

一套多功能的真题复习全书，复习初期可以用它来全面了解考研，复习过程中可以将它作为知识点的命题参照标准，临考前可以将它作为检验复习效果的标准材料



聚骄公司全心专业设计

传承辉煌的历史 **2010版** 开启成功的未来

考研数学

十年真题全方位

解码

(数学二)

世 华 潘正义 主编

借助真题复习，效率提升一倍
真正吃透真题，考研成功一半

世界图书出版公司

一套多功能的真题复习全书，复习初期可以用它来全面了解考研，复习过程中可以将它作为知识点的命题参照标准，临考前可以将它作为检验复习效果的标准材料



FOCUS
聚焦图书

专业设计

013-44/198
:2010(2)
2009

传承辉煌的历史

2010版

考研数学

十年真题全方位

解码

(数学二)

世 华 潘正义 主编

借助真题复习，效率提升一倍
真正吃透真题，考研成功一半

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP) 数据

考研数学十年真题全方位解码. 数学二 / 世华, 潘正义
主编. — 北京: 世界图书出版公司北京公司, 2006. 2
ISBN 978-7-5062-7922-2

I. 考... II. ①世... ②潘... III. 高等数学 — 研究
生 — 入学考试 — 解题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006) 第 007889 号

考研数学十年真题全方位解码 (数学二)

主 编: 世 华 潘正义
责任编辑: 王志平
装帧设计: 余曙敏

出 版: 世界图书出版公司北京公司
发 行: 世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号 电话: 88861708 邮编: 100089)
销 售: 各地新华书店
印 刷: 北京忠信诚胶印厂印刷

开 本: 787 × 1092 毫米 1/16
印 张: 14
字 数: 274 千字
版 次: 2009 年 3 月第 4 版 2009 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5062-7922-2/O · 547

定价: 22.80 元

服务热线: 010-88861708

前言

本书严格按照最新《数学考试大纲》的要求编写,对十年(2000~2009)来的考研数学真题的进行了详解、分析、归类和题型点对点演练。

本书分为三个部分:

第一部分为 2000~2009 年的十年真题。目的在于给考生形成一个完整的印象,了解考研数学命题的基本形式和题型分布。考生应充分利用这些真题,在规定时间内完成试卷,以达到模拟现场考试的目的。

第二部分为题型归类总结部分。我们将考研数学知识点分成了几十个不同的题型,将十年真题“打散”开,“融入”到各个题型中。目的在于让考生清楚、直观地看到每个知识点是通过何种题型来考查的,每种题型又有哪些变化形式,这样,可以做到知己知彼。

第三部分为真题及题型演练解析部分。通过“命题目的”、“思路点拨”、“详细解答”、“易错辨析”、“延伸拓展”几个部分,让考生不但知道题目该怎么做,而且知道题目为什么这么设计,易错的知识点在哪里,真正达到举一反三,触类旁通的目的。每套试卷的知识点分布表统计了历年真题的知识点分布情况,让考生可以直观地把握考试重点、了解考试特点。

本书使用建议:

在基础复习阶段,考生可以利用第二部分,体会各个知识点和题型的命题形式和特点。同时,对照第三部分,体会各种解题方法和技巧。

在模拟演练阶段,考生应在考试规定的时间内,完成第一部分的真题,锻炼和提高解题的速度和准确率。然后对照第三部分的真题解析归纳出自己的问题和错误点,并针对这些错误点和薄弱环节,先在《数学复习指南》(陈文灯教授编著)上找到相应的知识点和题型详解,最后结合第二部分的真题和题型演练题进行有针对性地训练。

目 录

第一篇 真题回顾

2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	(1)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	(5)
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	(9)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	(13)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	(17)
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	(21)
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	(25)
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	(29)
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	(32)
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)	(36)

第二篇 题型归类与演练

第一部分 高等数学

第一章 函数、极限、连续

【命题特点】	(40)
题型 1 求复合函数的表达式	(40)
题型 2 求 1^∞ 型极限	(41)
题型 3 求 $\frac{0}{0}$ 型极限	(41)
题型 4 求 $0 \cdot \infty$ 型极限	(41)
题型 5 函数性质(奇偶性、周期性、单调性、有界性)的判断或证明	(42)
题型 6 无穷小的比较或确定无穷小的阶或根据无穷小的阶反求参数	(42)
题型 7 数列极限的判定或求解或证明	(43)
题型 8 求 n 项和的数列的极限	(43)
题型 9 函数间断点的讨论或判定	(44)
题型 10 已知函数的连续性,反求函数中的参数	(44)
题型 11 已知极限存在,反求参数	(44)
题型 12 讨论函数的连续性	(45)

题型 13	已知一极限,求另一极限	(45)
题型 14	求函数的表达式	(45)
题型 15	求函数的值域	(46)

第二章 一元函数微分学

【命题特点】	(46)
题型 1 与函数导数和微分的概念和性质相关的命题	(47)
题型 2 函数(含分段函数)在一点可导的判定或求解	(47)
题型 3 求复合函数的导数或微分	(47)
题型 4 求隐函数的导数或微分	(48)
题型 5 求参数方程的导数	(48)
题型 6 求函数在一点的高阶导数或泰勒展开式或马克劳林展开式	(49)
题型 7 函数极值、最值、拐点或凹凸区间的判定或求解	(49)
题型 8 函数与其导函数的关系或图形的判定	(50)
题型 9 函数不可导点的个数的求解	(51)
题型 10 不等式的证明或判定	(51)
题型 11 在某一区间至少存在一点或两点使某个式子成立的证明	(52)
题型 12 函数单调性的判断或增减区间的求解	(53)
题型 13 方程根的判定或唯一性证明	(53)
题型 14 求一元函数在一点的切线方程或法线方程	(53)
题型 15 求曲线的渐近线方程	(54)

第三章 一元函数积分学

【命题特点】	(54)
题型 1 求不定积分或原函数	(55)
题型 2 函数的原函数性质的判定	(55)
题型 3 求一元函数(含分段函数)的定积分	(55)
题型 4 定积分的比较	(56)
题型 5 求变上限积分的函数或定积分中含参数的导数	(56)
题型 6 求解含有积分的方程	(57)
题型 7 求解含抽象函数的积分	(57)
题型 8 求反常积分	(57)
题型 9 求曲线的弧长或曲率或曲率半径相关的问题	(58)
题型 10 求平面图形的面积	(58)
题型 11 求旋转体的体积或表面积或立体的体积	(58)
题型 12 求函数的平均值	(59)
题型 13 求变力做功或压力等定积分在几何上或物理上的应用	(59)
题型 14 定积分不等式的证明	(59)

第四章 多元函数微积分学

【命题特点】	(60)
题型 1 讨论多元函数的可微性	(60)

题型 2	求多元复合函数的偏导	(60)
题型 3	多元函数极值的判定或求解	(61)
题型 4	求二重积分	(61)
题型 5	二重积分的累次积分表示或变换	(62)

第五章 常微分方程

【命题特点】	(62)
题型 1 求一阶线性微分方程的通解或特解	(63)
题型 2 求二阶齐次或非齐次线性微分方程的通解或特解	(63)
题型 3 求可降价的微分方程的通解或特解	(63)
题型 4 已知二阶齐次线性微分方程的解,反求微分方程	(63)
题型 5 利用代换化简微分方程并求通解	(64)
题型 6 通过解微分方程求函数表达式	(64)
题型 7 微分方程的几何或物理应用题	(64)

第二部分 线性代数

第一章 行列式

【命题特点】	(66)
题型 1 行列式的计算	(66)
题型 2 求矩阵的行列式	(66)

第二章 矩 阵

【命题特点】	(67)
题型 1 判断矩阵是否可逆或求逆矩阵	(67)
题型 2 解矩阵方程或求矩阵表达式	(68)
题型 3 矩阵的伴随矩阵的求解或判定	(68)
题型 4 矩阵的初等变换与初等矩阵的关系	(69)

第三章 向 量

【命题特点】	(69)
题型 1 向量组线性相关性的判断或证明	(69)
题型 2 求向量组的秩或已知向量组的秩反求参数	(70)
题型 3 求向量组的极大线性无关组	(70)
题型 4 讨论含参变量的向量组的线性相关性	(71)
题型 5 向量的线性表出或讨论含参变量的线性表出	(71)

第四章 线性方程

【命题特点】	(72)
题型 1 齐次线性方程组的基础解系的求解或判定	(72)
题型 2 已知线性方程组的解或解的情况,求线性方程组或线性方程组中的参数	(72)
题型 3 求线性方程组的通解	(73)

题型 4 讨论含参数的线性方程组的解的情况,如果方程组有解时求出通解	(73)
题型 5 直线方程所组成的方程组的解和直线的位置关系的判定	(73)

第五章 矩阵的特征值和特征向量

【命题特点】	(74)
题型 1 求矩阵的特征值或特征向量	(74)
题型 2 已知含参数矩阵的特征向量或特征方程,求参数	(75)
题型 3 矩阵是否可对角化的判定或求解或逆问题	(75)
题型演练参考答案	(76)

第三篇 答案详解

2009 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)详解·拓展·评析	(102)
2009 年数学(二)试卷评析	(111)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)详解·拓展·评析	(112)
2008 年数学(二)试卷评析	(121)
2007 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)详解·拓展·评析	(122)
2007 年数学(二)试卷评析	(133)
2006 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)详解·拓展·评析	(134)
2006 年数学(二)试卷评析	(144)
2005 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)详解·拓展·评析	(145)
2005 年数学(二)试卷评析	(156)
2004 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)详解·拓展·评析	(157)
2004 年数学(二)试卷评析	(168)
2003 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)详解·拓展·评析	(169)
2003 年数学(二)试卷评析	(180)
2002 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)详解·拓展·评析	(181)
2002 年数学(二)试卷评析	(192)
2001 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)详解·拓展·评析	(193)
2001 年数学(二)试卷评析	(203)
2000 年全国硕士研究生入学统一考试(数学二)详解·拓展·评析	(204)
2000 年数学(二)试卷评析	(215)

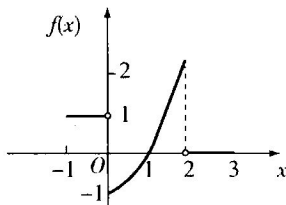
第一篇 真题回顾

2009 年全国硕士研究生入学统一考试

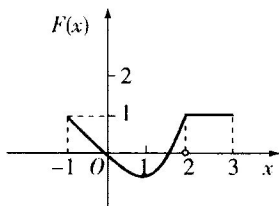
数学(二)

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.

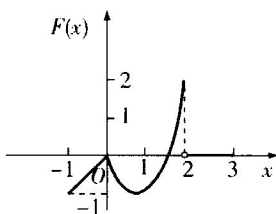
- (1) 函数 $f(x) = \frac{x-x^3}{\sin nx}$ 的可去间断点的个数,则()
(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 无穷多个.
- (2) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1-bx)$ 是等价无穷小,则()
(A) $a = 1, b = -\frac{1}{6}$. (B) $a = 1, b = \frac{1}{6}$.
(C) $a = -1, b = -\frac{1}{6}$. (D) $a = -1, b = \frac{1}{6}$.
- (3) 设函数 $z = f(x, y)$ 的全微分为 $dz = xdx + ydy$, 则点 $(0, 0)$ ()
(A) 不是 $f(x, y)$ 的连续点. (B) 不是 $f(x, y)$ 的极值点.
(C) 是 $f(x, y)$ 的极大值点. (D) 是 $f(x, y)$ 的极小值点.
- (4) 设函数 $f(x, y)$ 连续, 则 $\int_1^2 dx \int_x^2 f(x, y) dy + \int_1^2 dy \int_y^{4-y} f(x, y) dx =$ ()
(A) $\int_1^2 dx \int_1^{4-x} f(x, y) dy$. (B) $\int_1^2 dx \int_x^{4-x} f(x, y) dy$.
(C) $\int_1^2 dy \int_1^{4-y} f(x, y) dx$. (D) $\int_1^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx$.
- (5) 若 $f''(x)$ 不变号, 且曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 1)$ 上的曲率圆为 $x^2 + y^2 = 2$, 则 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 内()
(A) 有极值点, 无零点. (B) 无极值点, 有零点.
(C) 有极值点, 有零点. (D) 无极值点, 无零点.
- (6) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1, 3]$ 上的图形为:



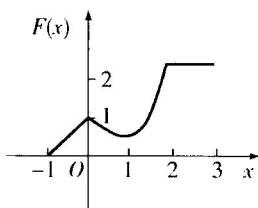
则函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 的图形为()



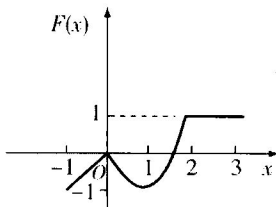
(A)



(B)



(C)



(D)

(7) 设 A, B 均为 2 阶矩阵, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵. 若 $|A| = 2, |B| = 3$, 则分块矩阵

$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为()

(A) $\begin{pmatrix} 0 & 3B^* \\ 2A^* & 0 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 0 & 3A^* \\ 2B^* & 0 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 2A^* \\ 3B^* & 0 \end{pmatrix}$

(8) 设 A, P 均为 3 阶矩阵, P^T 为 P 的转置矩阵, 且 $P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 若 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), Q =$

$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3)$, 则 $Q^T A Q$ 为()

(A) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

二、填空题: 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲线 $\begin{cases} x = \int_0^{1-t} e^{-u^2} du \\ y = t^2 \ln(2 - t^2) \end{cases}$ 在 $(0, 0)$ 处的切线方程为_____.

(10) 已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|} dx = 1$, 则 $k =$ _____.

(11) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{-x} \sin nx dx =$ _____.

(12) 设 $y = y(x)$ 是由方程 $xy + e^y = x + 1$ 确定的隐函数, 则 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$ _____.

(13) 函数 $y = x^{2x}$ 在区间 $(0, 1]$ 上的最小值为 _____.

(14) 设 α, β 为 3 维列向量, β^T 为 β 的转置, 若矩阵 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\beta^T \alpha =$ _____.

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 9 分) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)[x - \ln(1 + \tan x)]}{\sin^4 x}$.

(16) (本题满分 10 分)

计算不定积分 $\int \ln(1 + \sqrt{\frac{1+x}{x}}) dx \quad (x > 0)$.

(17) (本题满分 10 分) 设 $z = f(x + y, x - y, xy)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 dz 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(18) (本题满分 10 分) 设非负函数 $y = y(x)$ ($x \geq 0$) 满足微分方程 $xy'' - y' + 2 = 0$, 当曲线 $y = y(x)$ 过原点时, 其与直线 $x = 1$ 及 $y = 0$ 围成平面区域 D 的面积为 2, 求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体体积.

(19)(本题满分 10 分)

求二重积分 $\iint_D (x-y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2, y \geq x\}$.

(20)(本题满分 12 分)

设 $y = y(x)$ 是区间 $(-\pi, \pi)$ 内过 $(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}})$ 的光滑曲线, 当 $-\pi < x < 0$ 时, 曲线上任一点处的法线都过原点, 当 $0 \leq x < \pi$ 时, 函数 $y(x)$ 满足 $y'' + y + x = 0$. 求 $y(x)$ 的表达式.

(21)(本题满分 11 分)

(I) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 可导, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$

(II) 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 在 $(0, \delta)$ ($\delta > 0$) 内可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0) = A$.

(22)(本题满分 11 分)

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}, \xi_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(I) 求满足 $A\xi_2 = \xi_1, A^2\xi_3 = \xi_1$ 的所有向量 ξ_2, ξ_3 ;

(II) 对 (I) 中的任一向量 ξ_2, ξ_3 , 证明: ξ_1, ξ_2, ξ_3 线性无关.

(23)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-1)x_3^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

(I) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(II) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$, 求 a 的值.

2008 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(二)

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分,在每小题给的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后括号内)

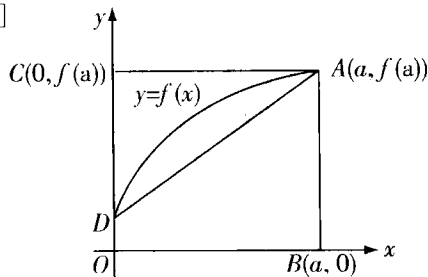
(1) 设函数 $f(x) = x^2(x-1)(x-2)$, 求 $f'(x)$ 的零点个数为()

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

(2) 如图, 曲线段的方程为 $y = f(x)$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$

上有连续的导数, 则定积分 $\int_0^a x f'(x) dx$ 等于()

- (A) 曲边梯形 $ABOD$ 的面积.
(B) 梯形 $ABOD$ 的面积.
(C) 曲边三角形 ACD 的面积.
(D) 三角形 ACD 的面积.



(3) 在下列微分方程中, 以 $y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x$ (C_1, C_2, C_3 为任意常数) 为通解的是()

- (A) $y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$. (B) $y''' + y'' + 4y' + 4y = 0$.
(C) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$. (D) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$.

(4) 设函数 $f(x) = \frac{\ln |x|}{|x-1|} \sin x$, 则 $f(x)$ 有()

- (A) 1 个可去间断点, 1 个跳跃间断点. (B) 1 个可去间断点, 1 个无穷间断点.
(C) 2 个跳跃间断点. (D) 2 个无穷间断点.

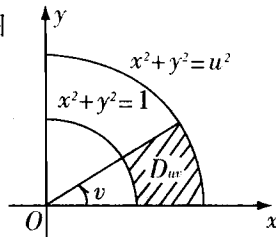
(5) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列, 下列命题正确的是()

- (A) 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛. (B) 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.
(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛. (D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛.

(6) 设函数 f 连续, 若 $F(u, v) = \iint_{D_w} \frac{f(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$, 其中区域 D_w 为图

中阴影部分, 则 $\frac{\partial F}{\partial u} =$ ()

- (A) $vf(u^2)$. (B) $\frac{v}{u} f(u^2)$.
(C) $vf(u)$. (D) $\frac{v}{u} f(u)$.



(7) 设 A 为 n 阶非零矩阵, E 为 n 阶单位矩阵. 若 $A^3 = O$, 则()

- (A) $E - A$ 不可逆, $E + A$ 不可逆. (B) $E - A$ 不可逆, $E + A$ 可逆.
(C) $E - A$ 可逆, $E + A$ 可逆. (D) $E - A$ 可逆, $E + A$ 不可逆.

(8) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, 则在实数域上与 A 合同的矩阵为()

(A) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

(B) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(D) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

二、填空题: 9-14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分, 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 已知函数 $f(x)$ 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos[xf(x)]}{(e^{x^2} - 1)f(x)} = 1$, 则 $f(0) =$ _____.

(10) 微分方程 $(y + x^2 e^{-x})dx - xdy = 0$ 的通解是 $y =$ _____.

(11) 曲线 $\sin(xy) + \ln(y-x) = x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程是 _____.

(12) 曲线 $y = (x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为 _____.

(13) 设 $z = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(1,2)} =$ _____.

(14) 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $2, 3, \lambda$. 若行列式 $|2A| = -48$, 则 $\lambda =$ _____.

三、解答题: 15-23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 9 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$.

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = x(t), \\ y = \int_0^{x^2} \ln(1+u) du \end{cases}$ 确定, 其中 $x(t)$ 是初值问题

$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 2te^{-x} = 0, \\ x|_{t=0} = 0 \end{cases}$ 的解. 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

(17) (本题满分 9 分)

计算 $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

(18) (本题满分 11 分)

计算 $\iint_D \max\{xy, 1\} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.

(19) (本题满分 11 分)

设 $f(x)$ 是区间 $[0, +\infty]$ 上具有连续导数的单调增加函数, 且 $f(0) = 1$. 对任意的 $t \in [0, +\infty)$, 直线 $x = 0, x = t$, 曲线 $y = f(x)$ 以及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周生成一旋转体. 若该旋转体的侧面面积在数值上等于其体积的 2 倍, 求函数 $f(x)$ 的表达式.

(20) (本题满分 11 分)

(I) 证明积分中值定理: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则至少存在一点 $\eta \in [a, b]$, 使

$$\int_a^b f(x) dx = f(\eta)(b-a);$$

(II) 若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数, 且满足 $\varphi(2) > \varphi(1), \varphi(2) > \int_2^3 \varphi(x) dx$, 则至少存在一点 $\xi \in (1, 3)$, 使得 $\varphi''(\xi) < 0$.

(21) (本题满分 11 分)

求函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在约束条件 $z = x^2 + y^2$ 和 $x + y + z = 4$ 下的最大值与最小值.

(22) (本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $Ax = b$, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(I) 证明行列式 $|A| = (n+1)a^n$;(II) 当 a 为何值时, 该方程组有唯一解, 并求 x_1 ;(III) 当 a 为何值时, 该方程组有无穷多解, 并求通解.

(23) (本题满分 10 分)

设 A 为 3 阶矩阵, α_1, α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量, 向量 α_3 满足 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$.(I) 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;(II) 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 求 $P^{-1}AP$.

2007 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(二)

一、选择题(本题共 10 小题,每小题 4 分,满分 40 分,在每小题给的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后括号内)

(1) 当 $x \rightarrow 0^+$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

- A. $1 - e^{\sqrt{x}}$ B. $\ln(1 + \sqrt{x})$ C. $\sqrt{1 + \sqrt{x}} - 1$ D. $1 - \cos \sqrt{x}$

(2) 函数 $f(x) = \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的第一类间断点是 $x =$

- A. 0 B. 1 C. $-\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{2}$

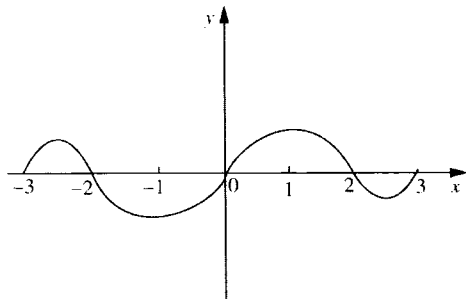
(3) 如图,连续函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-3, -2]$, $[2, 3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周,在区间 $[-2, 0]$, $[0, 2]$ 的图形分别是直径为 2 的上、下半圆周,设 $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. 则下列结论正确的是:

A. $F(3) = -\frac{3}{4}F(-2)$

B. $F(3) = \frac{5}{4}F(2)$

C. $F(-3) = \frac{3}{4}F(2)$

D. $F(-3) = -\frac{5}{4}F(-2)$



(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,下列命题错误的是:

A. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f(0) = 0$ B. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在,则 $f(0) = 0$

C. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在 D. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在

(5) 曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$,渐近线的条数为

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

(6) 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上具有二阶导数,且 $f''(x) > 0$,令 $u_n = f(n) (n = 1, 2, \dots)$,则下列结论正确的是:

- A. 若 $u_1 > u_2$,则 $\{u_n\}$ 必收敛 B. 若 $u_1 > u_2$,则 $\{u_n\}$ 必发散
C. 若 $u_1 < u_2$,则 $\{u_n\}$ 必收敛 D. 若 $u_1 < u_2$,则 $\{u_n\}$ 必发散