面向21世纪高等数学改革教材

高等数学

GAODEN SHUXUE

重庆大学数学系 编

上册

重庆出版社

面向二十一世纪高等数学改革教材

高等数学

（上册）

重庆大学数学系　编

重　庆　出　版　社

2000年8月

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/重庆大学数学系编.—重庆:重庆出版社,2000

ISBN 7-5366-5045-0/G·1719

Ⅰ.高… Ⅱ.重… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 29061 号

高 等 数 学

重庆大学数学系 编

特约编辑 张伯春
责任编辑 黄友六
封面设计 金乔楠
技术设计 刘黎东

重庆出版社出版发行
(重庆长江二路 205 号)
新华书店经销
重庆建筑大学印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 37.5
字数 998 千
2000 年 8 月第 1 版
2000 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
印数 1-8500

ISBN 7-5366-5045-0/G·1719
定价:48.50 元(上、下册)

前　言

高等数学是工科大学生最重要的基础理论课之一。通过数学教育可以培养学生深入细致的洞察和抽象概括能力、逻辑思维能力，以及严谨的思维和分析判断能力，这些能力不仅为科学研究所必需，而且具备这种理性思维品格和能力的人才在当今竞争机制的社会里越来越显示出他们的优势。为面向 21 世纪，适应现代科学技术的发展和市场经济的需要，使培养出来的大学生具有国际竞争力，数学教学必须改革。数学教学的改革应是多方面的，教材的改革是其中非常重要的一个方面。

我国现行的高等数学教材大都具有理论严谨、结构完整且系统、内容简明扼要等优点，但是没有完全摆脱 50 年代前苏联教材的传统模式，启发性不够，也不太适合学生自学。

我们编写这套《高等数学》教材的基本想法主要有两点：一是适合学生自学，在人的一生中需要具备很多能力，其中最重要的能力就是自学的能力，即终身自学的能力；二是结合中国人与美国人编写教材的优点，在编写过程中我们参考了哈佛大学、麻省理工大学、加州大学等世界著名大学的微积分教材。

这套《高等数学》改革教材，是我们几位作者经过半年多的时间讨论、酝酿，有时甚至是激烈地争论，最后制定出如下的编写原则：

1. 教科书是为学生编写的；
2. 三元法则：每个题目(topic)都尽力地由几何的、数值的和代数的方法来表示；
3. 数学中的定义和结论产生于对实际问题的调查研究，只要有可能，总是从实际问题开始，从中导出一般结论，即强调归纳和发散思维；
4. 在保证教学大纲基本要求的同时，注意渗透现代数学的观点、概念、方法、术语和符号；
5. 突出数学基本思想，淡化各种运算技巧；
6. 突出应用和数学建模；
7. 重视数值计算和培养学生应用数学软件的能力；
8. 习题方面，多花功夫；
9. 每位作者，应至少阅读两本由英美人编写的微积分教材。

本书的第一、二章由叶仲泉博士编写，第三、四章由刘国诚教授编写，第五、六章由张敏编写，第七、十二章由易正俊博士编写，第八、九章由牛劲博士编写，第十、十一章由段正敏执笔。上册第一至六章由叶仲泉统稿，上册第七章及下册由牛劲、段正敏统稿。在编写的过程中，自始至终都得到赵中时教授的支持和指导；重庆交通学院的张伯春教授在百忙中抽出时间为本书审稿，并提出了一些很好的意见；本书的出版也得到了重庆出版社的大力支持。在此对他们表示衷心的感谢。

尽管我们花费了许多心血编写这套书，但由于水平所限，本书一定还有许多值得改进的地方，欢迎读者和同行专家提出批评与建议，以便我们以后在修订和再版时加以改进。

编　者

2000 年 5 月于重庆大学

目　　录

向量

第一章　极限论

微积分的产生是人类历史上的一件大事，它是科学发明史上最精彩的篇章之一。

微积分是研究函数的行为、性质和应用的数学学科，它的基本内容为：极限论，微分学和积分学。微分学研究函数的局部性质，积分学研究函数的全局性质，而极限论是整个微积分的基础，也是研究函数的基本手段和方法。正确理解微积分的基本概念以及由此产生的极其大量丰富的成果，需要对极限的概念和函数的概念有深刻的认识。

§1.1　函　　数

函数是数学最基本的概念，也是微积分研究的基本对象。自 17 世纪近代数学产生以来，函数的概念一直是处于数学思想的真正核心位置。

一、函数的概念

圆的面积是其半径的函数；理想气体的压力是密度和温度的函数；运动着的物体的位置是时间的函数；圆柱体的体积是其半径和高的函数；足球比赛的票价是观众所在位置的函数。

上述例子表达了这样一种基本思想：通过某一事实的信息去推知另一事实，换句话说，从一个或者几个变量的值去推知另一变量的值。

定义 1　设有两个变量 x 和 y，变量 x 的变化范围为 D。如果对于 D 中的每一个 x 值，按照某一确定的对应关系，都可以唯一确定变量 y 的一个相应值，我们就说变量 y 是变量 x 的一个函数，记为

一对一 *
一对多 *
多对一

$$y = f(x), x \in D,$$

称 x 为自变量，称 y 为因变量。

上述定义中，集合 D 称为函数的定义域，$f(x)$ 称为 f 在 x 的值，或者称为 x 在映射 f 下的像。$f(x)$ 的所有可能取值称为 f 的值域，即 $\{f(x) \mid x \in D\}$。

将函数看成一机器(machine)(如图 1.1 所示)是有用的。如果 $x \in D$，当 x 进入机器(此时将 x 视为输入(input))时，机器根据函数的规则产生一个输出(output) $f(x)$。这样我们可以将定义域看作所有可能输入的集合，而值域为所有可能输出的集合。

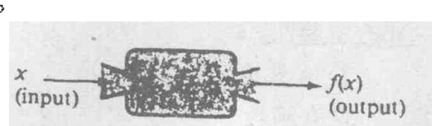

图 1.1

描述函数的另一种方法是用如图 1.2 所示的箭头图。

假设函数 f 的定义域为 D，则 f 的图象为有序对

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

构成的集合。换句话说，f 的图象是由平面坐标系上所有满足 $y = f(x)$ 的点 (x, y) 构成。

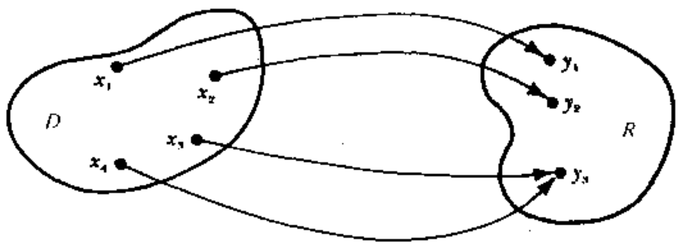

图 1.2

用图象表示函数，使我们可以用几何方法来研究函数的性质。应该指出的是：产生微积分的源泉除了物理直观外，还有几何直观，几何直观对于理解微积分的概念、方法和结论是很有用的。

函数的图象表示 $x-y$ 平面上的一条曲线，如果对于自变量的一个值，函数的对应值不只一个，这时也称为多值函数。例如，$y^2 = x$ 可以看成两个函数 $y=\sqrt{x}$ 和 $y=-\sqrt{x}$。

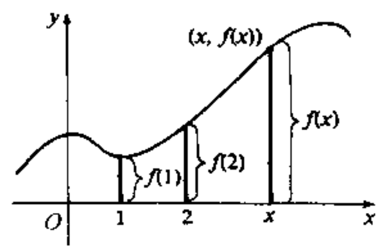

图 1.3

二、函数的几何特性

1. 单调性

设有函数

$$y = f(x), x \in D,$$

若对任意的 $x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2$ 有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上是单调增加的；若对任意的 $x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2$ 有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上是单调减少的。

函数的单调性也可用如下的方式来定义：$f(x)$ 在 D 上单调增加 $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$ 有 $(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) > 0$；$f(x)$ 在 D 上单调减少 $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D, x_1 \neq x_2$ 有 $(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) < 0$。其中"$\forall$"表示"任意的"。

函数的单调性是函数非常重要的性质。它在研究反函数的存在性、函数的极值问题和方程根的个数等方面起着关键的作用。值得注意的是，按照单调性的定义来判断函数的单调性是非常困难的，以后我们将学习用很简便的方法来判断函数的单调性，即利用导数的符号来判断函数的单调性。

2. 有界性

设有函数

$$y = f(x), x \in D,$$

若存在两个常数 A 和 B，使得

$$A \leqslant f(x) \leqslant B, x \in D, \tag{1.1}$$

则称函数 f 有界，称 A 为它的下界，B 为它的上界。

一个函数的上界或者下界如果存在，则其上界或者下界不是唯一的。可以证明，如果一个函数的上界存在，则一定存在最小的上界(称为上确界)；如果一个函数的下界存在，则一定存在最大的下界(称为下确界)。

∃：存在　　s.t：使得.
∀：任意

函数的有界性也可用下述方式定义：

$f(x)$ 在其定义域 D 上有界 $\Leftrightarrow$ 存在正常数 $M>0$，使得

$$|f(x)|\leqslant M,\forall x\in D。\tag{1.2}$$

很容易证明，这两个定义是等价的。事实上，若存在常数 A 和 B，使得

$$A\leqslant f(x)\leqslant B,x\in D,$$

这时取 $M=\max\{|A|,|B|\}$（"max"是maximize的缩写，表示"最大的"；"min"是minimize的缩写，表示"最小的"），则成立

$$|f(x)|\leqslant M,\forall x\in D。$$

反之，若上述等式成立，只要取 $A=-M,B=M$，则得到不等式

$$A\leqslant f(x)\leqslant B,x\in D,$$

此即有界性的定义。

3.奇偶性 定义域对称区间

若函数 $y=f(x)$ 满足

$$f(-x)=-f(x),\forall x\in D,\tag{1.3}$$

$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$
（奇）（偶）

则称 f 为奇函数，它的图象关于原点对称。相应的，如果满足

$$f(-x)=f(x),\forall x\in D,\tag{1.4}$$

则称 f 为偶函数，它的图象关于 y 轴对称。

如果知道 f 在对称区间 $[-l,l]$（或 $(-l,l)$）上的奇偶性，则只须讨论 f 在 $[0,l]$（或 $[0,l)$）上的性质就可以了，因为 f 在 $[-l,0]$（或 $(-l,0]$）的性质完全可以由对称性得到。

4.周期性

如果函数 $f(x),x\in(-\infty,+\infty)$ 满足：存在常数 $T>0$，使得

$$f(x+T)=f(x),\forall x\in(-\infty,+\infty)\tag{1.5}$$

（"∞"表示"无穷大"），则称 f 为周期函数，T 为它的一个周期。

如 $y=\sin x$ 是周期函数，$2n\pi(n=1,2,3,\cdots)$ 都是它的周期，2π 是它的最小正周期。但并非每一个函数都有最小正周期，例如 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1,x\text{ 为有理数},\\0,x\text{ 为无理数}\end{cases}\tag{1.6}$$

是一个周期函数，任何正有理数都是它的周期，但它无最小正周期。另外，它还是一个偶函数。

三、函数的延拓

考察函数 $f(x)=x^2,x\in(-\infty,+\infty)$ 与 $g(x)=x^2,x\in[0,3]$，显然有

$$D_g\subset D_f\text{ 且当 }x\in D_g\text{ 时 }f(x)=g(x),$$

此时称函数 f 是函数 g 的延拓。

一般地，如果

$$D_g\subset D_f\text{ 且当 }x\in D_g\text{ 时 }f(x)=g(x),$$

则称函数 f 是函数 g 的延拓。

例　将函数 $f(x)=x$ 延拓成整个实数轴上周期为 2 的偶函数（图 1.4）。

解　先将 f 进行偶性延拓，得函数

$$g(x)=|x|,x\in[-1,+1],$$

再将函数 g 进行周期延拓，得

$$G(x)=\begin{cases}x-2n, & 2n\leqslant x\leqslant 2n+1,\\ -[x-2(n+1)], & 2n+1\leqslant x\leqslant 2(n+1),\end{cases}\quad n=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

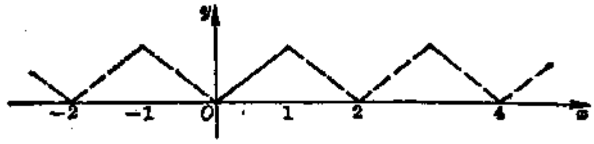

图 1.4

g(x) 内函数值域（部分或全部）在外函数的定义域 f(g(x))

四、复合函数与反函数

1.复合函数

设 $y=f(u)=\sqrt{u}$，$u=g(x)=2x^2+3$，将后一函数代入前一函数，得

$$y=f(u)=f(g(x))=\sqrt{2x^2+3},$$

这种将一个函数代入另一个函数的运算叫函数的"复合"运算。

一般地，给定两个函数 f 和 g，设 $x\in D_g$，若 $g(x)\in D_f$，则我们可以计算 $f(g(x))$ 的值。这样得到的新函数 $h(x)=f(g(x))$ 称为函数 f 和 g 的复合函数，记为

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))。\tag{1.7}$$

当构成复合函数时，关键的问题是中间变量是否能代入，如 $f(u)=\arcsin u$，$g(x)=x^2+2$ 就不能构成复合函数。

实际问题中，经常是将一个复杂的函数分解成若干个简单函数的复合，如 $y=e^{\sin^2x}$ 可以分解为 $y=e^u$，$u=v^2$，$v=\sin x$ 这几个函数的复合。

2.反函数

在函数的定义中，一个是自变量，一个是因变量。但在实际问题中，谁是自变量，谁是因变量，并不是绝对的。如自由落体运动中，路程 s 与时间 t 的关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\tag{1.8}$$

知道时间 t 求路程 s，用上式即可。但若已知路程求时间，则应从(1.8)式中将 t 解出，得

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}},\tag{1.9}$$

此时 s 成了自变量，t 成了因变量。

这表明函数的自变量与因变量的地位在一定条件下可以相互转换。这样得到的新函数叫做原来那个函数的反函数。

定义2 已给一个函数 $y=f(x)$，其值域为 R。如果对于 R 中的每一个 y 值，都可以从 $y=f(x)$ 确定唯一的一个 x 值，则得到一个定义在 R 上的以 y 为自变量，x 为因变量的函数 $x=f^{-1}(y)$。

应该注意的是，并非每一个函数都有反函数。

反函数存在定理 如果函数 $y=f(x)$ 在其定义域 D 上是单调增加(减少)的，则它的反函数

$$x = f^{-1}(y), y \in R$$

存在,并且其反函数也是单调增加(减少)的。同变.　　＊. 复合函数拆解成基本初等函数

五、初等函数

函数是微积分研究的基本对象,在微积分中主要研究的函数是初等函数。

1. 基本初等函数

以下几类函数称为基本初等函数:

(1) 幂函数:

$$y = x^{\alpha} \quad (\alpha \text{为任意给定的实数})。$$

(2) 指数函数:

$$y = a^{x}(a > 0, a \neq 1, \text{为一常数})。$$

指数函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$,值域为 $R = (0, +\infty)$。

(3) 对数函数:

$$y = \log_{a}x(a > 0, a \neq 1, \text{为一常数})。$$

定义域为$(0, +\infty)$,值域为 $R = (-\infty, +\infty)$。对数函数与指数函数互为反函数。在微积分中用得最多的是自然对数函数:$y = \log_{e}x = \ln x$,其中 $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = 2.71828\cdots$。

(4) 三角函数:

$$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x。$$

它们都是周期函数。

(5) 反三角函数:

$$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x。$$

它们分别是 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$ 的反函数。前两个函数的定义域为$[-1, +1]$,后两个函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$。它们都是有界函数,且

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi,$$

$$\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}, 0 < \operatorname{arccot} x < \pi。$$

以上这些函数在初等数学中已经学过,请读者画出它们的图象,并从图形中认识它们的几何特性。

2. 初等函数

基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合所构成的函数统称为初等函数。注意程序

在微积分中,经常用到的函数就是这类初等函数。在工程技术中还常用到一类初等函数,即双曲函数:

双曲正弦函数: $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$;

双曲余弦函数: $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$;

双曲正切函数: $y = \operatorname{th} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$;

双曲余切函数：　$y = \operatorname{cth} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$。

习 题 1－1

1. 确定下列函数的定义域：

(1) $y = \sqrt{3-x} + \arctan\dfrac{1}{x}$；　　(2) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$；

(3) $y = \arccos\dfrac{2x}{1+x}$；　(4) $y = \dfrac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}$；　(5) $y = \lg(\sin x)$。

2. 若 $f(x)$ 的定义域为 $[2,3]$，求 $f(\sqrt{9-x^2})$ 的定义域。

3. 设 $F(x+1) = x + \cos x$，求 $f(8)$ 与 $f(x)$。

4. 若 $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & -\infty < x \leqslant 0, \\ 2^x, & 0 < x < +\infty, \end{cases}$ 求 $f(-2)$、$f(0)$、$f(2)$。

5. 设 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-x}} + \lg(x-2)$，求：

(1) $f(x)$ 的定义域；　　(2) $f(\ln x)$ 的定义域。

6. 求函数 $y = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1, \\ x^2, & 1 \leqslant x \leqslant 4, \\ 2^x, & 4 < x < +\infty \end{cases}$ 的反函数及其定义域。

7. 证明函数 $f(x) = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加。

8. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y = 3x^3 - 5\sin x$；　　(2) $y = (1-x)^{\frac{2}{3}} + (1+x)^{\frac{2}{3}}$；

(3) $y = \cos(\sin x)$；　　(4) $y = x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$；

(5) $y = x\dfrac{a^x - 1}{a^x + 1}\ (a > 0)$。

9. 指出如下的函数是由哪些基本初等函数复合而成的：

(1) $y = \arctan\sqrt{1+x^2}$；　　(2) $y = \ln\cos x^3$。

10. 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1, \\ x, & x \geqslant 1, \end{cases}$　$\varphi(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0, \\ x^2 - 1, & x \geqslant 0, \end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$。

11. 证明：定义于 $(-\infty, +\infty)$ 内的任何函数都可以表示为一个奇函数与一个偶函数之和。

12. 煤油在作为喷气发动机燃料之前需要通过粘土以去除其中的污染物。假设粘土呈管状，且每米管道可去除进入其中的污染物的 20%，则煤油通过每米管道后还留 80% 的污染物。若 P_0 是初始污染物量，则 $P = f(n)$ 是通过 n 米管道后污染物量。求 $P = f(n)$ 的表达式。

13. 如图 1.5 所示，$OABC$ 是一单位正方形，另有一条直线，其方程为 $x + y = t\ (0 < t < 2)$。试写出正方形与平面区域 $x + y < t$ 的公共部分（即阴影部分）的面积 $S(t)$ 的函数表达式。

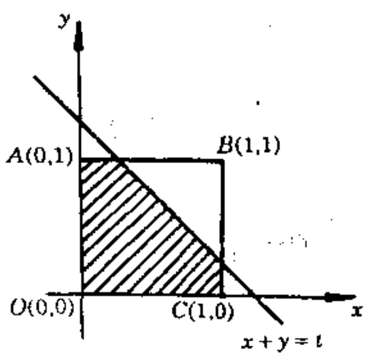

图 1.5

§1.2　微积分的一些基本问题

微积分与初等数学有很大的差别，初等数学基本上是常量数学，而微积分是变量数学，它研究运动和变化。本节通过几个直观的例子，来说明微积分的基本思想和基本的思考问题的方法。

一、面积问题

1. 多边形的面积

在初等数学里，我们已会求一些规则图形的面积，如三角形、正方形、矩形和多边形的面积，这些图形的特征是它们的边界都是由一些线段构成，而且多边形的面积都可以转换为三角形的面积来计算。

对于正多边形，我们有如下的面积公式：

$$A = \frac{1}{2} l_n h_n,$$

其中 l_n 是多边形的周长，h_n 是边心距（图 2.1）。

2. 圆面积，割圆术

读者一定很熟悉圆的面积公式

$$A = \pi r^2,$$

但这个公式是怎么来的或者怎样证明？大家就不一定知道了。

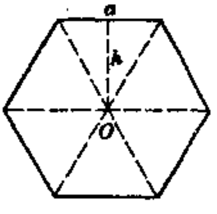

图 2.1

多边形的面积之所以好算，是因为它的边界是一些线段。而圆的面积之所以难算，是因为圆的边界是曲线。另一方面，尽管整个圆是曲的，但每一小段圆弧却可以近似地看成是直的。按照这种思路，我们在圆上取很多很密的分点，将圆分成许多的小段，于是我们可以用多边形的面积近似代替圆的面积。为简单起见，我们用正 n 边形来逼近圆。如图 2.2 所示。

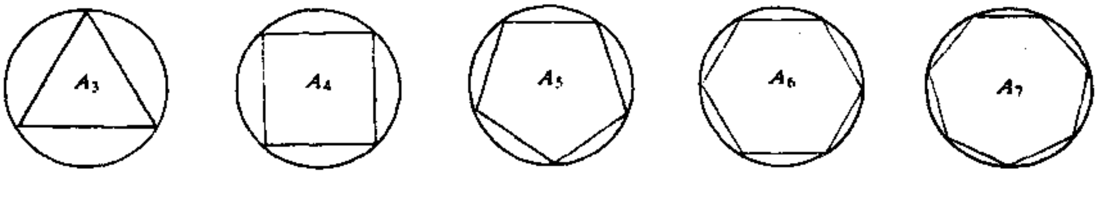

图 2.2

很显然，正多边形的边数 n 越大，则正多边形的面积与圆的面积越接近，当 $n \to \infty$ 时，正多边形面积的极限即为圆的面积。

正 n 边形的面积为

$$A_n = \frac{1}{2} l_n h_n,$$

其中 l_n 与 h_n 分别是正 n 边形的周长和边心距。显然当 $n \to \infty$ 时，l_n 与 h_n 的极限分别为圆的周长与半径，故圆的面积

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} l_n h_n = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r = \pi r^2。$$

其中“lim”是极限“limit”的缩写。

上述这种用多边形的面积来逼近圆面积的方法，早在古希腊时代就提出来了。另外，我国古代数学家刘徽在第3世纪提出了所谓的“割圆术”，其基本思想和上述方法是一致的，刘徽说：“割之弥细，所失愈少。割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”

3. 曲边梯形的面积

在上面求圆的面积时采用的以直线段近似代替圆弧的方法，在微积分中称为局部“以直代曲”，这是一种非常基本的方法。下面我们利用这种方法来研究曲边梯形的面积问题。

例1 求图2.3中曲边三角形的面积。

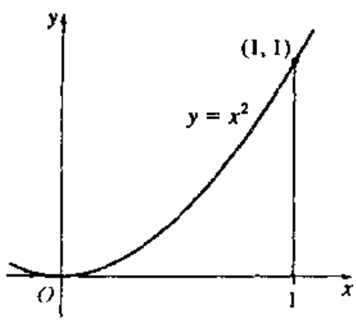

图2.3

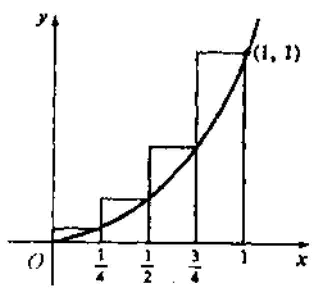

图2.4

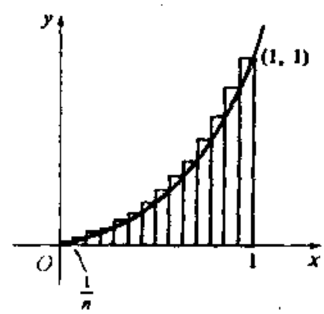

图2.5

在区间[0,1]上取很多很密的分点，然后过这些分点分别作平行于y轴的直线，从而将曲边梯形分成很多很窄的小竖条，而每一个小竖条都可以近似地看作梯形，甚至可以像图2.4与图2.5那样将它近似地看作小矩形。

为简单起见，将[0,1]n等分，于是将[0,1]分成了n小段，每小段的长度为$\frac{1}{n}$，分点的坐标分别为$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}$。小矩形共有$(n-1)$个，它们的面积之和为

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{1}{n} + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^3}[1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2] \\ &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)。 \end{aligned}$$

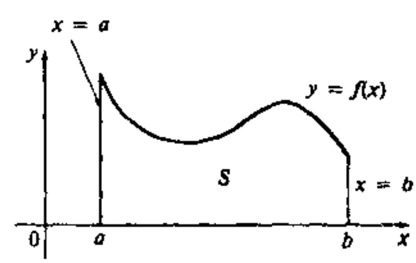

图2.6

很显然，n越大，则S_n与曲边梯形的面积越接近。当n无限增大时，S_n的极限即为曲边梯形的面积。故

$$A = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}。$$

上述求曲边梯形的面积的方法可以用来求如图2.6一般的曲边梯形的面积。以后研究定积分时，还要回到这

个问题。

二、切线问题

回顾一下圆的切线的定义：与圆只有一个交点的直线称为圆的切线（图 2.7）。但圆的切线的定义对一般的曲线来说将不再适用。即一般曲线的切线不能理解为与曲线只有一个交点的直线，请看图 2.8。

图 2.7

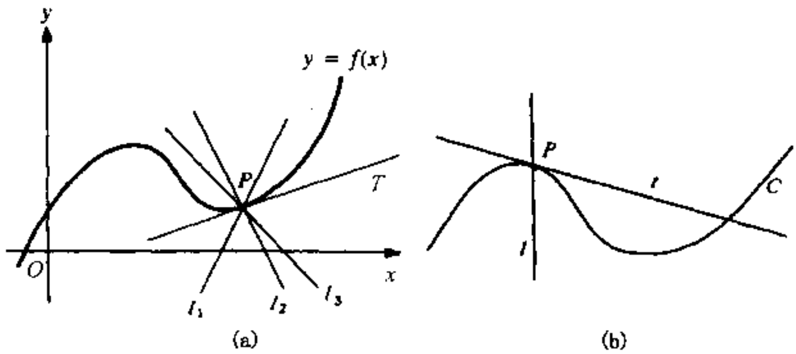

图 2.8

在图 2.8(a) 中，过 P 点且与曲线只有一个交点的直线有无限多条，但它们都不是该曲线的切线（PT 除外）；在图 2.8(b) 中，直线 t 与曲线有两个交点，但它却是该曲线的切线。

那么，怎样定义一条曲线的切线？又该怎样求一条曲线的切线的斜率呢？要确定一条直线需要两点，但我们无法找到切线上的两点。

想象一下用直尺作曲线的切线的过程，开始时，直尺往往与曲线有两个交点，于是就得到一条割线，比如说 PQ，固定 P 点，让 Q 点沿曲线移动，分别得到割线 $PQ_1, PQ_2, PQ_3, \cdots$，等等，当 Q 点沿曲线无限接近 P 点时，割线的极限位置即为曲线的切线。如图 2.9 所示。

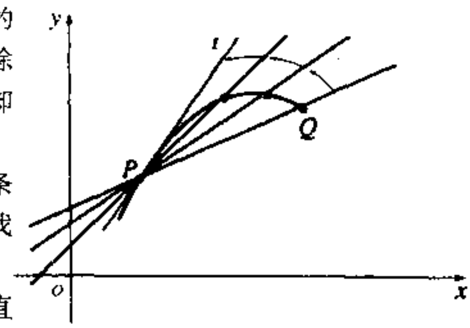

图 2.9

例 2　求抛物线 $y = x^2$ 上点 $P(1,1)$ 处的切线的斜率（图 2.10）。

设 $Q(1 + \Delta x, 1 + \Delta y)$ 为抛物线上任意一点，于是割线 PQ 的斜率为

$$k_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = 2 + \Delta x。$$

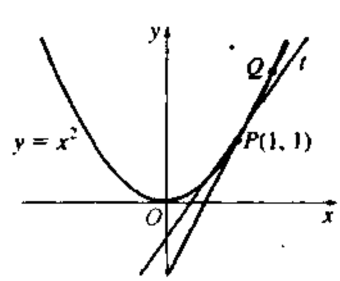

图 2.10

故抛物线 $y = x^2$ 在点 $(1,1)$ 处的切线的斜率为

$$k = \lim_{Q \to P} k_{PQ} = \lim_{\Delta x \to 0}(2 + \Delta x) = 2。$$