分布参数系统控制

（讨论班材料之一）

中国科学院数学研究所控制论室

一九七七年十二月

索波列夫空间

这部分内容取自 J.L.Lions et E.Magenes《非齐次边值问题及应用》一书的第一章《跡空间和插入空间的希尔伯特理论》。

§1. 整数阶索波列夫空间

在给出整数阶索波列夫空间的定义之前，我们先简单地回顾一下广义函数的定义及其基本性质。

今后我们用Ω表示$\mathbb{R}^n$中任意开集，$\mathbb{R}^n$中的点表成$x=(x_1,\cdots x_n)$，$dx=dx_1\cdots dx_n$。$\mathcal{D}(\Omega)$表示Ω上的基本函数空间，即Ω上无穷次可微在Ω中具紧支集的函数全体。

$\mathcal{D}(\Omega)$中的函数列$\{\varphi_n\}$称收敛于0，是指所有函数$\varphi_n(x)$的支集包含在Ω的同一个紧集中，并且$\{\varphi_n(x)\}$及其各阶导数分别一致收敛于零。

$\mathcal{D}(\Omega)$的对偶空间$\mathcal{D}'(\Omega)$（即$\mathcal{D}(\Omega)$上的线性连续泛函空间）叫做Ω上的广义函数空间。$\mathcal{D}'(\Omega)$中的元叫做广义函数。对于$T\in\mathcal{D}'(\Omega)$，$\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$，记$T$在$\varphi$处的值为

$$\langle T,\varphi\rangle$$

如果$\bar{\varphi}$表示φ的复共轭，则记

$$\langle T,\bar{\varphi}\rangle=(T,\varphi)$$

这时若$T\in L^2(\Omega)$，则(T,φ)与$(T,\varphi)_{L^2(\Omega)}$一致。

广义函数列$\{T_n\}$叫做收敛于广义函数T，是指

$$\lim_{n\to\infty}\langle T_n,\varphi\rangle=\langle T,\varphi\rangle,\quad\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$$

熟知广义函数空间 $\mathcal{D}'(\Omega)$ 按上述（弱）收敛是完备的。

对于 $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$，定义其导数 $\partial T/\partial x_i$ 为

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle, \ \forall \varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$$

依归纳法可以定义出 T 的任意阶导数 $D^\alpha T$，这里 D^α 表示微分符号

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},\ \alpha=(\alpha_1\cdots\alpha_n),\ |\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$$

因此每个广义函数具有任意阶导数（仍然是广义函数）。

对于 Ω 上每个局部可积函数 $u(x)$ 定义

$$\langle \tilde{u}, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$$

则 $\tilde{u}\in\mathcal{D}'(\Omega)$。可以证明如果对于 Ω 上两个局部可积函数 u, v 有 $\tilde{u}=\tilde{v}$，那么 $u(x)=v(x)$ P. P.，因此我们可以把 $\tilde{u}$ 与 u 等同起来，从而

$$\mathcal{D}(\Omega)\subset L^2(\Omega)\subset\mathcal{D}'(\Omega)$$

现在可以给出整数阶索波列夫空间的定义了。

设 m 为 $\geqslant 0$ 的整数。Ω 上 m 阶索波列夫空间 $H^m(\Omega)$ 是指

$$(1.1)\qquad H^m(\Omega)=\{u \mid D^\alpha u\in L^2(\Omega),\ \forall\alpha,\ |\alpha|\leq m\}$$

这里 $D^\alpha u$ 指广义函数意义下的导数。$H^m(\Omega)$ 中内积定义为

$$(1.2)\qquad (u,v)_{H^m(\Omega)} \triangleq \sum_{|\alpha|\leq m}(D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},\ u,v\in H^m(\Omega).$$

特别当 $m=0$ 时，$H^0(\Omega)=L^2(\Omega)$。

定理 1.1　$H^m(\Omega)$ 赋以内积 (1.2) 形成 Hilbert 空间。

证明　只须证 $H^m(\Omega)$ 按完数

$$(1.3)\qquad \|u\|_{H^m(\Omega)} \triangleq \Big(\sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}$$

为完备。设 $\{u_K\}$ 为按范数(1.3)的基本列，于是对每个 α，$|\alpha|\le m$，$\{D^\alpha u_K\}$ 为 $L^2(\Omega)$ 中的基本列。依 $L^2(\Omega)$ 的完备性，存在 $\psi_\alpha \in L^2(\Omega)$，使

$$\|D^\alpha u_K - \psi_\alpha\|_{L^2(\Omega)} \to 0\ (K\to\infty),\ \forall \alpha,\ |\alpha|\le m,$$

令 $\psi_0 = u$；因为在 $L^2(\Omega)$ 中 $u_K \to u\ (K\to\infty)$，所以在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中有 $u_K \to u\ (K\to\infty)$，而由于导算子 D^α 在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中连续，故

$$D^\alpha u_K \longrightarrow D^\alpha u\ (K\to\infty)，在\ \mathscr{D}'(\Omega)\ 中$$

依极限的唯一性，$\psi_\alpha = D^\alpha u$，因此 $u\in H^m(\Omega)$，而且在 $H^m(\Omega)$ 中 $u_K \longrightarrow u\ (K\longrightarrow\infty)$。证完。

注意当 $m_1 > m_2 > 0$ 时，有严格的包含关系

$$H^{m_1}(\Omega)\subset H^{m_2}(\Omega)\subset L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$$

下面讨论 Ω 的两种情况。

i. Ω 为全空间 $\mathbb{R}^n$

当 $\Omega=\mathbb{R}^n$ 时，使用 Fourier 变换有可能给出（对今后是十分重要的）$H^m(\Omega)$ 的另一种等价的定义。对于 $u\in L^2(\mathbb{R}^n)$，其 Fourier 变换为

$$\hat{u}(y) = \mathscr{F}u = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ixy)u(x)dx,$$

$$xy = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

上述积分指在 $L^2(\Omega)$ 中收敛。映象 $u \longrightarrow \hat{u}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ 的同构。Fourier 逆变换为

$$u=\bar{\mathcal{F}}\hat{u}=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\exp(ixy)\hat{u}(y)dy.$$

Fourier变换$\mathcal{F}$通过连续性可以延拓到所谓缓增广义函数空间$\mathcal{S}'$上，下面简述之。

首先我们由所谓急减函数组成的基本空间$\mathcal{S}$.

$$\mathcal{S}=\{u \mid x^\alpha D^\beta u\in L^2(\mathbb{R}^n),\ \forall\alpha,\ \forall\beta\}$$

$$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$$

在$\mathcal{S}$中取拟范数列

$$P_{\alpha,\beta}(u)=\|x^\alpha D^\beta u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$\mathcal{S}$成为(B_0)空间（即完备的赋可数范空间）。

显然$\mathcal{S}$中每个函数u在$\mathbb{R}^n$中无穷次可微，而且在无穷远处急降于零，即

$$|x^\alpha D^\beta u(x)|\to 0\ (|x|\to\infty),\ \forall\alpha,\ \forall\beta.$$

反之，满足这个条件的函数u显然属于$\mathcal{S}$。

容易证明

$$\mathcal{F}(D^\alpha u)=(iy)^\alpha\mathcal{F}u,\quad \forall u\in\mathcal{S},\quad \forall\alpha,$$

(1.4)

$$D^\beta\mathcal{F}u=\mathcal{F}((ix)^\beta u),\ \forall u\in\mathcal{S},\ \forall\beta.$$

$$((ix)^\alpha=(ix_1)^{\alpha_1}\cdots(ix_n)^{\alpha_n})$$

因此$\mathcal{F}\in\mathcal{L}(\mathcal{S};\mathcal{S})$。同样可证明

$$\bar{\mathcal{F}}\in\mathcal{L}(\mathcal{S};\mathcal{S}),\text{ 而且 }\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}u=\bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}u=u,\ \forall u\in\mathcal{S}.$$

从而$\mathcal{F}$是$\mathcal{S}$到其自身的同构，其逆为$\bar{\mathcal{F}}$。

由于$\mathcal{F}$的核

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\exp(-ixy)$$

的对称性，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{F}u)v\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}u(\mathcal{F}v)\,dx,\ \forall u,v\in\mathcal{S}$$

我们用 $\mathcal{S}'$ 表示 $\mathcal{S}$ 的对偶空间，叫做缓增广义函数空间，$\mathcal{S}'$ 中每个元 u 叫做缓增广义函数。

对于 $u\in\mathcal{S}'$，按转置定义 u 的Fourier变换 $\mathcal{F}u$：

$$\langle\mathcal{F}u,\varphi\rangle=\langle u,\mathcal{F}\varphi\rangle,\quad\forall\varphi\in\mathcal{S}.$$

其中括号表示 $\mathcal{S}'$ 与 $\mathcal{S}$ 之间的对偶积。Fourier逆变换 $\bar{\mathcal{F}}$ 可用类似方式定义，不难看出，公式（1.4）在 $\mathcal{S}'$ 中仍成立，而且

$$\mathcal{F},\bar{\mathcal{F}}\in\mathcal{L}(\mathcal{S}';\mathcal{S}')$$

<u>定理1.2</u>　当 $\Omega=\mathbb{R}^n$ 时，$H^m(\mathbb{R}^n)$ 的定义（1.1）等价于

$$(1.5)\qquad H^m(\mathbb{R}^n)=\{u\mid u\in\mathcal{S}',(1+|y|^2)^{m/2}\hat{u}\in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

$$(|y|^2=y_1^2+\cdots+y_n^2)$$

而范数（1.3）等价于范数

$$(1.6)\qquad \|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}\triangleq\|(1+|y|^2)^{m/2}\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

<u>证明</u>：设 $u\in H^m(\mathbb{R}^n)$，根据（1.4）和planchere定理

$$\|D^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\|y^\alpha\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},\quad\forall\alpha,\ |\alpha|\le m.$$

因此从(1.3)得

$$\|u\|^2_{H^m(\mathbb{R}^n)}=\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\sum_{|\alpha|\le m}y^{2\alpha}\Big)|\hat{u}(y)|^2\,dy$$

但存在常数 $C_1>0$，$C_2>0$，使得

$$C_1(1+|y|^2)^m\le\sum_{|\alpha|\le m}y^{2\alpha}\le C_2(1+|y|^2)^m$$

因此（1.1）和（1.5）两种定义法代数上相同，而且由上式不难得出

$$C_1\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}\leqslant\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}\leqslant C_2\|u\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}$$

证完。

注意 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ 在 $H^m(\mathbb{R}^n)$ 中稠，采用通常的正则化和截尾的手续不难证明这一点。但一般地说，$\mathcal{D}(\Omega)$ 不必在 $H^m(\Omega)$ 中稠。今后我们还要讨论这个问题。

2. Ω 为半空间

在 $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^n \mid x_n>0\}$ 的情况下，我们引入 $H^m(\Omega)$ 的另一种等价的定义。为此首先要定义一些空间。

<u>空间 $L^2(a,b;X)$</u>

设 X 为希尔柏特空间，$L^2(a,b;X)$ 表示 $[a,b]\longrightarrow X$ 的强可测（按区间 $[a,b]$ 上勒贝格测度）且满足

(1.7) $$\|f\|_{L^2(a,b,X)}\triangleq\left(\int_a^b\|f(t)\|_X^2\,dt\right)^{1/2}<\infty$$

的矢值函数 f（的类）全体所形成的希尔柏特空间。其中 $\|\cdot\|_X$ 表示 X 的希氏范数。

<u>矢值广义函数空间 $\mathcal{D}'(]a,b[;X)$</u>

$]a,b[$ 上取值于 X 的广义函数空间指

(1.8) $$\mathcal{D}'(]a,b[;X)=\mathcal{L}(\mathcal{D}(]a,b[);X)$$

就是说，如果 $f\in\mathcal{D}'(]a,b[;X)$，则 $\langle f,\varphi\rangle\in X$，而且 $\varphi\longmapsto\langle f,\varphi\rangle$ 是 $\mathcal{D}(]a,b[)\longrightarrow X$ 的线性连续映象。

对于 $f\in\mathcal{D}'(]a,b[;X)$，定义其导数 $\frac{df}{dt}$ 为

$$\left\langle\frac{df}{dt},\varphi\right\rangle=-\left\langle f,\frac{d\varphi}{dt}\right\rangle,\quad\forall\varphi\in\mathcal{D}(]a,b[)$$

不难看出，映象 $f\longmapsto\frac{df}{dt}$ 是 $\mathcal{D}'(]a,b[;X)$ 到自身的线性连续映象。用归纳法可以定义 $f\in\mathcal{D}'(]a,b[;X)$ 的任意阶导数。

对于 $f\in L^2(a,b;X)$，我们定义 $\tilde{f}\in\mathcal{D}'(]a,b[;X)$ 为

$$\langle\tilde{f},\varphi\rangle=\int_a^b f(t)\varphi(t)dt,\quad\forall\varphi\in\mathcal{D}(]a,b[)$$

不难看出映象 $f\longmapsto\tilde{f}$ 是 $L^2(a,b;X)\to\mathcal{D}'(]a,b[;X)$ 的线性连续映象，而且是可逆的。因此可以把 $\tilde{f}$ 与 f 等同，从而

$$L^2(a,b;X)\subset\mathcal{D}'(]a,b[;X)$$

依上述有

<u>命题 1.1</u> 对于 $f\in L^2(a,b;X)$，可以把 $\frac{df}{dt}$，$\frac{d^2f}{dt^2}$，$\cdots$ 定义为 $]a,b[$ 上取值于 X 中的矢值广义函数。

注意，如果令

$$H^m(a,b;X)=\left\{f\,\middle|\,f^{(j)}=\frac{d^jf}{dt^j}\in L^2(a,b;X),\ j=0,1,\cdots m\right\}$$

规定其中内积为

$$(f,g)_{H^m(a,b;X)}=\sum_{j=0}^m\int_a^b(f^{(j)}(t),g^{(j)}(t))_X dt,\quad f,g\in H^m(a,b;X)$$

则 $H^m(a,b;X)$ 形成希氏空间，证明与 $H^m(\Omega)$ 情况完全类似。

<u>定理 1.3</u> 当 $\Omega=\{x\mid x\in\mathbb{R}^n,x_n>0\}$ 时，$H^m(\Omega)$ 等同于

$$(1.9)\quad H^m(\Omega)=\left\{u\,\middle|\,\frac{\partial^ju}{\partial x_n^j}\in L^2(0,\infty;H^{m-j}(\mathbb{R}^{n-1}_{x'})),\ j=0,1,\cdots m\right\}$$

$$(x'=(x_1,\cdots,x_{n-1}))$$

而且

$$(1.10)\quad \|u\|^2_{H^2(\Omega)}=\sum_{j=0}^m\left\|\frac{\partial^ju}{\partial x_n^j}\right\|^2_{L^2(0,\infty;H^{m-j}(\mathbb{R}^{n-1}_{x'}))}$$

证明　首先如果 $u\in L^2(0,\infty;H^m(\mathbb{R}^{n-1}_{x'}))$，则 $\frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}$ 作为广义函数空间 $\mathcal{D}'(]0,\infty[;H^m(\mathbb{R}^{n-1}_{x'}))$ 中的导数，从而条件《$\frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}\in L^2(0,\infty;H^{m-j}(\mathbb{R}^{n-1}_{x'}))$》是有意义的。

对于 $u\in L^2(0,\infty;H^m(\mathbb{R}^{n-1}_{x'}))$，由于对一切 α，$|\alpha|\leq m$，$D^\alpha_{x'}$ 是 $H^m(\mathbb{R}^{n-1}_{x'})$ 到 $H^0(\mathbb{R}^{n-1}_{x'})$ 中的线性连续映象，因此

(1.11)　　$D^\alpha_{x'}u\in L^2(0,\infty;H^0(\mathbb{R}^{n-1}_{x'}))$，$\forall\alpha$，$|\alpha|\leq m$

而依 Fubini 定理，

$$L^2(0,\infty;H^0(\mathbb{R}^{n-1}_{x'}))=L^2(\Omega)$$

因此，

(1.12)　　$D^\alpha_{x'}u\in L^2(\Omega)$，　$\forall\alpha$，$|\alpha|\leq m$

反之，如果 u 满足 (1.12)，则 u 满足 (1.11)，从而对一切 x_n，$u(\cdot,x_n)\in H^m(\mathbb{R}^{n-1}_{x'})$，而且有

$$\int_0^\infty \|u(x',x_n)\|^2_{H^m(\mathbb{R}^{n-1}_{x'})}dx_n=\sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega |D^\alpha_{x'}u|^2dx<\infty$$

所以 $u\in L^2(0,\infty;H^m(\mathbb{R}^{n-1}_{x'}))$。这就是说，$u\in L^2(0,\infty;H^m(\mathbb{R}^{n-1}_{x'}))$ 这一事实与 (1.12) 是等价的。

通过上面的分析可得出如下结论：

$$\frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}\in L^2(0,\infty;H^{m-j}(\mathbb{R}^{n-1}_{x'}))，\quad\forall j，\ 0\leq j\leq m$$

$$\Longleftrightarrow D^\alpha_{x'}\frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}\in L^2(\Omega)，\quad\forall|\alpha|\leq m-j，\quad 0\leq j\leq m$$

$$\Longleftrightarrow D^\alpha u\in L^2(\Omega)，\quad\forall\alpha，|\alpha|\leq m$$

至于范数等式(1.10)则可直接计标得出：

$$\sum_{j=0}^{m}\left\|\frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}\right\|^2_{L^2(0,\infty;H^{m-j}(R^{n-1}_{x'}))}=\sum_{j=0}^{m}\int_0^\infty\left\|\frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}\right\|^2_{H^{m-j}(R^{n-1}_{x'})}dx_n$$

$$=\sum_{j=0}^{m}\int_0^\infty\Big(\sum_{|\alpha|\leq m-j}\left\|D^\alpha_{x'}\frac{\partial^j u}{\partial x_n^j}\right\|^2_{L^2(R^{n-1}_{x'})}\Big)dx_n$$

$$=\sum_{|\alpha|\leq m}\|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}=\|u\|_{H^m(\Omega)}$$

定理证完。

§2. 中间导数定理

2.1 插入空间

设X，Y为两个希氏空间，假定它们都可分（从应用角度看这已够用了），并且

(2.1) $\qquad X\subset Y$， X在Y中稠

(2.2) $\qquad \|u\|_Y\leq C\|u\|_X$， $\forall u\in X$， C为常数

注意空间 $H^m(\Omega)$ 是可分的，因为通过映象

$$u\longmapsto\{D^\alpha u\,|\,|\alpha|\leq m\}$$

可以把它与 $L^2(\Omega)$ 的多重乘积空间中的一个子空间等同，而后者由于 $L^2(\Omega)$ 可分，也是可分的。

我们用 $(\ ,\ )_X$ 和 $(\ ,\ )_Y$ 分别表示X和Y中的内积。

Λ 算子

现在我们来证明，空间 X 可以看作 Y 中某个无界自伴算子 Λ 的定义域 $D(\Lambda)$（当然算子 Λ 不一定唯一），而 X 中的范数等价于图象范数

(2.3) $\qquad (\|u\|_Y^2+\|\Lambda u\|_Y^2)^{1/2}, \quad u\in D(\Lambda)=X.$

为此，用 $D(S)$ 表示满足下列条件的 $u\in X$ 的全体，使得反线性泛函

$$v \longmapsto (u,v)_X, \quad v\in X$$

按 Y 诱导的拓扑连续。依希氏空间的自共轭性，对于 $u\in D(S)$，存在 $Su\in Y$，使

(2.4) $\qquad (u,v)_X=(Su,v)_Y, \quad u\in D(S), \quad v\in X$

于是 S 是 Y 中定义域为 $D(S)$ 的线性算子。

今证 S 为 Y 中的自伴算子。事实上，对于 $u\in X$，依 (2.2)，映象 $v\longmapsto (u,v)_Y$ 为 X 上的反线性连续泛函，从而存在 $A\in\mathscr{L}(X;X)$，使得

$$(u,v)_Y=(Au,v)_X, \quad \forall u,v\in X$$

不难看出 A 为有界对称，而且 A^{-1} 存在。因为如果 $u\in X$，$Au=0$，则 $(u,v)_Y=0$，$\forall v\in X$，但已知 X 在 Y 中稠，故 $u=0$，于是 A^{-1} 是 X 中的自伴算子。由于自伴算子无剩余谱，所以 $D(A^{-1})=A$ 的值域在 X 中稠，也在 Y 中稠。

现在证明 $D(A^{-1})\subset D(S)$，从而 $D(S)$ 更在 Y 中稠了。为此设 $u\in D(A^{-1})$，则对每个 $v\in X$，有 $(A^{-1}u,v)_Y=(u,v)_X$，

而这正表明 $u\in D(S)$。

最后证 S 自伴，上面已证 $D(S)$ 在 Y 中稠，从而 S 的伴随 S^* 存在。设 $u\in D(S)$，则对每个 $v\in D(S)$，有

$$(v,u)_X=(Sv,u)_Y=\overline{(u,v)_X}=\overline{(Su,v)_Y}=(v,Su)_Y,$$

这表明 $u\in S^*$，而且 $S^*u=Su$，所以 $S\subset S^*$。反之，设 $u\in S^*$，则对一切 $v\in D(S)$，有

$$(v,u)_X=(Sv,u)_Y=(v,S^*u)_Y=\overline{(S^*u,v)_Y}=\overline{(u,v)_X}$$

即 $(u,v)=(S^*u,v)_Y$，而这表明 $u\in D(S)$，而且 $Su=Su^*$。从而 $S^*\subset S$。综上所述，$S=S^*$。

称子 S 是严格正的，因为依 (2.2)，

$$(Sv,v)_Y=\|v\|_X^2\geqslant\frac{1}{c}\|v\|_Y^2,\ \forall v\in D(S).$$

使用自伴称子谱分解，可以定义出 S 的幂次 S^θ，$\theta\in\mathbb{R}$（甚至对复数 θ 也能定义）。对我们特别有用的是 S 的平方根

(2.5) $$\Lambda=S^{\frac{1}{2}}$$

显然，称子 Λ 也是 Y 中的正自伴称子，今证它的定义域为 X，即 $D(\Lambda)=X$，而且

(2.6) $$(u,v)_X=(\Lambda u,\Lambda v)_Y,\ \forall u,v\in X.$$

事实上，$D(\Lambda)$ 按图象范数 (2.3) 形成希式空间。因此，为证 $D(\Lambda)=X$，只须证明 $D(S)=D(\Lambda^2)$ 在 $D(\Lambda)$ 中（按图象范数）稠就行了。因为这样一来，$D(S)$ 按范数 (2.3) 的完备化等于 $D(\Lambda)$，但在 $D(\Lambda)$ 中范数 (2.3) 与范数 $\|\Lambda u\|_Y$

等价，因此 $D(\Lambda)$ 也是 $D(S)$ 按范数 $\|\Lambda u\|_Y$ 的完备化。然而对于 $u\in D(S)$，$\|\Lambda u\|_Y=\sqrt{(\Lambda u,\Lambda u)_Y}=\sqrt{(\Lambda^2 u,u)_Y}=\|u\|_X$，因此 $D(S)$ 按范数 $\|\Lambda u\|_Y$ 的完备化等价于按范数 $\|u\|_X$ 的完备化。但前已证 $D(S)$ 在 X 中稠，因此这个完备化正好是 X. 由此 $D(\Lambda)=X$，而且 (2.6) 成立。

为了证明 $D(S)$ 在 $D(\Lambda)$ 中按图象范数稠，任取 $u\in D(\Lambda)$，如果对一切 $v\in D(S)$ 有 $(\Lambda u,\Lambda v)_Y=0$，则因为 $\Lambda v\in D(\Lambda)$，所以对一切 $v\in D(S)=D(\Lambda^2)$ 有 $(u,\Lambda^2 v)_Y=(u,Sv)_Y=0$，然而 S 作为正定自伴算子，其值域应是 Y，由此得出结论 $u=0$。因此 $D(S)$ 在 $D(\Lambda)$ 中稠.

注意算子 Λ 依赖于 X 和 Y 上标量积的选取，从而 Λ 也依赖于这些标量积；这就是说算子 Λ 与 X 和 Y 并没有固有的联系。

下面是插入空间 $[X,Y]_\theta$ 的定义。

定义 2.1　在假设 (2.1) (2.2) 之下，并且算子 Λ 由 (2.5) 决定，我们令

(2.7)
$$[X,Y]_\theta=D(\Lambda^{1-\theta}),\qquad 0\le\theta\le 1$$

而 $[X,Y]_\theta$ 上的范数定义作算子 $\Lambda^{1-\theta}$ 的图象范数，即

$$\|u\|_{[X,Y]_\theta}=(\|u\|_Y^2+\|\Lambda^{1-\theta}u\|_Y^2)^{1/2}$$

从定义直接可推出

$$[X,Y]_0=X$$

$$[X,Y]_1=Y$$

注意根据上述，空间 $[X,Y]_\theta$ 与X和Y有固有联系这一点不是很明显的。下面将证明：如果 Λ_1 和 Λ_2 为Y中两个以X为正义域的正定自伴算子，则

$$D(\Lambda_1^{1-\theta})=D(\Lambda_2^{1-\theta}),\quad \text{且有等价范数}$$

2.2 稠密性和延拓定理

空间 $W(a,b)$

设 a,b 为两个有穷或无穷实数，$a<b$；X，Y 为满足(2.1)(2.2)的两个希氏空间；m 为 ≥ 1 的整数。令

$$(2.9)\quad W(a,b)=\left\{u \,\middle|\, u\in L^2(a,b;X),\ \frac{d^m u}{dt^m}=u^{(m)}\in L^2(a,b;Y)\right\}$$

这里导数 $u^{(m)}$ 是在矢值广义函数空间 $\mathcal{D}'(]a,b[;X)$ 意义下取的。对 $u,v\in W(a,b)$，规定内积

$$(2.10)\quad (u,v)_{W(a,b)}=\left[(u,v)_{L^2(a,b;X)}+(u^{(m)},v^{(m)})_{L^2(a,b;Y)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

今证 $W(a,b)$ 为希氏空间。为此只需证完备性。设 $\{u_K\}$ 为 $W(a,b)$ 中的基本列，于是 $\{u_K\}$ 是 $L^2(a,b;X)$ 中的基本列，$\{u_K^{(m)}\}$ 是 $L^2(a,b;Y)$ 中的基本列。依空间 $L^2(a,b;X)$ 和 $L^2(a,b;Y)$ 的完备性，存在 $u\in L^2(a,b;X)$ 和 $v\in L^2(a,b;Y)$，使得在相应的空间中

$$u_K\longrightarrow u,\quad u_K^{(m)}\longrightarrow v\ (K\longrightarrow\infty)$$

但依微分算子的连续性，在 $\mathcal{D}'(]a,b[;X)$ 中应有

$u_K^{(m)} \to u^{(m)}$ $(K\to\infty)$ 当然在 $\mathscr{D}'(]a,b[;Y)$ 中也有 $u_K^{(m)} \to u^{(m)}$ $(K\to\infty)$，因此 $u^{(m)}=v$. 这表明 $u\in W(a,b)$ 而且在 $W(a,b)$ 中 $u_K \to u$ $(K\to\infty)$，所以 $W(a,b)$ 完备。

空间 $\mathscr{D}([a,b];X)$

我们用 $\mathscr{D}([a,b];X)$ 表示定义在 $[a,b]$ 上取值于 X 中的无穷次可微且具紧支集的函数全体组成的空间。显然，在 a，b 都有穷的情况下，紧性条件是多余的。我们分三种情况讨论：

(i) $a=-\infty$，$b=+\infty$；这时 $\mathscr{D}([a,b];X)=\mathscr{D}(R;X)$；

(ii) a 有穷，$b=+\infty$；这时 $\mathscr{D}([a,b];X)$ 中的函数当 t 充分大时为零（至于 $a=-\infty$，$b=$ 有穷的情况，可按对称性处理）

(iii) a，b 都有穷。

下面证明稠密性定理。

定理2.1 空间 $\mathscr{D}([a,b];X)$ 在 $W(a,b)$ 中稠

证明 对上述三种情况分别证明之。

(i) $a=-\infty$，$b=+\infty$

设函数列 $\{\rho_n(t)\}$ 满足条件

$$\begin{cases}\rho_n\in\mathscr{D}(R),\ \rho_n(t)\geq 0,\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\rho_n(t)\,dt=1\\ supp\{\rho_n\}\subset[-\alpha_n,\alpha_n],\quad \alpha_n\to 0\ (n\to\infty)\end{cases}$$

例如取

$$\rho(t)=\begin{cases}0 & |t|\geq 1\\ \exp\left(-\dfrac{1}{1-t^2}\right), & |t|<1\end{cases}$$

然后令

$$\rho_n(t)=K_n\rho(nt)$$

而选择 K_n 使得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\rho_n(t)\,dt=1$$

这样的 $\rho_n(t)$ 显然满足上述要求。

如果 $u\in W(-\infty,\infty)=W(\mathbb{R})$，则对每个 n，函数 $u_n(t)=u*\rho_n(t)$ 无穷次可微，而且

$$\|u_n-u\|_{L^2(-\infty,+\infty;\,X)}\to 0\quad(n\to\infty)$$

同时不难看出 $u_n^{(m)}=u^{(m)}*\rho_n$，因此

$$\|u_n^{(m)}-u^{(m)}\|_{L^2(-\infty,\infty;\,Y)}\to 0\quad(n\to\infty)$$

由此可见，为证 $\mathcal{D}(\mathbb{R};X)$ 在 $W(\mathbb{R})$ 中稠，只须证明形如

$$v=u*\varphi,\quad u\in W(\mathbb{R})\quad \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$$

的函数能用 $\mathcal{D}(\mathbb{R};X)$ 中的元按范数(2.10)任意逼近就行了。但对这样的函数 v，

$$v^{(K)}=u*\varphi^{(K)},\quad \forall K,$$

而且

$$\|v^{(K)}(t)\|_X^2\leqslant\left(\int_{-\infty}^{\infty}\|u(t-\tau)\|_X\,|\varphi^{(K)}(\tau)|\,d\tau\right)^2$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\|u(t-\tau)\|_X^2\,|\varphi^{(K)}(\tau)|\,d\tau\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi^{(K)}(\tau)|\,d\tau$$

从而

$$v^{(K)}\in L^2(\mathbb{R};X),\ \forall K$$

现在采用截尾的办法。选择 $\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ 满足

$$\psi(t)=\begin{cases}1 & |t|\leqslant 1\\ 0 & |t|\geqslant 2\end{cases}$$

令

$$\psi_N(t)=\psi\left(\frac{t}{N}\right)$$

由于 v 无穷次可微，所以

$$\psi_N v\in\mathcal{D}(\mathbb{R};X)$$

而且在 $L^2(\mathbb{R};X)$ 中

(2.11) $$\psi_N v\to v\quad(N\to\infty)$$

这是因为 ψ_N 有界，即存在常数 $M>0$，使

$$|\psi_N(t)|\leqslant M,\quad\forall N,\ \forall t$$

所以

$$\|\psi_N v-v\|_{L^2(\mathbb{R};X)}=\int_{-\infty}^{\infty}\|\psi_N(t)v(t)-v(t)\|_X^2dt$$

$$\leqslant(M+1)^2\left(\int_N^{\infty}+\int_{-\infty}^{-N}\right)\|v(t)\|_X^2dt\to 0\quad(N\to\infty)$$

如果我们能证在 $L^2(\mathbb{R};X)$ 中

(2.21) $$(\psi_N v)^{(m)}\longrightarrow v^{(m)}\quad(N\to\infty)$$

则更有在 $L^2(\mathbb{R};Y)$ 中 $(\psi_N v)^{(m)}\longrightarrow v^{(m)}\quad(N\longrightarrow\infty)$

从而 $\|\psi_N v-v\|_{W(\mathbb{R})}\longrightarrow(N\to\infty)$ 定理在这种情况下就得证了。但是

$$(\psi_N v)^m=\sum_{K=0}^{m}C_m^K\psi_N^{(K)}v^{(m-K)}$$