一套多功能的真题复习全书，复习初期可以用它来全面了解考研，复习过程中可以将它作为知识点的命题参照标准，临考前可以将它作为检验复习效果的标准材料

FOCUS 聚焦图书

聚骄公司全心专业设计

传承辉煌的历史 **2010版** 开启成功的未来

考研数学

十年真题全方位解码

（数学二）

3

世 华 潘正义 主编

借助真题复习，效率提升一倍
真正吃透真题，考研成功一半

世界图书出版公司

一套多功能的真题复习全书，复习初期可以用它来全面了解考研，复习过程中可以将它作为知识点的命题参照标准，临考前可以将它作为检验复习效果的标准材料

FOCUS 聚焦图书

心专业设计

传承辉煌的历史 **2010版** 开启辉煌的未来

考研数学

十年真题全方位解码

（数学二）

世华　潘正义　主编

借助真题复习，效率提升一倍
真正吃透真题，考研成功一半

世界图书出版公司

图书在版编目(CIP)数据

考研数学十年真题全方位解码. 数学二 / 世华,潘正义主编. —北京:世界图书出版公司北京公司,2006.2

ISBN 978—7—5062—7922—2

Ⅰ. 考... Ⅱ. ① 世... ② 潘... Ⅲ. 高等数学—研究生—入学考试—解题 Ⅳ. O13—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 007889 号

考研数学十年真题全方位解码

(数学二)

主　　编: 世　华　潘正义
责任编辑: 王志平
装帧设计: 余曙敏

出　　版: 世界图书出版公司北京公司
发　　行: 世界图书出版公司北京公司
(北京朝内大街 137 号　电话:88861708　邮编:100089)
销　　售: 各地新华书店
印　　刷: 北京忠信诚胶印厂印刷

开　　本: 787×1092 毫米　1/16
印　　张: 14
字　　数: 274 千字
版　　次: 2009 年 3 月第 4 版　2009 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5062-7922-2/O·547　　**定价:22.80 元**

服务热线: 010—88861708

前　言

本书严格按照最新《数学考试大纲》的要求编写，对十年（2000～2009）来的考研数学真题的进行了详解、分析、归类和题型点对点演练。

本书分为三个部分：

第一部分为 2000～2009 年的十年真题。目的在于给考生形成一个完整的印象，了解考研数学命题的基本形式和题型分布。考生应充分利用这些真题，在规定时间内完成试卷，以达到模拟现场考试的目的。

第二部分为题型归类总结部分。我们将考研数学知识点分成了几十个不同的题型，将十年真题“打散”开，“融入”到各个题型中。目的在于让考生清楚、直观地看到每个知识点是通过何种题型来考查的，每种题型又有哪些变化形式，这样，可以做到知己知彼。

第三部分为真题及题型演练解析部分。通过“命题目的”、“思路点拨”、“详细解答”、“易错辨析”、“延伸拓展”几个部分，让考生不但知道题目该怎么做，而且知道题目为什么这么设计，易错的知识点在哪里，真正达到举一反三，触类旁通的目的。每套试卷的知识点分布表统计了历年真题的知识点分布情况，让考生可以直观地把握考试重点、了解考试特点。

本书使用建议：

在基础复习阶段，考生可以利用第二部分，体会各个知识点和题型的命题形式和特点。同时，对照第三部分，体会各种解题方法和技巧。

在模拟演练阶段，考生应在考试规定的时间内，完成第一部分的真题，锻炼和提高解题的速度和准确率。然后对照第三部分的真题解析归纳出自己的问题和错误点，并针对这些错误点和薄弱环节，先在《数学复习指南》（陈文灯教授编著）上找到相应的知识点和题型详解，最后结合第二部分的真题和题型演练题进行有针对性地训练。

目 录

第一篇　真题回顾

第二篇　题型归类与演练

第一部分　高等数学

第一章　函数、极限、连续

第二章　一元函数微分学

第三章　一元函数积分学

第四章　多元函数微积分学

第五章　常微分方程

第二部分　线性代数

第一章　行列式

第二章　矩　阵

第三章　向　量

第四章　线性方程

第五章　矩阵的特征值和特征向量

第三篇　答案详解

第一篇 真题回顾

2009年全国硕士研究生入学统一考试

数学(二)

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点的个数,则(　　)

(A)1.　　(B)2.　　(C)3.　　(D) 无穷多个.

(2) 当 $x\to 0$ 时,$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小,则(　　)

(A)$a=1,b=-\dfrac{1}{6}$.　　(B)$a=1,b=\dfrac{1}{6}$.

(C)$a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$.　　(D)$a=-1,b=\dfrac{1}{6}$.

(3) 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$,则点 $(0,0)$(　　)

(A) 不是 $f(x,y)$ 的连续点.　　(B) 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(C) 是 $f(x,y)$ 的极大值点.　　(D) 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

(4) 设函数 $f(x,y)$ 连续,则 $\int_1^2 dx\int_x^2 f(x,y)dy+\int_1^2 dy\int_y^{4-y} f(x,y)dx=$(　　)

(A)$\int_1^2 dx\int_1^{4-x} f(x,y)dy$.　　(B)$\int_1^2 dx\int_x^{4-x} f(x,y)dy$.

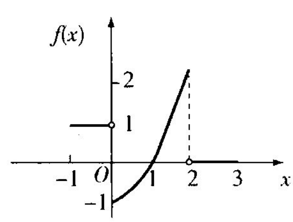
(C)$\int_1^2 dy\int_1^{4-y} f(x,y)dx$.　　(D)$\int_1^2 dy\int_y^2 f(x,y)dx$

(5) 若 $f''(x)$ 不变号,且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 上的曲率圆为 $x^2+y^2=2$,则 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内(　　)

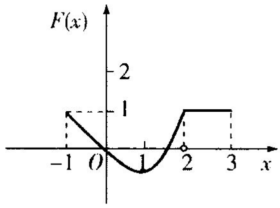
(A) 有极值点,无零点.　　(B) 无极值点,有零点.

(C) 有极值点,有零点.　　(D) 无极值点,无零点.

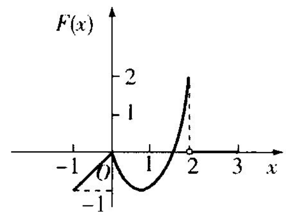
(6) 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为:



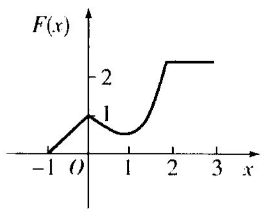
则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的图形为(　　)



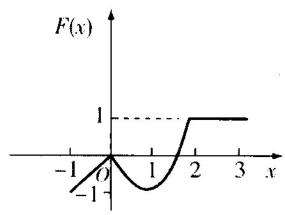
(A)



(B)



(C)



(D)

(7) 设 A、B 均为 2 阶矩阵，A^*，B^* 分别为 A、B 的伴随矩阵. 若 $|A|=2$，$|B|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为(　　)

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 3B^* \\ 2A^* & 0 \end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix} 0 & 2B^* \\ 3A^* & 0 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 0 & 3A^* \\ 2B^* & 0 \end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix} 0 & 2A^* \\ 3B^* & 0 \end{bmatrix}$

(8) 设 A，P 均为 3 阶矩阵，P^T 为 P 的转置矩阵，且 $P^TAP=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，若 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$，则 Q^TAQ 为(　　)

(A) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

二、填空题：9 ～ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲线 $\begin{cases} x=\int_0^{1-t} e^{-u^2}\mathrm{d}u \\ y=t^2\ln(2-t^2) \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的切线方程为________.

(10) 已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k|x|}\mathrm{d}x=1$，则 $k=$ ________.

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\sin nx\,\mathrm{d}x=$ ________.

(12) 设 $y=y(x)$ 是由方程 $xy+e^{y}=x+1$ 确定的隐函数,则$\left.\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$ ________.

(13) 函数 $y=x^{2x}$ 在区间$(0,1]$上的最小值为________.

(14) 设 α,β 为 3 维列向量,β^T 为 β 的转置,若矩阵 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,则 $\beta^T\alpha=$ ________.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 9 分) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$.

(16)(本题满分 10 分)

计算不定积分$\int \ln(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}})\,\mathrm{d}x\ (x>0)$.

(17)(本题满分 10 分) 设 $z=f(x+y,x-y,xy)$,其中 f 具有二阶连续偏导数,求 $\mathrm{d}z$ 与$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

(18)(本题满分 10 分) 设非负函数 $y=y(x)\ (x\geqslant 0)$满足微分方程 $xy''-y'+2=0$,当曲线 $y=y(x)$过原点时,其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成平面区域 D 的面积为 2,求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体体积.

(19)(本题满分 10 分)

求二重积分$\iint\limits_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D=\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2, y\geqslant x\}$.

(20)(本题满分 12 分)

设$y=y(x)$是区间$(-\pi,\pi)$内过$\left(-\dfrac{\pi}{\sqrt{2}},\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$的光滑曲线,当$-\pi<x<0$时,曲线上任一点处的法线都过原点,当$0\leqslant x<\pi$时,函数$y(x)$满足$y''+y+x=0$. 求$y(x)$的表达式.

(21)(本题满分 11 分)

(Ⅰ)证明拉格朗日中值定理:若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)可导,则存在$\xi\in(a,b)$,使得$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

(Ⅱ)证明:若函数$f(x)$在$x=0$处连续,在$(0,\delta)(\delta>0)$内可导,且$\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)=A$,则$f'_+(0)$存在,且$f'_+(0)=A$.

(22)(本题满分 11 分)

设$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -2\end{pmatrix}$,$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$

(Ⅰ)求满足$A\xi_2=\xi_1$,$A^2\xi_3=\xi_1$的所有向量ξ_2,ξ_3;

(Ⅱ)对(Ⅰ)中的任一向量ξ_2,ξ_3,证明:ξ_1,ξ_2,ξ_3线性无关.

(23)(本题满分 11 分)

设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$

(Ⅰ)求二次型f的矩阵的所有特征值;

(Ⅱ)若二次型f的规范形为$y_1^2+y_2^2$,求a的值.

2008 年全国硕士研究生入学统一考试

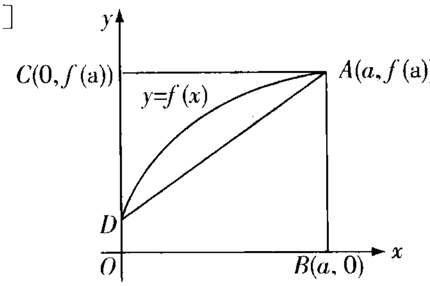
数学(二)

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分,在每小题给的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后括号内)

(1) 设函数 $f(x)=x^2(x-1)(x-2)$,求 $f'(x)$ 的零点个数为(　　)

(A)0.　　(B)1.　　(C)2.　　(D)3.

(2) 如图,曲线段的方程为 $y=f(x)$,函数 $f(x)$ 在区间$[0,a]$上有连续的导数,则定积分$\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x$ 等于(　　)



(A) 曲边梯形 $ABOD$ 的面积.

(B) 梯形 $ABOD$ 的面积.

(C) 曲边三角形 ACD 的面积.

(D) 三角形 ACD 的面积.

(3) 在下列微分方程中,以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$($C_1$,$C_2$,$C_3$ 为任意常数)为通解的是(　　)

(A)$y'''+y''-4y'-4y=0$.　　(B)$y'''+y''+4y'+4y=0$.

(C)$y'''-y''-4y'+4y=0$.　　(D)$y'''-y''+4y'-4y=0$.

(4) 设函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$,则 $f(x)$ 有(　　)

(A)1 个可去间断点,1 个跳跃间断点.　　(B)1 个可去间断点,1 个无穷间断点.

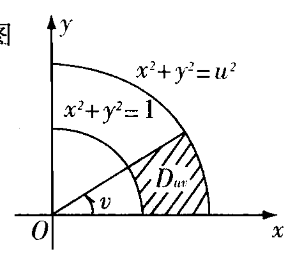
(C)2 个跳跃间断点.　　(D)2 个无穷间断点.

(5) 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内单调有界,$\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是(　　)

(A) 若$\{x_n\}$ 收敛,则$\{f(x_n)\}$ 收敛.　　(B) 若$\{x_n\}$ 单调,则$\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C) 若$\{f(x_n)\}$ 收敛,则$\{x_n\}$ 收敛.　　(D) 若$\{f(x_n)\}$ 单调,则$\{x_n\}$ 收敛.

(6) 设函数 f 连续,若 $F(u,v)=\iint\limits_{D_{uv}}\dfrac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中区域 D_{uv} 为图中阴影部分,则$\dfrac{\partial F}{\partial u}=$(　　)



(A)$vf(u^2)$.　　(B) $\dfrac{v}{u}f(u^2)$.

(C)$vf(u)$.　　(D) $\dfrac{v}{u}f(u)$.

(7) 设 A 为 n 阶非零矩阵,E 为 n 阶单位矩阵. 若 $A^3=O$,则(　　)

(A)$E-A$ 不可逆,$E+A$ 不可逆.　　(B)$E-A$ 不可逆,$E+A$ 可逆.

(C)$E-A$ 可逆,$E+A$ 可逆.　　(D)$E-A$ 可逆,$E+A$ 不可逆.

(8) 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，则在实数域上与 A 合同的矩阵为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$.

二、填空题：9－14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 已知函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x^2}-1)f(x)}=1$，则 $f(0)=$ ________.

(10) 微分方程 $(y+x^2e^{-x})dx-xdy=0$ 的通解是 $y=$ ________.

(11) 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程是________.

(12) 曲线 $y=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$ 的拐点坐标为________.

(13) 设 $z=\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,2)}=$ ________.

(14) 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $2,3,\lambda$. 若行列式 $|2A|=-48$，则 $\lambda=$ ________.

三、解答题：15－23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 9 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=\displaystyle\int_0^{t^2}\ln(1+u)\,du\end{cases}$ 确定，其中 $x(t)$ 是初值问题 $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}-2te^{-x}=0,\\ x\big|_{t=0}=0\end{cases}$ 的解. 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(17)(本题满分9分)

计算$\int_0^1 \frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

(18)(本题满分11分)

计算$\iint\limits_D \max\{xy,1\}dxdy$，其中$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

(19)(本题满分11分)

设$f(x)$是区间$[0,+\infty]$上具有连续导数的单调增加函数，且$f(0)=1$. 对任意的$t\in[0,+\infty)$，直线$x=0,x=t$，曲线$y=f(x)$以及x轴所围成的曲边梯形绕x轴旋转一周生成一旋转体. 若该旋转体的侧面面积在数值上等于其体积的2倍，求函数$f(x)$的表达式.

(20)(本题满分11分)

(Ⅰ)证明积分中值定理：若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则至少存在一点$\eta\in[a,b]$，使得$\int_a^b f(x)dx=f(\eta)(b-a)$；

(Ⅱ)若函数$\varphi(x)$具有二阶导数，且满足$\varphi(2)>\varphi(1)$，$\varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)dx$，则至少存在一点$\xi\in(1,3)$，使得$\varphi''(\xi)<0$.

(21)(本题满分11分)

求函数$u=x^2+y^2+z^2$在约束条件$z=x^2+y^2$和$x+y+z=4$下的最大值与最小值.

(22)(本题满分 12 分)

设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n\times n},\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(Ⅰ)证明行列式 $|A|=(n+1)a^n$；

(Ⅱ)当 a 为何值时，该方程组有唯一解，并求 x_1；

(Ⅲ)当 a 为何值时，该方程组有无穷多解，并求通解.

(23)(本题满分 10 分)

设 A 为 3 阶矩阵，α_1,α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量，向量 α_3 满足 $A\alpha_3=\alpha_2+\alpha_3$.

(Ⅰ)证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

(Ⅱ)令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，求 $P^{-1}AP$.

2007年全国硕士研究生入学统一考试

数学(二)

一、选择题(本题共10小题,每小题4分,满分40分,在每小题给的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后括号内)

(1) 当 $x \to 0^+$ 时,与$\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

A. $1-e^{\sqrt{x}}$　　B. $\ln(1+\sqrt{x})$　　C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　D. $1-\cos\sqrt{x}$

(2) 函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在$[-\pi,\pi]$上的第一类间断点是 $x=$

A. 0　　B. 1　　C. $-\dfrac{\pi}{2}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

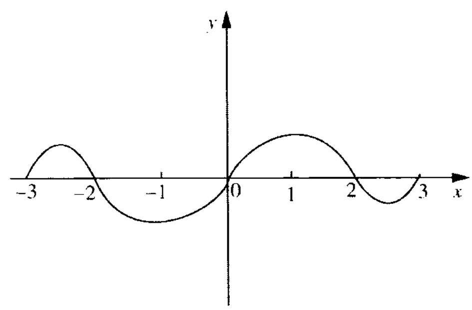
(3) 如图,连续函数 $y=f(x)$ 在区间$[-3,-2]$,$[2,3]$上的图形分别是直径为1的上、下半圆周,在区间$[-2,0]$,$[0,2]$的图形分别是直径为2的上、下半圆周,设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 则下列结论正确的是:

A. $F(3)=-\dfrac{3}{4}F(-2)$

B. $F(3)=\dfrac{5}{4}F(2)$

C. $F(-3)=\dfrac{3}{4}F(2)$

D. $F(-3)=-\dfrac{5}{4}F(-2)$



(4) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,下列命题错误的是:

A. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$　B. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$

C. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在 D. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)$ 存在

(5) 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$,渐近线的条数为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

(6) 设函数 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上具有二阶导数,且 $f''(x)>0$,令 $u_n=f(n)(n=1,2,\cdots)$,则下列结论正确的是:

A. 若 $u_1>u_2$,则$\{u_n\}$ 必收敛　　B. 若 $u_1>u_2$,则$\{u_n\}$ 必发散

C. 若 $u_1<u_2$,则$\{u_n\}$ 必收敛　　D. 若 $u_1<u_2$,则$\{u_n\}$ 必发散