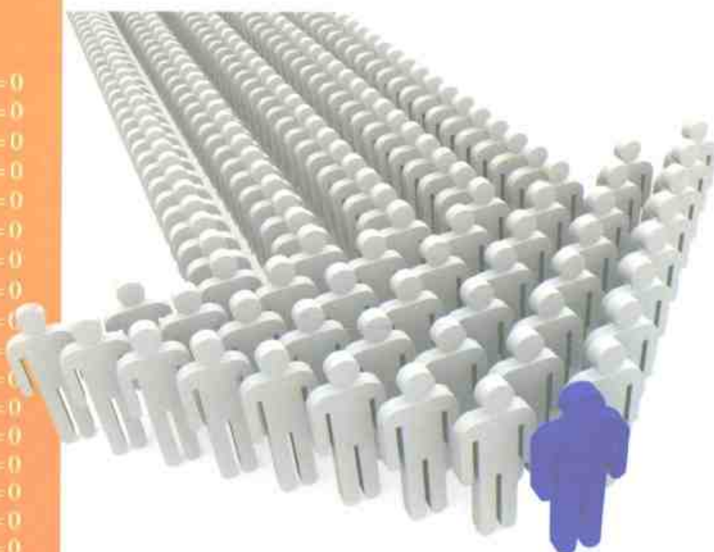
大学自主招生试题解析与模拟

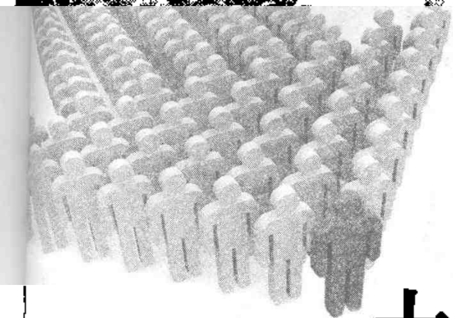
丛书主编　范小辉
本册主编　孙士放

数学 • Mathematics

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y) \Rightarrow f(0)=0$



南京师范大学出版社
NANJING NORMAL UNIVERSITY PRESS



大学自主招生
试题解析与模拟

数学

主　编

孙士放

副主编

袁全超　俞光军

编　者

曹宗思　朱润峰　张　锐　张　甲

吴艳辉　闫国栋

南京师范大学出版社
NANJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

大学自主招生试题解析与模拟. 数学/孙士放主编.
南京:南京师范大学出版社,2009. 7
ISBN 978-7-81101-992-6/G・1296

Ⅰ. 大… Ⅱ. 孙… Ⅲ. 数学课—高中—解题—
升学参考资料 Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 122854 号

书　　名	大学自主招生试题解析与模拟・数学
主　　编	孙士放
责任编辑	王书贞
出版发行	南京师范大学出版社
地　　址	江苏省南京市宁海路 122 号(邮编:210097)
电　　话	(025)83598077(传真)　83598412(营销部)　83598297(邮购部)
网　　址	http://press.njnu.edu.cn
E — mail	nspzbb@njnu.edu.cn
印　　刷	镇江中山印务有限公司
开　　本	787×960　1/16
印　　张	9.5
字　　数	155 千
版　　次	2009 年 9 月第 1 版　2009 年 9 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-81101-992-6/G・1296
定　　价	25.00 元

出版说明

自主招生是扩大高校招生自主权、深化高校招生录取制度改革的重要举措，也是对选拔优秀创新人才的新探索。2003 年我国有 22 所高校开始试点，截至 2009 年已经有 76 所高校参与自主招生，以后参与的高校还将不断增加。参加自主招生考试将成为广大考生走进理想高校的重要通道。

由于目前自主招生还处于试点阶段，相关信息极为匮乏，为帮助广大准备自主招生的同学了解这项考试，我们约请了一直关注大学自主招生并参加自主招生考试指导的大学和中学老师，编写了这套《大学自主招生试题解析与模拟》丛书。

本丛书包括语文、数学、英语、物理、化学 5 个分册。各分册按照学科内容设置专题。每个专题大致按照“真题解析”、“模拟训练”和“知识梳理与归纳”3 个板块进行编排。

真题解析　编排各大学自主招生、保送生考试真题，并进行解析，供读者了解该科考试，把握考试的题型、特点及难易程度等。

模拟训练　按照自主招生考试的特点，编排适用于复习迎考的自主招生、保送生考试真题或改编题。

知识梳理与归纳　对该专题的知识及重点进行梳理与归纳，引导读者形成知识体系。

经过作者们的共同努力，这套《大学自主招生试题解析与模拟》丛书终于问世了，我们真诚希望她能对广大考生创造精彩人生有所帮助。也恳请广大读者能将使用的意见和建议反馈给我们，以便丛书再版时加以完善。

南京师范大学出版社

前　言

本书是在郑州一中数学组教师多年辅导自主招生和保送生考试的基础上，收集了近几年清华大学、北京大学、复旦大学、上海交通大学、浙江大学、同济大学等重点高校的自主招生和保送生考试真题，由郑州一中几位竞赛主教练和几位年轻教师做出答案编撰而成的服务于重点高中参加自主招生和保送生考试的一本专业书籍。本书所有例题和习题均来源于高校自主招生和保送生考试试题。

本书结合自主招生和保送生备考时间短、所处时间又是高三复习的关键时刻，本着少、精、真、实的原则配置例题和习题。全书共分 11 个专题，每个专题又分真题解析、模拟训练、知识梳理与归纳 3 个板块，涉及内容有高考常考的重点内容，也有与大学知识和新课程理念接轨的自主招生和保送生考试常考的内容，也有一些来源于数学竞赛，涵盖了高校自主招生和保送生考试的所有知识和解题方法，是一本不可多得的专门服务于重点高中参加自主招生和保送生考试的书籍。

基本上每一所具有自主招生资格的学校都把数学作为首选和重点考查的学科，自主招生数学考试试题本着考查学生基本数学素养、基本能力以及进入重点大学后继续学习的潜力等为主要出发点，又由于是大学教师命制试题，故主要呈现以下特点。

1. 基础知识和基本技能仍是考查重点

基础知识、基本技能称之为“双基”。大家知道，能力与“双基”有着辩证关系。没有扎实的“双基”，能力培养就成了无源之水，无本之木。所以，“双基”训练是数学教学的重要任务之一。综观复旦、上海交大、清华等高校近几年自主招生的数学题目，我们会发现有 60%至 70%的题目仍是比较基础的。例如，近三年来上海交大卷的填空题都是 10 题有 50 分，占试卷分值的一半，但这些填空题比较常规，和高考试题难度相当；复旦卷有 30 题左右的选择题，也多半是学生平时训练过的一些比较熟悉的题型和知识点。

2. 考查知识点的覆盖面广，但侧重点有所不同

重点高校近几年的自主招生试题中知识点的覆盖面还是很广的，基本上涉及高中数学课程的所有内容。例如，函数、集合、数列、复数、三角、排列

组合、概率统计、向量、立体几何、解析几何等。但高校自主招生试题命题是由大学完成的，会更多地考虑到高等数学与初等数学的衔接，所以提请大家注意函数和方程问题、排列组合和概率统计等。粗略统计，2008 年复旦卷中与函数和方程有关的试题多达 10 题，占 31%。复数通常在高考中要求比较低，占的比分也较少，但在复旦卷中仍占有一席之地(2007 年及 2008 年分别有 3 题和 2 题)。矩阵和行列式这些知识虽然目前还未纳入高考范围，但由于是高等数学中非常重要的内容，近几年在复旦卷中每年都会出现。当然由于上述同样的原因，尽管高考中解析几何是一个比较重要的内容，但在有的高校，如复旦卷中所占比例却较少，2007 年和 2008 年只有 1 题和 2 题。

3. 注重学科间整合，考查应用知识解决问题的能力

数学作为一门基础学科，在人类科学发展的过程中起着举足轻重的作用，作为工具，它在中学其他学科中也有广泛的应用。随着新教材改革的进行以及素质教育对学生综合能力要求的提高，数学与其他学科相结合的试题在各校自主招生考试中越来越受到青睐。例如 2008 年上海交大冬令营解答题的第 4 题与计算机中的"二进制"有关，体现数学与信息技术的整合，也符合新课程的理念。

4. 突出对思维能力和解题技巧的考查

近几年的自主招生试卷中对数学思想方法和思维策略的考查达到了相当高的层次，有时甚至达到相当于数学竞赛的难度。尤其是清华、北大、上海交大等学校的自主招生试题，内容上这些知识包括函数与方程、多项式、组合数学、数论、平面几何等。

针对上述自主招生试题特点，学生复习时应注意以下几点。

· *注意知识点的全面*

数学题目被猜中的可能性很小，一般知识点都靠平时积累，剩下的就是个人的现场发挥。数学还是要靠平时扎扎实实的学习才能考出好成绩，因此，学生平时必须把基础知识打扎实。

另外，对上面提及的一些平时不太注意的小章节或高考不一定考的问题，如矩阵、行列式等也不可忽视。

· *适当做些近几年的自主招生的真题*

俗话说：知己知彼，百战百胜。同学们可适当训练近几年自己所考高校的自主招生试题，熟悉一下题型和套路。

· 注重知识的拓展和延伸

复旦、上海交大、清华等全国重点院校自主招生试题比高考试题稍难，比数学竞赛试题又稍简单，有些问题稍有深度，这就要求考生平时注意知识点的的延伸和加深。

以上几点也是本书重点撰写和重点训练的内容。

当然，由于编者水平有限和收集资料不太全面等因素，本书在内容编写上还有不足之处，希望读者不吝赐教。

编　者

目 录

专题一　函数及其性质

真题解析

例 1　(2007 年清华)求 $f(x)=\frac{1}{x}e^x$ 的单调区间及极值.

解析　$f'(x)=(\frac{1}{x})'e^x+\frac{1}{x}(e^x)'=-\frac{e^x}{x^2}+\frac{e^x}{x}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$.

当 $x<0$,或 $0<x<1$ 时,$f'(x)<0$;$x>1$ 时,$f'(x)>0$.

因此,函数 $f(x)$的单调递减区间为$(-\infty,0)$和$(0,1)$,单调递增区间为$[1,+\infty)$,当 $x=1$ 时,$f(x)$的极小值为 e.

例 2　(2008 年浙大)已知 $a>0,b>0,\log_9 a=\log_{12} b=\log_{16}(a+b)$,求$\frac{b}{a}$的值.

解析　设 $\log_9 a=\log_{12} b=\log_{16}(a+b)=k$,则

$a=9^k,b=12^k,a+b=16^k$,

$\therefore 9^k+12^k=16^k$. 两边同除以 12^k 得

$(\frac{3}{4})^k+1=(\frac{4}{3})^k$,即$(\frac{4}{3})^{2k}-(\frac{4}{3})^k-1=0$,

$\therefore (\frac{4}{3})^k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. $\therefore \frac{b}{a}=\frac{12^k}{9^k}=(\frac{4}{3})^k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

例 3　(2005 年上海交大)已知 $y=\frac{ax^2+8x+b}{x^2+1}$的最大值为 9,最小值为 1,求实数 a,b.

解析　由 $y=\frac{ax^2+8x+b}{x^2+1}$,得$(y-a)x^2-8x+y-b=0$,因为此方程有解,所以 $\Delta=64-4(y-a)(y-b)\geqslant 0$,得 $y^2-(a+b)y+ab-16\leqslant 0$.

由题意,9 和 1 为方程 $y^2-(a+b)y+ab-16=0$ 的两个根,所以

$\begin{cases}a+b=10,\\ ab-16=9.\end{cases}$ 解得 $a=b=5$.

例 4 （2002 年上海交大联读班、保送生）函数 $f(x)=|\lg x|$，有 $0<a<b$ 且 $f(a)=f(b)=2f(\frac{a+b}{2})$.

(1)求 a,b 满足的关系；

(2)证明：存在这样的 b，使 $3<b<4$.

解析 (1)由于 $x\geqslant1$ 时，$f(x)=|\lg x|=\lg x$ 为单调递增函数，

所以 $1\leqslant a<b$ 不可能使得 $f(a)=f(b)$，

故 $0<a<1\leqslant b$，此时 $f(a)=-\lg a=\lg\frac{1}{a}$，$f(b)=\lg b$，

由 $f(a)=f(b)$，得 $\frac{1}{a}=b$，即 $ab=1$，

又 $\frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}(b+\frac{1}{b})\geqslant1$，$\therefore f(\frac{a+b}{2})=\lg\frac{a+b}{2}$，

由 $f(b)=2\lg\frac{a+b}{2}$，得 $b=(\frac{a+b}{2})^2=\frac{1}{4}(b+\frac{1}{b})^2$.

整理得：$b^4-4b^3+2b^2+1=0\Rightarrow(b-1)(b^3-3b^2-b-1)=0$，

又 $b\neq1$（否则 $a=1$），$\therefore b^3-3b^2-b-1=0$，

故 a,b 满足的关系为 $b^3-3b^2-b-1=0$，$b>1$，且 $ab=1$.

(2)设 $g(b)=b^3-3b^2-b-1$，

由 $g(3)=-4<0$，$g(4)=11>0$，知 $g(b)=0$ 在 $(3,4)$ 上至少有一根，

故存在 $b\in\mathbf{R}$，使 $3<b<4$.

例 5 （2006 年复旦推优、保送生）试构造函数 $f(x)$，$g(x)$，其定义域为 $(0,1)$，值域为 $[0,1]$.

(1)对于任意 $a\in[0,1]$，$f(x)=a$ 只有一解；

(2)对于任意 $a\in[0,1]$，$g(x)=a$ 有无穷多个解.

解析 (1)定义函数如下：

$$f(x)=\begin{cases}2x\left(x=\frac{1}{2^n},n\in\mathbf{N}_+\right),\\3x\left(x=\frac{1}{3^n},n\in\mathbf{N}_+,n\geqslant2\right),\\0\left(x=\frac{1}{3}\right),\\x\left(x\in(0,1)\text{ 且 }x\neq\frac{1}{2^n},x\neq\frac{1}{3^n},n\in\mathbf{N}_+\right).\end{cases}$$

(2)定义 $g(\frac{1}{2^i})=0(i\in\mathbf{N}_+)$. 由 $(0,1)=\bigcup_{i=0}^{\infty}[\frac{1}{2^{i+1}},\frac{1}{2^i})$. $\forall x\in(\frac{1}{2^{i+1}},\frac{1}{2^i})$,先做映射 $g_i(x)=2^{i+1}(x-\frac{1}{2^{i+1}})$,这样就把$(\frac{1}{2^{i-1}},\frac{1}{2^i})$扩充到$(0,1)$,再仿(1)中的定义. 由此基础上再构造一个值域为$[0,1]$的映射 $g(x)$. 则此问题得到解决.

$$即\ g(x)=\begin{cases}0(x=\frac{1}{2^i},i\in\mathbf{N}_+),\\ f(g_i(x))(x\neq\frac{1}{2^i},i\in\mathbf{N}_+),\end{cases}$$

其中 $g_i(x)=2^{i+1}(x-\frac{1}{2^{i+1}}),i\in\mathbf{N}_+$.

注 此题的第一问还可以这样构造:

$$f(x)=\begin{cases}0(x=\frac{1}{2}),\\ \frac{1}{n}(x=\frac{1}{n+2},n\in\mathbf{N}_+),\\ x(x\in(0,1)且\ x\neq\frac{1}{n+1},n\in\mathbf{N}_+),\end{cases}$$

但是用这个思路不容易解决(2).

模拟训练

一、选择题

1.(2006 年复旦)设 $f(x)$是定义在实数集上的周期为 2 的周期函数,且是偶函数. 已知当 $x\in[2,3]$时,$f(x)=x$,则当 $x\in[-2,0]$时,$f(x)$的解析式为 ( )

A. $x+4$ B. $2-x$

C. $3-|x+1|$ D. $2+|x+1|$.

2.(2006 年复旦)设有三个函数,第一个是 $y=f(x)$,它的反函数就是第二个函数,而第三个函数的图象与第二个函数的图象关于直线 $x+y=0$ 对称,则第三个函数是 ( )

A. $y=-f(x)$ B. $y=-f(-x)$

C. $y=-f^{-1}(x)$ D. $y=-f^{1}(-x)$

3.(2006 年复旦)函数 $y=2x+\sqrt{1-2x}$的最值为 ( )

A. $y_{\min}=-\frac{5}{4}, y_{\max}=\frac{5}{4}$ B. 无最小值,$y_{\max}=\frac{5}{4}$

C. $y_{\min}=-\frac{5}{4}$,无最大值 D. 既无最小值也无最大值

4.(2006 年复旦)已知函数 $f(x)$的定义域为$(0,1)$,则函数$g(x)=f(x+c)+f(x-c)$在 $0<c<\frac{1}{2}$时的定义域为 ( )

A. $(-c,1+c)$ B. $(1-c,c)$

C. $(1+c,-c)$ D. $(c,1-c)$

二、填空题

5.(2002 年上海交大保送生)若 $3^a=4^b=6^c$,则$\frac{1}{a}+\frac{1}{2b}-\frac{1}{c}=$____________________.

6.(2008 年上海交大冬令营)若 $f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}$,$g(x)=f^{-1}(x)$,则$g(\frac{3}{5})=$__________.

7.(2003 年复旦)函数 $y=\frac{1}{2x}f(t-x)$,当 $x=1$ 时,$y=\frac{t^2}{2}-t+5$,则$f(x)=$____________________.

8.(2006 年上海交大保送生)函数 $y=-\log_3(x^2-ax-a)$在$(-\infty,1-\sqrt{3})$上单调递增,则实数 a 的取值范围是____________________.

9.(2004 年复旦大学保送生)$y=2^{\frac{1}{1+x}}$的值域是____________________.

10.(2008 年上海交大冬令营)函数 $y=\frac{x+1}{x^2+8}$的最大值为__________.

11.(2000 年上海交大保送生)设 $f(x)$的原函数是$\sqrt{x}+1$,则$\int_0^1 f(2x)\mathrm{d}x\cdot=$________.

12.(2000 年上海交大保送生)极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}(p>0)=$

____________.

三、解答题

13.(2007 年北大)已知 $f(x)=x^2-53x+196+|x^2-53x+196|$，求 $f(1)+f(2)+\cdots+f(50)$.

14.(2001 年上海交大联读班)设对于 $x>0$，$f(x)=\dfrac{(x+\frac{1}{x})^6-(x^6+\frac{1}{x^6})-2}{(x+\frac{1}{x})^3+x^3+\frac{1}{x^3}}$，求 $f(x)$的最小值.

15.(2004 年上海交大)已知 $f_1(x)=\dfrac{1-x}{x+1}$，对于一切正整数 n，都有 $f_{n+1}(x)=f_1(f_n(x))$，且 $f_3(x)=f_6(x)$，求 $f_{28}(x)$.

16.(2001 年上海交大联读班)已知函数 $f(x)=x^2+2x+2$，$x\in[t,t+1]$的最小值为 $g(t)$，试写出 $g(t)$的解析表达式.

17.(2004 年同济)试利用三角函数求函数 $f(x)=4-2x^2+x\sqrt{1-x^2}$的最大值与最小值.

18.(2004 年复旦保送生)若存在 M，使任意 $t\in D$(D 为函数 $f(x)$的定义域)，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$有界.问函数$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x\in(0,\dfrac{1}{2})$上是否有界?

19.(2008 年清华)$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=1$，$f(2x)-f(x)=x^2$，求 $f(x)$.

20.(2000 年上海交大保送生)设 $f(x)=\begin{cases}x^2+bx+c(x>0),\\ lx+m(x\leqslant 0)\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，且原点到 $f(x)$中直线的距离为$\dfrac{1}{3}$，原点到 $f(x)$中二次曲线部分的最短距离为 3，试求 b,c,l,m 的值.(其中 $b,c>0$)

1 知识梳理与归纳

一、函数的图象与性质

函数的图象：坐标为$(x,f(x))$的点的集合$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$称为函数$y=f(x)$的图象，其中$D$是函数的定义域.

图象变换：平移变换、对称变换.

函数性质：奇偶性、单调性、周期性.

周期性：对于函数$f(x)$，如果存在一个不为零的正数T，使得当x取定义域中的每一个数时，$f(x+T)=f(x)$总成立，那么称函数$f(x)$为周期函数，正数T称为这个周期函数的周期，如果所有周期中存在最小值T_0，称T_0为该函数的最小正周期.

二、二次函数

二次函数在中学数学中起着十分重要的作用，也是初等数学中遇到比较多的函数之一. 形如$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$的函数，它的图象简单，性质易于掌握，又与二次方程、二次不等式有联系，与之相关的理论如判别式、韦达定理、求根公式等又是中学教材的重点内容，因此有必要进一步认识二次函数的性质，研究与二次函数有关的解题规律、方法与技巧.

二次函数$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$的主要性质：定义域为$\mathbf{R}$；图象是对称轴平行于y轴(或与y轴重合)的抛物线；当$a>0$时，抛物线开口向上方，函数的值域是$\left[\frac{4ac-b^2}{4a},+\infty\right)$，当$x\in\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$时，$f(x)$是减函数，当$x\in\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$时，$f(x)$是增函数；当$a<0$时，抛物线开口向下方，函数的值域是$\left(-\infty,\frac{4ac-b^2}{4a}\right]$，当$x\in\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$时，$f(x)$是增函数，当$x\in\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$时，$f(x)$是减函数. 当$b^2-4ac>0$时，函数的图象与$x$轴有两个不同的交点，它们分别是$\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},0\right)$，$\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},0\right)$；$b^2-4ac=0$时，函数的图象与$x$轴有两个重合的

交点$(-\frac{b}{2a},0)$，这时也称抛物线与 x 轴相切；$b^2-4ac<0$ 时，函数的图象与 x 轴没有交点.

函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象是连续的.一个有用的结论是，在区间$[p,q]$端点处的函数值异号，即 $f(p)\cdot f(q)<0$ 时，方程 $f(x)=0$ 在(p,q)内恰有一个实根.抛物线的凸性也有一定用途，当 $a>0$ 时，函数的图象是下凸形曲线，即对于任意 x_1、$x_2\in\mathbf{R}$，有 $f(\frac{x_1+x_2}{2})\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$；当 $a<0$ 时，函数的图象是上凸形曲线，即对于任意 x_1，$x_2\in\mathbf{R}$，有 $f(\frac{x_1+x_2}{2})\geqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.利用二次函数图象的凸性和单调性，在某些与二次方程的范围有关的问题中可避免使用判别式和求根公式.

对于二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，当 a、b、c 固定时，此二次函数唯一确定，它的图象是一条抛物线；若 b、c 固定时，a 可以在某个范围内变动，则它的图象可能是“一族”抛物线，对于 a、b、c 的不同范围和条件，得到的抛物线族具有不同的特征，如何确定这些特征，就因题而异了.

三、利用导数研究函数的性质

1.定义：当 $\Delta x\to 0$ 时，函数的增量 Δy 与自变量的增量 Δx 的比$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的极限，即 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

2.函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数的几何意义，就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率.

3.质点作直线运动的位移 s 是时间 t 的函数，则 $s'(t_0)$即为质点在 $t=t_0$ 时的瞬时速度.

4.几个重要函数的导数.

(1)$C'=0$(C 为常数)；(2)$(x^n)'=nx^{n-1}(n\in\mathbf{Q})$；(3)$(\sin x)'=\cos x$；(4)$(\cos x)'=-\sin x$；(5)$(\ln x)'=\frac{1}{x}$；(6)$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e$；

$(7)(e^x)'=e^x$;$(8)(a^x)'=a^x\ln a$.

5. 导数的四则运算法则.

$(1)(\mu\pm\upsilon)'=\mu'\pm\upsilon'$;$(2)(\mu\upsilon)'=\mu'\upsilon+\mu\upsilon'$;$(3)\left(\frac{\mu}{\upsilon}\right)'=\frac{\mu'\upsilon-\mu\upsilon'}{\upsilon^2}(\upsilon\neq0)$.

6. 复合函数求导法则.

$y'_x=y'_\mu\mu'_x$,其中 y'_x 是 y 对 x 求导,y'_μ 是 y 对 μ 求导,μ'_x 是 μ 对 x 求导.

7. 导数的应用.

(1)可导函数求单调区间或判断单调性的方法:使 $f'(x)>0$ 的区间为增区间,使 $f'(x)<0$ 的区间为减区间.

(2)可导函数 $f(x)$ 求极值的步骤:

①求导数 $f'(x)$;②求方程 $f'(x)=0$ 的根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$;③检验 $f'(x)$在方程的根的附近左、右值的符号,若左正、右负,则在这个根处取极大值,若左负、右正,则在这个根处取极小值.

(3)连续函数在闭区间上一定有最大值和最小值.

(4)$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,则求 $f(x)$最大值、最小值的步骤与格式为:

①求导数 $f'(x)$;②求方程 $f'(x)=0$ 的根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$;③结合 $f'(x)$在$[a,b]$上的根及闭区间$[a,b]$的端点数值,列出表格:$(a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b)$

x	a	(a,x_1)	x_1	(x_1,x_2)	x_2	…	x_n	(x_n,b)	b
y'		正负号	0	正负号	0		0	正负号	
y	值	单调性	值	单调性	值		值	单调性	值

④根据上述表格的单调性及端点值和极值的大小,确定最大值与最小值.

四、函数极限

1. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$.

2. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ 的充要条件是$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=a$.

3. $f(x)$在 x_0 处连续的充要条件是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,几何意义是 $f(x)$的图象在 x_0 处是不间断的,即是连续的.

4. 函数极限的四则运算.

如果$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=a$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)=b$，那么，

$\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \pm g(x)]=a \pm b$；$\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) \cdot g(x)]=a \cdot b$；

$\lim\limits_{x \to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a}{b}(b \neq 0)$.

五、积分

1. 微积分基本定理：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$，其中 $F'(x)=f(x)$.

2. 定积分的性质.

性质 1　$\int_a^b 1\mathrm{d}x = b-a$；

性质 2　$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$；

性质 3　$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$；

性质 4　$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.