网络继续教育课程学习指导丛书

高等数学

学习与考试指导（下）

韩 华 主编

武汉理工大学出版社
WUTP

网络继续教育课程学习指导丛书

高等数学学习与考试指导(下)

（工科类专科适用）

主　编　韩　华

武汉理工大学出版社

内容提要

本书是根据编者多年进行远程教育和教学研究的经验，针对远程教育的教与学精心设计的学习指导书。

本书分上下两册。下册包括定积分及其应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、微分方程和无穷级数。每章包括学习指导、学习内容、释疑解难和基础练习及参考答案，其中学习内容包括要点归纳、典型例题、本节小结和思考及解答。附录包括课程教学及考试大纲、模拟试卷及解答和历年试卷及解答。

本书可供远程教育的工科类专科学生使用，也可供学习高等数学课程的读者作为学习辅导书和考试复习书使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习与考试指导/韩华主编. —武汉：武汉理工大学出版社，2009.6
ISBN 978-7-5629-2931-4

Ⅰ.高…
Ⅱ.韩…
Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 102464 号

出　版：武汉理工大学出版社（武汉市洪山区珞狮路 122 号　邮编：430070）
发　行：武汉理工大学出版社发行部
印　刷：武汉理工大印刷厂
开　本：787×960　1/16
印　张：33.75
字　数：662 千字
版　次：2009 年 7 月第 1 版　2009 年 7 月第 1 次印刷
印　数：1～3000 册
定　价：60.00 元（上、下册）

前　　言

《高等数学学习与考试指导》是针对远程教育的工科类专科学生的教与学精心设计的学习指导书。编者根据多年进行远程教育和教学研究的经验，本着由简到繁、通俗易懂、适于远程教育和自主学习的指导思想编写此书。编写时，紧扣教学大纲要求，注重基本知识的系统讲解、典型方法的全面训练，强调对基本概念、定理、结论的理解与应用。

全书分上、下两册，全部内容共分为十一章和五个附录。每章均由四部分构成。

第一部分是学习指导，包括章节学习的重点、难点、常见题型及学习方法指导。

第二部分是学习内容，分节展开写。每一节包含要点归纳、典型例题、本节小结和思考解答。其中要点归纳是对教学重点内容进行简明扼要的归纳和说明，对难点知识进行直观通俗的解释；典型例题注重对解题思路进行指导，强调基本题型的分析和解题过程的指点；本节小结是以提纲的形式提炼本节的知识点，方便学生巩固复习；思考解答是在掌握基本知识和基本题型的基础上提供进一步思考的内容，以便学生增强分析问题的能力和解题能力。

第三部分是释疑解难。针对学生学习过程中有关概念、定理理解存在的困惑和解题过程中的难点问题有针对性地给出解释。

第四部分是基础练习。按照与例题对应、解法相同的原则挑选基础习题并且给出详细的解答。本书可以供学生平时学习和考试复习时使用。

附录包含课程教学及考试大纲、模拟试卷及解答和近几年武汉理工大学网络学院统考试卷和解答。

全书设计内容全面、重点突出，知识结构与教学录像对应，其中每章的第一部分和第二部分都由编者进行了视频讲解，方便学生自学，本书是下册。下册的主要内容包括定积分及其应用，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，二重积分，微分方程和无穷级数等内容，供高等数学课程第二学期使用，也可供学习高等数学的读者作为学习辅导书和考试复习书使用。

目　录

6　定积分及其应用 …………………………………………………… (1)
6.1　定积分的概念 …………………………………………………… (1)
6.1.1　要点归纳 …………………………………………………… (1)
6.1.2　典型例题 …………………………………………………… (3)
本节小结 …………………………………………………… (4)
思考及解答 …………………………………………………… (4)
6.2　定积分的性质 …………………………………………………… (5)
6.2.1　要点归纳 …………………………………………………… (5)
6.2.2　典型例题 …………………………………………………… (7)
本节小结 …………………………………………………… (8)
思考及解答 …………………………………………………… (9)
6.3　积分上限函数 …………………………………………………… (9)
6.3.1　要点归纳 …………………………………………………… (9)
6.3.2　典型例题 …………………………………………………… (10)
本节小结 …………………………………………………… (12)
思考及解答 …………………………………………………… (12)
6.4　牛顿-莱布尼兹公式 …………………………………………………… (12)
6.4.1　要点归纳 …………………………………………………… (12)
6.4.2　典型例题 …………………………………………………… (13)
本节小结 …………………………………………………… (16)
思考及解答 …………………………………………………… (16)
6.5　定积分的换元法 …………………………………………………… (16)
6.5.1　要点归纳 …………………………………………………… (16)
6.5.2　典型例题 …………………………………………………… (17)
本节小结 …………………………………………………… (19)
思考及解答 …………………………………………………… (19)
6.6　定积分的分部积分法 …………………………………………………… (20)

6.6.1 要点归纳 …… (20)
6.6.2 典型例题 …… (20)
本节小结 …… (23)
思考及解答 …… (23)
6.7 定积分计算的几个特殊性质 …… (24)
6.7.1 要点归纳 …… (24)
6.7.2 典型例题 …… (24)
本节小结 …… (26)
思考及解答 …… (26)
6.8 广义积分 …… (27)
6.8.1 要点归纳 …… (27)
6.8.2 典型例题 …… (28)
本节小结 …… (30)
思考及解答 …… (30)
6.9 定积分的几何应用(一) …… (30)
6.9.1 要点归纳 …… (30)
6.9.2 典型例题 …… (32)
本节小结 …… (34)
思考及解答 …… (34)
6.10 定积分的几何应用(二) …… (34)
6.10.1 要点归纳 …… (34)
6.10.2 典型例题 …… (36)
本节小结 …… (39)
思考及解答 …… (39)
6.11 定积分的物理应用 …… (39)
6.11.1 要点归纳 …… (39)
6.11.2 典型例题 …… (39)
本节小结 …… (42)
思考及解答 …… (42)
释疑解难 …… (42)
基础练习 …… (45)
参考解答 …… (46)
7 向量代数与空间解析几何 …… (49)
7.1 空间直角坐标系 …… (49)

7.1.1 要点归纳…………………………………………………………………… (49)
7.1.2 典型例题…………………………………………………………………… (50)
本节小结 …………………………………………………………………… (51)
思考及解答 …………………………………………………………………… (51)
7.2 向量的概念…………………………………………………………………… (52)
7.2.1 要点归纳…………………………………………………………………… (52)
7.2.2 典型例题…………………………………………………………………… (53)
本节小结 …………………………………………………………………… (54)
思考及解答 …………………………………………………………………… (54)
7.3 向量的线性运算…………………………………………………………… (55)
7.3.1 要点归纳…………………………………………………………………… (55)
7.3.2 典型例题…………………………………………………………………… (56)
本节小结 …………………………………………………………………… (57)
思考及解答 …………………………………………………………………… (58)
7.4 向量的数量积…………………………………………………………… (58)
7.4.1 要点归纳…………………………………………………………………… (58)
7.4.2 典型例题…………………………………………………………………… (59)
本节小结 …………………………………………………………………… (61)
思考及解答 …………………………………………………………………… (61)
7.5 向量积和混合积…………………………………………………………… (62)
7.5.1 要点归纳…………………………………………………………………… (62)
7.5.2 典型例题…………………………………………………………………… (63)
本节小结 …………………………………………………………………… (65)
思考及解答 …………………………………………………………………… (65)
7.6 平面方程…………………………………………………………………… (65)
7.6.1 要点归纳…………………………………………………………………… (65)
7.6.2 典型例题…………………………………………………………………… (66)
本节小结 …………………………………………………………………… (68)
思考及解答 …………………………………………………………………… (68)
7.7 直线方程…………………………………………………………………… (69)
7.7.1 要点归纳…………………………………………………………………… (69)
7.7.2 典型例题…………………………………………………………………… (70)
本节小结 …………………………………………………………………… (73)
思考及解答 …………………………………………………………………… (73)

7.8　曲面及其方程…………………………………………………………（73）
7.8.1　要点归纳…………………………………………………………（73）
7.8.2　典型例题…………………………………………………………（75）
本节小结 ……………………………………………………………（76）
思考及解答 …………………………………………………………（76）
7.9　空间曲线及其方程…………………………………………………（76）
7.9.1　要点归纳…………………………………………………………（76）
7.9.2　典型例题…………………………………………………………（77）
本节小结 ……………………………………………………………（80）
思考及解答 …………………………………………………………（80）
释疑解难 ……………………………………………………………（80）
基础练习 ……………………………………………………………（83）
参考解答 ……………………………………………………………（85）
8　多元函数微分学…………………………………………………（88）
8.1　多元函数的基本概念………………………………………………（88）
8.1.1　要点归纳…………………………………………………………（88）
8.1.2　典型例题…………………………………………………………（91）
本节小结 ……………………………………………………………（93）
思考及解答 …………………………………………………………（93）
8.2　多元函数的偏导数(一)……………………………………………（94）
8.2.1　要点归纳…………………………………………………………（94）
8.2.2　典型例题…………………………………………………………（95）
本节小结 ……………………………………………………………（97）
思考及解答 …………………………………………………………（97）
8.3　多元函数的偏导数(二)……………………………………………（97）
8.3.1　要点归纳…………………………………………………………（97）
8.3.2　典型例题…………………………………………………………（98）
本节小结……………………………………………………………（100）
思考及解答…………………………………………………………（100）
8.4　全微分及其应用 …………………………………………………（100）
8.4.1　要点归纳 ………………………………………………………（100）
8.4.2　典型例题 ………………………………………………………（101）
本节小结……………………………………………………………（103）
思考及解答…………………………………………………………（104）

8.5 多元复合函数求导(一) …………………………………………………… (104)
8.5.1 要点归纳 …………………………………………………… (104)
8.5.2 典型例题 …………………………………………………… (105)
本节小结…………………………………………………………… (108)
思考及解答………………………………………………………… (108)
8.6 多元复合函数求导(二) …………………………………………………… (108)
8.6.1 要点归纳 …………………………………………………… (108)
8.6.2 典型例题 …………………………………………………… (109)
本节小结…………………………………………………………… (112)
思考及解答………………………………………………………… (112)
8.7 隐函数求导 …………………………………………………… (113)
8.7.1 要点归纳 …………………………………………………… (113)
8.7.2 典型例题 …………………………………………………… (114)
本节小结…………………………………………………………… (117)
思考及解答………………………………………………………… (117)
8.8 多元函数的极值及其求法 …………………………………………………… (118)
8.8.1 要点归纳 …………………………………………………… (118)
8.8.2 典型例题 …………………………………………………… (119)
本节小结…………………………………………………………… (121)
思考及解答………………………………………………………… (121)
8.9 微分法在几何上的应用 …………………………………………………… (122)
8.9.1 要点归纳 …………………………………………………… (122)
8.9.2 典型例题 …………………………………………………… (124)
本节小结…………………………………………………………… (126)
思考及解答………………………………………………………… (126)
8.10 方向导数与梯度…………………………………………………… (126)
8.10.1 要点归纳…………………………………………………… (126)
8.10.2 典型例题…………………………………………………… (128)
本节小结…………………………………………………………… (130)
思考及解答………………………………………………………… (130)
释疑解难…………………………………………………………… (131)
基础练习…………………………………………………………… (135)
参考解答…………………………………………………………… (136)

9 二重积分 …… (139)
9.1 二重积分的概念与性质 …… (139)
9.1.1 要点归纳 …… (139)
9.1.2 典型例题 …… (141)
本节小结 …… (142)
思考及解答 …… (142)
9.2 二重积分的计算(一) …… (143)
9.2.1 要点归纳 …… (143)
9.2.2 典型例题 …… (144)
本节小结 …… (150)
思考及解答 …… (150)
9.3 二重积分的计算(二) …… (151)
9.3.1 要点归纳 …… (151)
9.3.2 典型例题 …… (152)
本节小结 …… (154)
思考及解答 …… (154)
9.4 二重积分的应用 …… (155)
9.4.1 要点归纳 …… (155)
9.4.2 典型例题 …… (157)
本节小结 …… (160)
思考及解答 …… (160)
释疑解难 …… (160)
基础练习 …… (164)
参考解答 …… (165)
10 微分方程 …… (168)
10.1 微分方程的基本概念 …… (168)
10.1.1 要点归纳 …… (168)
10.1.2 典型例题 …… (169)
本节小结 …… (170)
思考及解答 …… (171)
10.2 可分离变量微分方程 …… (171)
10.2.1 要点归纳 …… (171)
10.2.2 典型例题 …… (171)

本节小结……………………………………………………………………………（173）
思考及解答……………………………………………………………………………（173）
10.3　齐次微分方程……………………………………………………………………（174）
10.3.1　要点归纳………………………………………………………………………（174）
10.3.2　典型例题………………………………………………………………………（175）
本节小结……………………………………………………………………………（178）
思考及解答……………………………………………………………………………（178）
10.4　一阶线性微分方程………………………………………………………………（178）
10.4.1　要点归纳………………………………………………………………………（178）
10.4.2　典型例题………………………………………………………………………（179）
本节小结……………………………………………………………………………（182）
思考及解答……………………………………………………………………………（182）
10.5　贝努利方程…………………………………………………………………………（182）
10.5.1　要点归纳………………………………………………………………………（182）
10.5.2　典型例题………………………………………………………………………（183）
本节小结……………………………………………………………………………（185）
思考及解答……………………………………………………………………………（185）
10.6　可降阶的二阶微分方程…………………………………………………………（186）
10.6.1 要点归纳　………………………………………………………………………（186）
10.6.2　典型例题………………………………………………………………………（187）
本节小结……………………………………………………………………………（189）
思考及解答……………………………………………………………………………（189）
10.7　高阶线性微分方程解的结构理论………………………………………………（190）
10.7.1　要点归纳………………………………………………………………………（190）
10.7.2　典型例题………………………………………………………………………（192）
本节小结……………………………………………………………………………（193）
思考及解答……………………………………………………………………………（193）
10.8　二阶常系数齐次线性微分方程…………………………………………………（194）
10.8.1　要点归纳………………………………………………………………………（194）
10.8.2　典型例题………………………………………………………………………（195）
本节小结……………………………………………………………………………（196）
思考及解答……………………………………………………………………………（197）
10.9　二阶常系数非齐次线性微分方程………………………………………………（197）
10.9.1　要点归纳………………………………………………………………………（197）

10.9.2 典型例题……………………………………………………………………(198)
本节小结……………………………………………………………………………(200)
思考及解答…………………………………………………………………………(200)
释疑解难……………………………………………………………………………(200)
基础练习……………………………………………………………………………(202)
参考解答……………………………………………………………………………(203)
11 无穷级数………………………………………………………………………(207)
11.1 常数项级数的概念…………………………………………………………(207)
11.1.1 要点归纳…………………………………………………………………(207)
11.1.2 典型例题…………………………………………………………………(208)
本节小结……………………………………………………………………………(209)
思考及解答…………………………………………………………………………(210)
11.2 常数项级数的性质…………………………………………………………(210)
11.2.1 要点归纳…………………………………………………………………(210)
11.2.2 典型例题…………………………………………………………………(212)
本节小结……………………………………………………………………………(214)
思考及解答…………………………………………………………………………(214)
11.3 正项级数及其审敛法………………………………………………………(214)
11.3.1 要点归纳…………………………………………………………………(214)
11.3.2 典型例题…………………………………………………………………(216)
本节小结……………………………………………………………………………(220)
思考及解答…………………………………………………………………………(220)
11.4 任意项级数的绝对收敛与条件收敛………………………………………(221)
11.4.1 要点归纳…………………………………………………………………(221)
11.4.2 典型例题…………………………………………………………………(222)
本节小结……………………………………………………………………………(224)
思考及解答…………………………………………………………………………(224)
11.5 幂级数(一)…………………………………………………………………(225)
11.5.1 要点归纳…………………………………………………………………(225)
11.5.2 典型例题…………………………………………………………………(227)
本节小结……………………………………………………………………………(230)
思考及解答…………………………………………………………………………(230)
11.6 幂级数(二)…………………………………………………………………(230)
11.6.1 要点归纳…………………………………………………………………(230)

11.6.2 典型例题…………………………………………………………………… (231)
本节小结…………………………………………………………………………… (234)
思考及解答………………………………………………………………………… (234)
11.7 泰勒级数…………………………………………………………………… (235)
11.7.1 要点归纳…………………………………………………………………… (235)
11.7.2 典型例题…………………………………………………………………… (236)
本节小结…………………………………………………………………………… (239)
思考及解答………………………………………………………………………… (240)
11.8 函数的幂级数展开式的应用……………………………………………… (241)
11.8.1 要点归纳…………………………………………………………………… (241)
11.8.2 典型例题…………………………………………………………………… (242)
本节小结…………………………………………………………………………… (244)
思考及解答………………………………………………………………………… (244)
释疑解难…………………………………………………………………………… (245)
基础练习…………………………………………………………………………… (250)
参考解答…………………………………………………………………………… (251)
附录一 高等数学(网络专科)教学大纲…………………………………………… (255)
附录二 高等数学下(网络专科)模拟试卷………………………………………… (261)
附录三 高等数学下(网络专科)历年试卷………………………………………… (279)

6 定积分及其应用

本章在上网的基础上讨论微积分学的另一个基本问题——定积分及其应用.包含定积分的定义及其性质,积分上限的函数及其导数,牛顿—莱布尼兹公式,定积分的换元法和分部积分法;广义积分的概念;定积分在几何学中的应用(面积、旋转体体积、平行截面面积已知的立体的体积)和定积分在物理学中的应用(路程、功、水压力、引力).在学习定积分概念时要注意理解引例,体会四步法的合理性.定积分的计算问题本是一个复杂的极限计算问题,但是借助于牛顿一莱布尼兹公式,便转化为较为简单的求原函数和代值计算问题.注意定积分的换元法要对积分变量、被积函数和积分区间三部分同时换.定积分的应用主要掌握“微元法”的思想,利用微元法解决简单的几何与物理问题.

学习重点:定积分的计算,定积分的几何应用.

学习难点:广义积分,定积分的物理应用.

常见题型:分段函数的定积分,利用定积分换元法求值,利用定积分分部积分法求值,广义积分的计算,变限函数的导数计算,平面图形的面积计算,旋转体的体积和定积分的物理应用.

6.1 定积分的概念

6.1.1 要点归纳

6.1.1.1 问题的提出

[例 1] 求曲边梯形的面积.

曲边梯形由连续曲线 $y=f(x)$ ($f(x)\geqslant 0$)、x 轴与两条直线 $x=a$、$x=b$ 所围成.

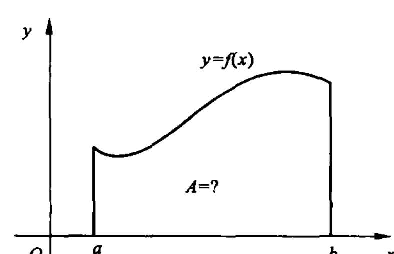

图 6-1

曲边梯形如图 6-1 所示,在区间$[a,b]$内

插入若干个分点，$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，把区间$[a,b]$分成 n 个小区间$[x_{i-1},x_i]$，长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$；在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点 ξ_i，以$[x_{i-1},x_i]$为底，$f(\xi_i)$为高的小矩形面积为 $A_i=f(\xi_i)\Delta x_i$.

曲边梯形面积的近似值为

$$A\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

当分割无限加细，即小区间的最大长度 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$趋近于零($\lambda\to 0$)时，曲边梯形面积为 $A=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$.

[例 2]　收益问题.

设某商品的价格 p 是销售量 x 的函数 $p=p(x)$. 求当销售量从 a 变到 b 时的收益 R 为多少?

思路:把整个销售量段分割成若干小段，每小段上价格看作不变，求出各小段的收益再相加，便得到整个收益的近似值，最后通过对销售量的无限细分过程求得收益的精确值.

(1)分割 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，其中 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$；

(2)近似 $\Delta R_i\approx p(\tau_i)\Delta x_i$；

(3)求和 $R\approx\sum\limits_{i=1}^{n}p(\tau_i)\Delta x_i$；

(4)取极限，得收益的精确值 $R=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}p(\tau_i)\Delta x_i$　(其中 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$).

6.1.1.2　定积分的定义

设函数 $f(x)$在$[a,b]$上有界，在$[a,b]$中任意插入若干个分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ 把区间$[a,b]$分成 n 个小区间，各小区间的长度依次为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}(i=1,2,\cdots,n)$，在各小区间上任取一点 $\xi_i(\xi_i\in\Delta x_i)$，作乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i(i=1,2,\cdots,n)$，并作和 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$，记 $\lambda=\max\{\Delta x_i,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，如果不论对$[a,b]$怎样的分法，也不论在小区间$[x_{i-1},x_i]$上点 ξ_i 怎样的取法，只要当 $\lambda\to 0$ 时，和 S 总趋于确定的极限 I，我们称这个极限 I 为函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的**定积分**，记为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=I=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$.

注意:

(1)积分值仅与被积函数及积分区间有关，而与积分变量的字母无关.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u$$

(2)定义中区间的分法和 ξ_i 的取法是任意的.

(3)当函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上的定积分存在时,称 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

对定积分的补充规定:

(1)当 $a=b$ 时,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$;

(2)当 $a>b$ 时,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

6.1.1.3 定积分存在定理

定理 1 若函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上连续,则 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

定理 2 若函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上有界,且只有有限个间断点,则 $f(x)$在区间$[a,b]$上可积.

6.1.1.4 定积分的几何意义

介于 x 轴、函数 $f(x)$的图形及两条直线 $x=a$、$x=b$ 之间的各部分面积的代数和.在 x 轴上方的面积取正号;在 x 轴下方的面积取负号(图 6-2).

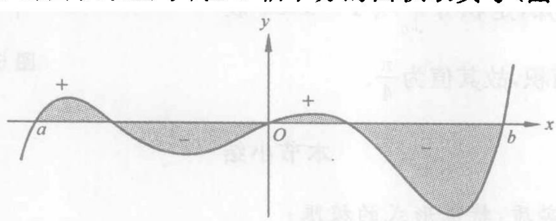

图 6-2

6.1.2 典型例题

[例 1] 利用定义计算定积分 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$.

指导:因为被积函数 x^2 在积分区间$[0,1]$连续,由定积分存在定理知定积分 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$ 存在.又定积分定义中指出,对于区间的任意分法和 ξ_i 的任意取法,和式的极限值都存在且相等,故在判定定积分存在的基础上,利用定义计算定积分时,可以采取特殊的分法和特殊的取法,以便于极限值的计算.而特殊的分法和特殊的取法往往是对区间进行 n 等分,ξ_i 取左端点或右端点.

解:将$[0,1]n$ 等分,分点为 $x_i=\frac{i}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$

小区间$[x_{i-1},x_i]$的长度 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$

取 $\xi_i = x_i (i=1,2,\cdots,n)$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}.$$

[例 2]　利用定积分的几何意义计算定积分 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

指导:定积分从几何图形上看等于介于 x 轴、函数 $f(x)$ 的图形及两条直线 $x=a$、$x=b$ 之间的各部分面积的代数和 . 在 x 轴上方的面积取正号;在 x 轴下方的面积取负号.

解:由图 6-3 知,定积分 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ 表示四分之一圆的面积,故其值为$\frac{\pi}{4}$.

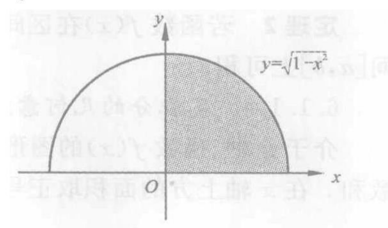

图 6-3

本节小结

1. 定积分的实质:特殊形式的极限;
2. 定积分的思想和方法(图 6-4);

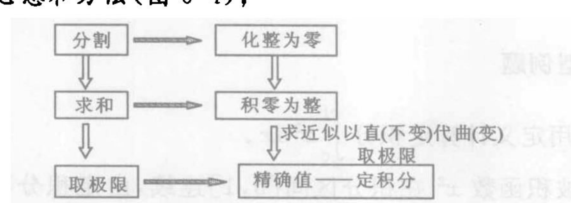

图 6-4

3. 定积分的存在定理;
4. 定积分的几何意义:面积的代数和 .

思考及解答

思考 1:将和式极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$表示成定积分.