全国高等教育自学考试

高等数学（一）自学辅导

田会英 编著

全国高等教育自学考试指定教材辅导

华中科技大学出版社

高等数学(一)自学辅导

田会英　编著

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(一)自学辅导/田会英　编著
武汉:华中科技大学出版社, 2002年10月
ISBN 7-5609-2831-5

Ⅰ.高…
Ⅱ.田…
Ⅲ.微积分-高等教育-自学考试-自学参考资料
Ⅳ.O172

高等数学(一)自学辅导　田会英　编著

责任编辑:胡　艳　封面设计:潘　群
责任校对:陈元玉　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87545012

录　排:华中科技大学出版社照排室
印　刷:湖北恒吉印务有限公司

开本:850×1168　1/32　印张:11.25　字数:270 000
版次:2002年10月第1版　印次:2002年10月第1次印刷　印数:1—4 000
ISBN 7-5609-2831-5/O·272　定价:16.80元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内 容 提 要

本书是为全国高等教育自学考试经济管理类专业“高等数学(一)——微积分”课程编写的辅导读物，旨在帮助考生学好本课程，顺利通过考试.

本书依据教学大纲，紧扣指定教材，按照知识考点提炼出常见常考的基本题型，并给出具有代表性的例题进行了详细分析，以帮助考生掌握数学的基本知识和基本方法，提高解题能力. 各章还给出了练习题，并附有练习题答案.

本书由具有丰富的自学辅导经验的教师编写，不仅适合于自考学生使用，对于其他的大学生也有重要参考价值.

前　　言

本书是根据全国高等教育自学考试指导委员会制定的经济管理类专业《高等数学(一)自学考试大纲》的要求，结合编者从事自学考试辅导的经验和自学考试学生的实际情况编写而成的.

全书分为八章，紧扣指定教材(《高等数学(一)微积分》，高汝熹主编，武汉大学出版社出版)，每章分为四部分：(一)本章导读.该部分指明学习这一章必须掌握的内容及其必须着重掌握的概念、定理及其运算法则等；(二)知识网络.该部分是对考生学习的一种宏观的指导，以帮助考生能准确把握考试大纲所要求的每一个知识点和考核点；(三)基本题型.这是本书的主要内容，各章的内容都按题型归类，所选例题也是与统考题型相一致的，并尽可能按知识考核点分类给出，具有典型性和代表性，尤其是对每个选择题均给出了详尽的分析过程，这一点对考生掌握数学基本知识和基本方法，以及提高解题能力颇为重要；(四)练习题及参考答案.供自学者在小结各章时作自我检测用.

限于编者水平，书中难免有一些疏漏之处，恳请读者批评指正.电子信箱：mc_tianhy@cmc.hbu.edu.

编　者

2002年1月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第1章　函数及其图形

1.1　本章导读

深刻理解函数概念；理解函数的四个简单性质；熟记基本初等函数的定义域和图像；深刻理解反函数、复合函数、分段函数及初等函数等概念.

1.2　知识网络

1. 集合
   - 定义
   - 表示法：列举法、描述法
   - 类型：有限集、无限集
   - 关系：子集、相等
   - 运算：交、并、补的定义及运算律
   - 数集：区间、邻域
2. 映射
   - 定义
   - 表示法

3. 函数
   - 定义
   - 确定函数的要素:定义域、对应规律
   - 表示法:解析法、表格法、图形法
   - 图形:$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D_f\}$
   - 几何特性:单调性、奇偶性、有界性、周期性
   - 复合函数:定义、表示法
   - 反函数:定义、存在定理、图形关系
   - 基本初等函数:幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数
   - 初等函数
   - 分段函数
   - 绝对值函数

4. 经济学中的常用函数
   - 需求函数
   - 供给函数
   - 总收益函数

1.3 基本题型

1. 集合的概念、关系及运算

对于这类题目,只要定义和关系清楚就不难解决.

例 1 点 x_0 的 δ 邻域($\delta>0$)是指____.

(A) $(x_0-\delta,x_0+\delta]$　　(B) $[x_0-\delta,x_0+\delta)$

(C) $(x_0-\delta,x_0+\delta)$　　(D) $[x_0-\delta,x_0+\delta)$

答案:(C)

例 2 设 $A=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 3\}$,$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 5\}$,则有____.

(A) $A\supset B$　　(B) $A\subset B$

(C) $A\cap B\supset B$　　(D) $A\cap B\subset B$

答案:(D)

例 3 设 A、B 均为非空集合，那么 $A\cap B=A$ 是 $A=B$ 的____.

(A) 充分条件　　(B) 必要条件

(C) 充要条件　　(D) 无关条件

答案：(B)

例 4 设 $M=\{0,1,2\}$，$N=\{1,3,5\}$，$R=\{2,4,6\}$，则下列式子中正确的是____.

(A) $M\cup N=\{0,1\}$　　(B) $M\cap N=\{0,1\}$

(C) $M\cup N\cup R=\{1,2,3,4,5,6\}$　　(D) $M\cap N\cap R=\varnothing$(空集)

答案：(D)

例 5 设 A、B 都是集合$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$的子集，且 $\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,3,7,9\}$，则 $A\cup B$ 是____.

(A) $\{2,4,5,6,8\}$　　(B) $\{1,3,7,9\}$

(C) $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$　　(D) $\{2,4,6,8\}$

提示：由运算律可知$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,3,7,9\}$，$\therefore A\cup B=\{2,4,5,6,8\}$.　答案：(A)

例 6 表示满足不等式$|x|>|x-1|$的所有 x 的集合的区间是____.

(A) $(0,+\infty)$　　(B) $(\frac{1}{2},+\infty)$

(C) $(-1,\frac{1}{2})$　　(D) $(\frac{1}{2},2)$

提示：不等式两边取平方，得 $x^2>(x-1)^2$，故 $x>\frac{1}{2}$.

答案：(B)

2. 求函数的定义域

求函数定义域的依据：

①基本初等函数的定义域.

②根据运算关系求交集.

例 7 函数 $y=\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}+\arcsin(\frac{1}{2}x-1)$的定义域是____.

(A) $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$　　(B) $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

(C) $[0,\sqrt{2})$　　(D) $[0,\sqrt{2}]$

提示:要使此函数有意义,必须满足$\begin{cases}2-x^2>0,\\-1\leqslant\frac{1}{2}x-1\leqslant 1,\end{cases}$解不等式组得 $0\leqslant x<\sqrt{2}$. **答案**:(C)

例 8 函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{9-x^2}, & |x|\leqslant 3,\\x^2-9, & 3<|x|<4\end{cases}$的定义域是____.

(A) $[-3,4)$　　(B) $(-3,4)$

(C) $[-4,4)$　　(D) $(-4,4)$

提示:x 的整个取值范围即为其定义域. **答案**:(D)

例 9 设函数 $f(x)$的定义域是$[0,1]$,则 $f(x+\frac{1}{4})+f(x-\frac{1}{4})$的定义域是____.

(A) $[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$　　(B) $(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$

(C) $[-\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$　　(D) $[\frac{1}{4},\frac{5}{4}]$

提示:关键是搞清 $f(x)$中的 x 与 $f(x+\frac{1}{4})$中的$(x+\frac{1}{4})$及 $f(x-\frac{1}{4})$中的$(x-\frac{1}{4})$的等价性,由此可列出$\begin{cases}0\leqslant x+\frac{1}{4}\leqslant 1,\\0\leqslant x-\frac{1}{4}\leqslant 1,\end{cases}$解不等式组得$\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}$. **答案**:(A)

例 10 设函数 $f(x)$的定义域为$[1,\sqrt{2}]$,则 $f(\sin x)$的定义域是____.

(A) $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

(B) $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\quad(k\in\mathbf{Z})$

(C) $[2k\pi,(2k+1)\pi]\quad(k\in\mathbf{Z})$

(D) $[k\pi,(k+1)\pi]\quad(k\in\mathbf{Z})$

提示:由 $f(x)$ 的定义域 $[1,2]$,得 $1\leqslant\sin x\leqslant 2$,又由 $\sin x$ 自身的有界性可知 $\sin x\leqslant 1$,故有 $\sin x=1$,即 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z})$.

答案:(B)

例 11 已知 $f[\ln(x-1)]$ 的定义域为 $[2,1+\mathrm{e}]$,则 $f(x)$ 的定义域为____.

(A) $[\mathrm{e}^2+1,\mathrm{e}^{1+\mathrm{e}}+1]$　　(B) $[0,1]$

(C) $(\mathrm{e}^2+1,\mathrm{e}^{1+\mathrm{e}}+1)$　　(D) $(0,1)$

提示:对 $f[\ln(x-1)]$ 来说,定义域为 $2\leqslant x\leqslant 1+\mathrm{e}$,故 $0\leqslant\ln(x-1)\leqslant 1$,此即为 $f(x)$ 的定义域.　**答案**:(B)

3. 求函数的表达式

(1) 已知 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 的表达式,求 $f[\varphi(x)]$ 的表达式

方法:用 $\varphi(x)$ 代替 $f(x)$ 中的 x 即可.

例 12 已知 $f(x)=\ln x+1,\varphi(x)=\sqrt{x}+1$,则 $f[\varphi(x)]=$____.

(A) $\ln\sqrt{x}+1$　　(B) $\ln\sqrt{x}+2$

(C) $\ln(\sqrt{x}+1)+1$　　(D) $\sqrt{\ln(x+1)}+1$

答案:(C)

(2) 已知 $f[\varphi(x)]$ 的表达式,求 $f(x)$ 的表达式

方法一(换元法):令 $u=\varphi(x)$,解出 x 代入已知表达式,求出 $f(u)$ 的表达式,再将 u 换成 x,即得 $f(x)$ 的表达式.

方法二(还原法):实际上是例 12 方法的还原.

例 13 已知 $f(x+1)=x^2$,则 $f(x)=$____.

(A) x^2　(B) $(x+1)^2$　(C) $(x-1)^2$　(D) x^2-1

提示：方法一：令 $u=x+1$，则 $x=u-1$，代入已知表达式，得

$$f(u)=(u-1)^2,\quad 即\quad f(x)=(x-1)^2.$$

方法二：因为 $f(x+1)=x^2=[(x+1)-1]^2$，

所以 $f(x)=(x-1)^2$.　答案：(C)

例 14　设 $f(x)$ 是定义在实数域上的一个函数，且 $f(x-1)=x^2+x+1$，则 $f(\frac{1}{x-1})=$____.

(A) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1$　　(B) $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+1$

(C) $\frac{1}{x^2+x+1}$　　(D) $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}+3$

提示：令 $u=x-1$，则 $x=u+1$，代入已知表达式，得 $f(u)=(u+1)^2+(u+1)+1=u^2+3u+3$，所以 $f(\frac{1}{x+1})=(\frac{1}{x-1})^2+3(\frac{1}{x+1})+3=\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}+3$.　答案：(D)

(3) 已知 $y=f(x)$，求其反函数 $y=f^{-1}(x)$

方法：分以下两步求反函数：

①反解．从 $y=f(x)$ 中反解出 x，得 $x=f^{-1}(y)$．

②互换．在 $x=f^{-1}(y)$ 中交换 x,y 的位置，即得出其反函数 $y=f^{-1}(x)$．

例 15　函数 $y=\frac{e^x}{e^x+1}$ 的反函数是____.

(A) $y=\frac{x}{1-x}$　　(B) $y=\ln\frac{x}{1-x}$

(C) $y=\frac{1-x}{x}$　　(D) $y=\ln\frac{1-x}{x}$

提示：先由 $y=\frac{e^x}{e^x+1}$，解出 $e^x=\frac{y}{1-y}$，得 $x=\ln\frac{y}{1-y}$，互换后即得 $y=\ln\frac{x}{1-x}$.　答案：(B)

例 16 若 $f(\frac{1}{x})=\frac{x+1}{x}$，则 $f^{-1}(x)=$______.

(A) $x-1$ (B) $x+1$ (C) $-x-1$ (D) $-x+1$

提示：先由 $f(\frac{1}{x})=\frac{x+1}{x}$ 求出 $f(x)=1+x$，进而可求得 $f^{-1}(x)=x-1$. 答案：(A)

例 17 设 $f(x)=\ln x$，且函数 $\varphi(x)$ 的反函数 $\varphi^{-1}(x)=\frac{2(x+1)}{x-1}$，则 $f[\varphi(x)]=$______.

(A) $\ln\frac{x-2}{x+2}$ (B) $\ln\frac{x+2}{x-2}$

(C) $\ln\frac{2-x}{x+2}$ (D) $\ln\frac{x+2}{2-x}$

提示：先从 $\varphi^{-1}(x)=\frac{2(x+1)}{x-1}$ 中求出 $\varphi(x)=\frac{x+2}{x-2}$，从而求得 $f[\varphi(x)]=\ln\frac{x+2}{x-2}$. 答案：(B)

4. 函数的简单性质的判定

(1) 单调性判别方法

方法一(定义判别法)：在给定区间内，任意取两点 $x_1<x_2$，比较 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$，若有 $f(x_1)<f(x_2)$，则 $f(x)$ 在该区间内单调递增；若有 $f(x_1)>f(x_2)$，则 $f(x)$ 在该区间内单调递减.

方法二：导数符号判别法(详见第 4 章).

例 18 函数 $y=\frac{5}{1+x^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 内是______.

(A) 奇函数 (B) 偶函数

(C) 单调递增函数 (D) 单调递减函数

提示：由于 $u=1+x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调递增，而 $y=\frac{5}{u}$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调递减，故 $y=\frac{5}{1+x^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调递减.

答案：(D)

注：对于函数单调性的判别问题，这里只需掌握利用基本初等函数的单调性及复合函数的单调性判定定理能判定的题目即可，常考题型见第4章.

(2) 有界性判别方法

方法一：利用基本初等函数性质判别，熟记基本初等函数的特性及图像.

方法二(放缩法)：适当放大或缩小有关表达式导出结果.

例 19　函数 $y=\lg(x-1)$在区间____内是有界的.

(A) $(1,+\infty)$　　　　(B) $(2,+\infty)$

(C) $(1,2)$　　　　(D) $(2,3)$

提示：画出 $y=\lg(x-1)$的图像即可观察出结论.　答案：(D)

例 20　设函数 $f(x)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\sin\frac{x}{n}$($n$ 是自然数)，则 $f(x)$是____.

(A) 无界函数　　　　(B) 有界函数

(C) 单调函数　　　　(D) 以 2π 为周期的函数

提示：由于 $|f(x)|=|(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\sin\frac{x}{n}|=|\sin\frac{x}{n}|\leqslant 1$，故 $f(x)$为有界函数.　答案：(B)

(3) 奇偶性判别法

方法一：利用定义判别.

方法二：利用奇偶函数的以下特性判别：

①奇函数的图像关于原点对称；偶函数的图像关于 y 轴对称.

②两个奇(偶)函数之和仍为奇(偶)函数.

③奇(偶)函数之积或商(分母不为零)为偶函数.

④奇函数与偶函数之积或商(分母不为零)为奇函数.

例 21　设函数 $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1})$ $(a>0,a\neq 1)$，则该函数是____.

(A) 奇函数　　　　(B) 偶函数

(C) 非奇非偶函数　　　　(D) 既是奇函数又是偶函数

提示:利用定义,得 $f(-x)=\log_a(-x+\sqrt{(-x)^2+1})=\log_a(-x+\sqrt{x^2+1})=\log_a\dfrac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$=\log_a\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\log_a(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$. **答案**:(A)

例 22 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,下列函数中为偶函数的是____.

(A) $y=|f(x)|$　　(B) $y=-|f(x)|$

(C) $y=-f(-x)$　　(D) $y=f(x^2)$

提示:利用定义不难验证.(A)、(B)中的函数,只有当 $f(x)$为奇函数或为偶函数时,才均为偶函数;(C)中的函数,只有当 $f(x)$为奇(偶)函数时,$y=-f(-x)$才为奇(偶)函数. **答案**:(D)

例 23 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,下列函数中必为奇函数的是____.

(A) $y=-|f(x)|$　　(B) $y=xf(x^2)$

(C) $y=-f(-x)$　　(D) $y=f(x)+f(-x)$

提示:由于 $y=x$ 为奇函数,$y=f(x^2)$为偶函数,由此推出 $y=xf(x^2)$为奇函数.另外,不难利用定义验证 $y=f(x)+f(-x)$为偶函数. **答案**:(B)

(4) 周期性判别法

方法:利用周期函数的定义及一些简单函数的周期性判定.

例 24 在 $x\in\mathbf{R}$ 上,下列函数中为周期函数的是____.

(A) $\sin x^2$　(B) $\sin 2x$　(C) $x\cos x$　(D) $\arcsin x$

提示:此题利用定义不难验证. **答案**:(B)

注:应注意以下几个简单结论:

①函数 $y=|\sin x|$,$y=|\cos x|$的最小正周期为 π.

②函数 $y=|\sin x|+|\cos x|$的最小正周期为$\dfrac{\pi}{2}$.

③函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$与 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$的最小正周期为

$\frac{2\pi}{|\omega|}$.

④ 函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$ 与 $y=\cot(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{|\omega|}$.

5. 其他类型题举例

例 25 设函数 $f(x)=\begin{cases}|2x+1|+\dfrac{|x-1|}{x+1}, & x\neq -1,\\ 0, & x=-1,\end{cases}$ 则 $f(-2)=$____.

(A) -6 (B) 6 (C) 0 (D) 1

提示:取 $x=-2\neq -1$,则 $f(-2)=\left(|2x+1|+\dfrac{|x-1|}{x+1}\right)\Big|_{x=-2}=0$. **答案**:(C)

例 26 下列各对函数中,表示同一函数的是____.

(A) $y_1=\dfrac{(x-1)(x+3)}{x-1}$ 和 $y_2=x+3$

(B) $y_1=\sqrt{(x+1)(x-1)}$ 和 $y_2=\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}$

(C) $y_1=\sqrt{(2x-3)^2}$ 和 $y_2=|2x-3|$

(D) $y_1=\lg(x+2)^2$ 和 $y_2=2\lg(x+2)$

提示:两个函数相同,是指这两个函数的定义域和对应法则都相同. **答案**:(C)

例 27 函数 $y=4^{-x^2}$ 的值域是____.

(A) $(0,+\infty)$ (B) $(-\infty,+\infty)$

(C) $[0,1]$ (D) $(0,1]$

提示:求一些简单函数值域,可以利用换元法结合基本初等函数的性质和图形考虑. 令 $x^2=t(t\geqslant 0)$,则 $y=4^{-x^2}=(\frac{1}{4})^t$,然后利用 $y=(\frac{1}{4})^t$ 的单调性(或作图),并注意 $t\geqslant 0$ 这个限制条件,即可

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com