

# 電工基礎

下 冊

王 子 香 著

水 利 電 力 出 版 社

# 电 工 基 础

下 册

王 子 香 著



水 利 电 力 出 版 社



## 內 容 提 要

本书是作者根据在浙江大学讲授过的“电工基础”讲义改写而成，內容是按照高教部批准的教学大綱安排的。

全书分三部分：(一)电工的物理基础；(二)交流电路的理論；(三)电磁場的理論；分上、下两册出版。下册包括非正弦波交流电路、非直綫性交流电路、集中参数电路的瞬变状态、运算微积的应用、均匀傳輸綫及分布参数电路的瞬变状态等交流电路的理論，还包括电磁場理論的基础、靜电場、导电媒质中的电場、恒定电流磁場及交变电磁場等电磁場的理論。

本书可供高等工业学校电机系或动力系用作教学参考书，也可供工程技术人員参考。

## 电 工 基 础 下 册

王 子 香 著

\*

757D278

水利电力出版社出版（北京西郊科学路二里沟）

北京市书刊出版业营业許可証出字第105号

水利电力出版社印刷厂排印

新华书店科技发行所发行 各地新华书店經售

\*

787×1092 $\frac{1}{16}$ 开本\*16 $\frac{1}{2}$ 印張\*366千字\*定价(第10类)2.30元

1958年4月北京第1版

1960年7月北京第5次印刷(16,291—26,410册)

# 目 录

## 第二部分 交流电路的理论 (續)

### 第十三章 非正弦波的交流电路

|                               |                                 |
|-------------------------------|---------------------------------|
| 第 1 节 週期性函数的分析..... 1         | 第 7 节 功率与功率因数.....19            |
| 第 2 节 非正弦波的分析法..... 4         | 第 8 节 等效正弦波.....21              |
| 第 3 节 非正弦波的图解法..... 9         | 第 9 节 复波电路的计算.....22            |
| 第 4 节 非正弦波的有效值<br>与平均值.....11 | 第 10 节 恒定参数对于电流<br>波形的影响.....27 |
| 第 5 节 波形因数与波峰因<br>数.....12    | 第 11 节 复波的共振现象.....28           |
| 第 6 节 磁通曲线与电势曲<br>线的关系.....16 | 第 12 节 三相制中的高次谐波.....32         |

### 第十四章 非直线的交流电路

|                                   |                                  |
|-----------------------------------|----------------------------------|
| 第 13 节 非线性电路的电压和<br>电流.....36     | 性电路.....49                       |
| 第 14 节 整流作用.....39                | 第 19 节 元件特性只与有效值<br>相关的电路.....53 |
| 第 15 节 铁芯线圈的电压、电<br>流和磁通曲线.....41 | 第 20 节 串联的铁磁共振.....55            |
| 第 16 节 铁芯线圈的等效正弦<br>曲线.....44     | 第 21 节 并联的铁磁共振.....58            |
| 第 17 节 铁芯线圈的等效电路<br>和矢量图.....46   | 第 22 节 铁磁电压稳定器.....60            |
| 第 18 节 交直两源具备的非线<br>性电路.....49    | 第 23 节 铁磁频率二倍器和三<br>倍器.....62    |
|                                   | 第 24 节 弛张振荡.....65               |
|                                   | 第 25 节 平方律的调幅和检波.....68          |

### 第十五章 集中参数电路的瞬变状态

|                                  |                                 |
|----------------------------------|---------------------------------|
| 第 26 节 符号的意义.....71              | 第 30 节 R、C、L 电路的电容<br>放电.....80 |
| 第 27 节 瞬变状态的一般原理.....72          | 第 31 节 非週期性状态.....82            |
| 第 28 节 R、L 电路与交流电<br>源的接通.....75 | 第 32 节 临界状态.....84              |
| 第 29 节 R、C 电路与交流电<br>源的接通.....78 | 第 33 节 週期性状态.....86             |



|                                  |    |                                                |     |
|----------------------------------|----|------------------------------------------------|-----|
| 第 34 节 R、C、L 电路与直流<br>电源的接通..... | 92 | 第 36 节 共振时的暂态.....                             | 98  |
| 第 35 节 R、C、L 电路与交流<br>电源的接通..... | 95 | 第 37 节 拍频振荡.....                               | 100 |
|                                  |    | 第 38 节 $\omega$ 与 $\omega_d$ 相差很远时的<br>暂态..... | 101 |

## 第十六章 运算微积的应用

|                             |     |                              |     |
|-----------------------------|-----|------------------------------|-----|
| 第 39 节 简单的用法.....           | 104 | 理).....                      | 122 |
| 第 40 节 原函数与像函数间的<br>关系..... | 106 | 第 46 节 分解定理的应用.....          | 124 |
| 第 41 节 常用函数的变换.....         | 109 | 第 47 节 正弦电压的接通.....          | 126 |
| 第 42 节 基尔霍夫定律的推<br>广.....   | 110 | 第 48 节 分支电路和耦合电路<br>的实例..... | 128 |
| 第 43 节 初值不为零时的变换<br>式.....  | 113 | 第 49 节 变换式与倒换式的关<br>系.....   | 130 |
| 第 44 节 查表的倒换法.....          | 116 | 第 50 节 倒换式的应用.....           | 132 |
| 第 45 节 分解定理 (展开定<br>理)..... | 116 | 第 51 节 分解定理与倒换式的<br>关系.....  | 134 |

## 第十七章 均匀传输线

|                               |     |                              |     |
|-------------------------------|-----|------------------------------|-----|
| 第 52 节 传输线的概念.....            | 139 | 第 61 节 行波的特性.....            | 156 |
| 第 53 节 传输线的方程式.....           | 139 | 第 62 节 空载时的传输.....           | 158 |
| 第 54 节 正弦波的稳定状态.....          | 142 | 第 63 节 短路时的传输.....           | 161 |
| 第 55 节 传输线的特性.....            | 143 | 第 64 节 任何负载的传输.....          | 162 |
| 第 56 节 入射波和反射波.....           | 145 | 第 65 节 无损耗的传输线 (驻<br>波)..... | 164 |
| 第 57 节 积分常数的确定.....           | 146 | 第 66 节 传输线的匹配.....           | 167 |
| 第 58 节 链形网络和传输线的<br>等效电路..... | 149 | 第 67 节 无畸变的传输线.....          | 170 |
| 第 59 节 电磁波的来回反射.....          | 152 | 第 68 节 传输的效率.....            | 173 |
| 第 60 节 无反射的传输线.....           | 154 |                              |     |

## 第十八章 分佈参数电路的瞬变状态

|                             |     |                            |     |
|-----------------------------|-----|----------------------------|-----|
| 第 69 节 瞬变状态的概念.....         | 175 | 第 71 节 矩形波传播的物理意<br>义..... | 178 |
| 第 70 节 无损耗长线方程式的<br>通解..... | 176 | 第 72 节 负载为电阻时的接            |     |

|                   |     |                  |     |
|-------------------|-----|------------------|-----|
| 通.....            | 181 | 通.....           | 192 |
| 第 73 节 終端为开路时的接   |     | 第 78 节 两綫聯接处串聯电感 |     |
| 通.....            | 183 | 时的瞬变.....        | 193 |
| 第 74 节 終端为短路时的接   |     | 第 79 节 两綫聯接处並聯电容 |     |
| 通.....            | 185 | 时的瞬变.....        | 196 |
| 第 75 节 两傳輸綫聯接处的折  |     | 第 80 节 长綫有負載时的扳  |     |
| 射和反射.....         | 186 | 断.....           | 198 |
| 第 76 节 負載为R, L时的接 |     | 第 81 节 杂散波.....  | 199 |
| 通.....            | 189 |                  |     |
| 第 77 节 負載为R, C时的接 |     |                  |     |

### 第三部分 电磁場的理論

#### 第十九章 电磁場理論的基础

|                      |     |                        |     |
|----------------------|-----|------------------------|-----|
| 第 82 节 麦克斯韦的积分式..... | 205 | 第 89 节 哈密頓算符的运用        |     |
| 第 83 节 麦克斯韦的微分式..... | 207 | 和意义.....               | 216 |
| 第 84 节 旋度的物理意义.....  | 208 | 第 90 节 电磁場的相对性.....    | 218 |
| 第 85 节 高斯定理的微分式..... | 211 | 第 91 节 电磁方程式的完整        |     |
| 第 86 节 散度的物理意义.....  | 213 | 性.....                 | 220 |
| 第 87 节 奥斯特罗格拉斯定      |     | 第 92 节 B, H 的量綱問題..... | 221 |
| 理.....               | 214 | 第 93 节 B, H 的側重問題..... | 224 |
| 第 88 节 斯托克斯定理.....   | 215 |                        |     |

#### 第二十章 靜 电 場

|                    |     |                       |     |
|--------------------|-----|-----------------------|-----|
| 第 94 节 靜电場的特征..... | 229 | 第 100 节 由电荷的分佈求电      |     |
| 第 95 节 电位梯度.....   | 230 | 場.....                | 242 |
| 第 96 节 梯度、散度和旋度    |     | 第 101 节 靜电場的基本問題..... | 243 |
| 的比較.....           | 233 | 第 102 节 单值性的了解.....   | 245 |
| 第 97 节 泊松和拉普拉斯方程   |     | 第 103 节 靜电感应与靜电屏      |     |
| 式.....             | 234 | 蔽.....                | 247 |
| 第 98 节 带电体系的电位和    |     | 第 104 节 电像法.....      | 250 |
| 电量.....            | 236 | 第 105 节 两点电荷的电場及      |     |
| 第 99 节 感应系数和部分电    |     | 电偶子的电場.....           | 252 |
| 容的測定.....          | 238 | 第 106 节 均匀电場中的介質      |     |



|                        |     |                        |     |
|------------------------|-----|------------------------|-----|
| 球.....                 | 258 | 第 110 节 三相輸电綫的电容.....  | 276 |
| 第 107 节 复变数函数的运用.....  | 264 | 第 111 节 多綫制的电容.....    | 280 |
| 第 108 节 一度电場和两度电場..... | 269 | 第 112 节 靜电場的图解計算法..... | 283 |
| 第 109 节 双綫輸电綫的电容.....  | 274 |                        |     |

## 第二十一章 导电媒質中的电場

|                          |     |                         |     |
|--------------------------|-----|-------------------------|-----|
| 第 113 节 恒定电流場的方程式.....   | 286 | 条件.....                 | 290 |
| 第 114 节 基尔霍夫定律的微分式.....  | 287 | 第 118 节 恒流場与靜电場的比拟..... | 292 |
| 第 115 节 楞次-焦耳定律的微分式..... | 288 | 第 119 节 单芯电綫的漏电流.....   | 294 |
| 第 116 节 介質內的电場.....      | 288 | 第 120 节 接地的电阻.....      | 295 |
| 第 117 节 恒定电流場的边界区.....   |     | 第 121 节 跨步电压和危險地区.....  | 297 |

## 第二十二章 恒定电流的磁場

|                             |     |                         |     |
|-----------------------------|-----|-------------------------|-----|
| 第 122 节 标量磁位.....           | 299 | 第 128 节 兩綫輸电綫的自感.....   | 309 |
| 第 123 节 假想磁荷的概念及电磁場的对比..... | 301 | 第 129 节 三綫制和多綫制的电感..... | 312 |
| 第 124 节 矢量磁位.....           | 302 | 第 130 节 磁偶子的磁場.....     | 314 |
| 第 125 节 矢量磁位的表示磁通.....      | 304 | 第 131 节 电流迴路的磁矩.....    | 316 |
| 第 126 节 平行平面場的一致性质原理.....   | 305 | 第 132 节 电流迴路的磁場.....    | 319 |
| 第 127 节 兩綫輸电綫的磁場.....       | 308 | 第 133 节 均匀磁場中的鉄球.....   | 321 |
|                             |     | 第 134 节 磁場屏蔽.....       | 326 |
|                             |     | 第 135 节 磁場的图解繪制法.....   | 331 |

## 第二十三章 交变电磁場

|                        |     |                           |     |
|------------------------|-----|---------------------------|-----|
| 第 136 节 波动方程式.....     | 334 | 的应用.....                  | 344 |
| 第 137 节 介質中的平面波.....   | 336 | 第 140 节 电磁波在导电媒質中的傳播..... | 348 |
| 第 138 节 烏莫夫-波印廷矢量..... | 343 | 第 141 节 透入深度和电磁屏蔽.....    | 353 |
| 第 139 节 能流矢量对傳輸綫       |     |                           |     |

|                             |     |                                 |     |
|-----------------------------|-----|---------------------------------|-----|
| 第 142 节 电磁波的反射和折<br>射.....  | 356 | 性.....                          | 378 |
| 第 143 节 平面波与传输线的<br>比较..... | 359 | 第 148 节 推迟电位和推迟磁<br>位.....      | 383 |
| 第 144 节 导波的方程式.....         | 361 | 第 149 节 电磁波的辐射方程<br>式.....      | 386 |
| 第 145 节 导波的特性.....          | 367 | 第 150 节 辐射波的特性.....             | 390 |
| 第 146 节 矩形波导的方程式.....       | 372 | 第 151 节 列貝捷夫的著作和<br>波波夫的发明..... | 403 |
| 第 147 节 矩形波导的传播特<br>性.....  |     |                                 |     |

## 附录 矢量分析摘要

|             |     |           |     |
|-------------|-----|-----------|-----|
| 正交曲线坐标..... | 405 | 圆柱坐标..... | 408 |
| 直角坐标.....   | 408 | 球体坐标..... | 409 |

## 第二部分 交流电路的理论(續)

### 第十三章 非正弦波的交流电路

#### 第1节 週期性函数的分析

以上各章所叙述的交流,都假设它是正弦波。在制造发电機时也竭力想法使它的构造能产生正弦波,但事实上往往有些差别。这些差别或产生于电源,或产生于負載,或二者同时並存。

例如,发电機裡的磁通密度是沿空气隙分佈的,因槽齿的不同,不完全是正弦形,只大体上很接近于正弦形,因而电势和电流的波形,就与正弦波形多少有些不同。

即使电源的电势是正弦形,而电阻、电感和电容等可能不是直綫性的,所形成的电流也就不一定是正弦形的。例如整流器、电弧和鉄芯綫圈等的阻抗都不是直綫性的,因而电流的波形,就可能与正弦形迥異。

这些虽不是正弦形,但还是週期性的。如像无綫电话与无綫电报等的波形,不仅是非正弦形,而且还是非週期性的。本章所討論的只限于週期性的波形。

电压和电流都可迭加。我們可把非正弦形而为週期性的电压,分解为直流分量和若干正弦形的分量。应用迭加定理,分別求出各个电压分量作用下的电流,然后把它們迭加起来,就得原电压作用下的电流。如此我們在研究非正弦波时,仍可援用正弦波的各种理論。

一切週期性函数,在一个週期內包含有限数的最大值和最小值,有限数而又为有限值的跳跃,就能合乎第里赫列的条件。滿足第里赫列条件的週期性函数,都可用傅里叶級数表示出来,也就是可以分解为三角級数。

$$y = f(x) = A_0 + A_1 \sin(x + \varphi_1) + A_2 \sin(2x + \varphi_2) + \dots$$

$$+ A_k \sin(kx + \varphi_k) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(kx + \varphi_k) \quad (13-1)$$



当  $k=0$  时, 上式的

$$A_k = A_0, \quad \varphi_k = \varphi_0 = \frac{\pi}{2}. \quad (13-2)$$

第一项  $A_0$  叫做直流分量或恒定分量; 第二项  $A_1 \sin(x + \varphi_1)$  叫做基波或一次谐波; 第  $k$  项叫做  $k$  次谐波。二次以上的谐波, 统叫做高次谐波。

上式两角之和的正弦, 可以展开为另一形式。以  $k$  次谐波而论:

$$A_k \sin(kx + \varphi_k) = A_k \cos \varphi_k \sin kx + A_k \sin \varphi_k \cos kx \cdots \quad (13-3)$$

$$\text{再令 } A_k \cos \varphi_k = B_k, \quad A_k \sin \varphi_k = C_k, \quad (13-4)$$

$$\text{则 } A_k = \sqrt{B_k^2 + C_k^2}, \quad \varphi_k = \tan^{-1} \frac{C_k}{B_k}, \quad (13-5)$$

$$A_k \sin(kx + \varphi_k) = B_k \sin kx + C_k \cos kx. \quad (13-6)$$

于是 (13-1) 式可以改写为:

$$y = f(x) = A_0 + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \cdots + B_k \sin kx + \cdots$$

$$C_1 \cos x + C_2 \cos 2x + \cdots + C_k \cos kx + \cdots \quad (13-7)$$

所以週期性函数, 既可以 (13-1) 式表示, 也可以用 (13-7) 式表示。由 (13-1) 式转换为 (13-7) 式, 可以引用 (13-4) 式的关系; 由 (13-7) 式转换为 (13-1) 式, 可以引用 (13-5) 式的关系。一种形式确定之后, 另一种形式就可以求出来。(13-1) 式的

系数  $A_k$  与 (13-7) 式的系数  $B_k$ 、 $C_k$ , 形成一个直角三角形的三边。 $C_k$  边的对角就是初相角  $\varphi_k$ 。

(13-1) 式或 (13-7) 式所表示的是许多不同频率的正弦波的和, 所以这种波叫做复波。在交流技术上, 最常遇到的复波是能满足下列条件的:

$$f(x) = -f(x + \pi). \quad (13-8)$$

由 (13-1) 式, 得:

$$-f(x + \pi) = -A_0 - A_1 \sin(x + \pi + \varphi_1) - A_2 \sin(2x + 2\pi + \varphi_2)$$

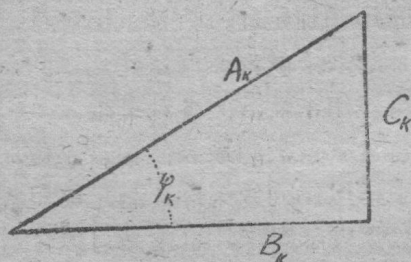


图13-1 复波的系数成一直角三角形

$$-A_3 \sin(3x + 3\pi + \varphi_3) + \dots = -A_0 + A_1 \sin(x + \varphi_1)$$

$$-A_2 \sin(2x + \varphi_2) + A_3 \sin(3x + \varphi_3) + \dots \quad (13-9)$$

比較 (13-1), (13-9) 兩式, 欲合乎 (13-8) 式的條件, 必須  $A_0$  及偶次諧波的各项均为零, 即:

$$y = f(x) = A_1 \sin(x + \varphi_1) + A_3 \sin(3x + \varphi_3) + A_5 \sin(5x + \varphi_5) + \dots \quad (13-10)$$

上式不含直流分量, 也不含偶次諧波。这种波依橫軸而对称, 叫做**橫軸对称波** (图13-2)。把这种波的負的部分前移  $180^\circ$ , 再依橫軸翻上去, 就可重迭符合。直流分量和偶次諧波是破坏对称的 (图13-3), 故凡橫軸对称的复波, 既沒有直流分量, 也不含偶次諧波。

在整流器中的电流或电压等, 若原点的選擇适宜, 往往能滿足下列条件:

$$f(x) = f(-x). \quad (13-11)$$

由 (13-7) 式,  $f(-x) = A_0 + B_1 \sin(-x) + B_2 \sin(-2x) + \dots$

$$+ C_1 \cos(-x) + B_2 \sin(-2x) + \dots = A_0 - B_1 \sin x - B_2 \sin(2x) + \dots + C_1 \cos x + C_2 \cos(2x) + \dots \quad (13-12)$$

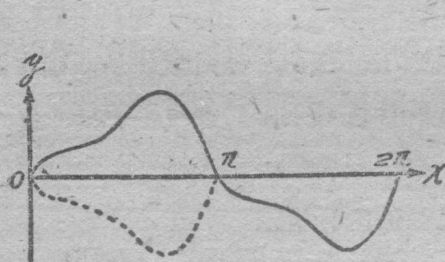


图13-2 橫軸对称的复波

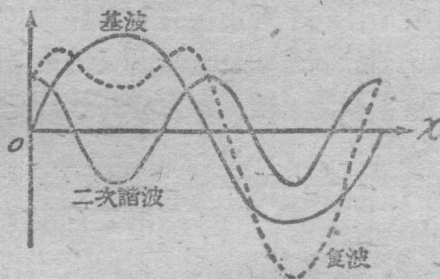


图13-3 二次諧波的破坏对称性

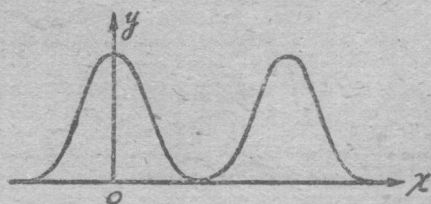


图13-4 縱軸对称的复波

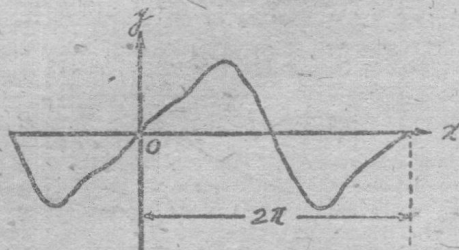


图13-5 对原點为对称的复波

比較(13-7), (13-12) 兩式, 欲合乎(13-11)式的條件, 必須含  $\sin$  的各項都是零, 即:

$$y = f(x) = A_0 + C_1 \cos x + C_2 \cos 2x + \dots \quad (13-13)$$

這種波是依縱軸而對稱, 叫做**縱軸對稱波**。凡縱軸對稱波, 必不含(13-7)式中正弦的各項(圖13-4)。把右邊的曲線依縱軸翻過去, 就可與左邊的曲線相重迭。

在倍頻器的復波中, 若選定原點在函數為零之點時, 所遇到的函數, 將能滿足下列條件:

$$f(x) = -f(-x). \quad (13-14)$$

由(13-9)式

$$\begin{aligned} -f(-x) &= -A_0 + B_1 \sin x + B_2 \sin(2x) + \dots \\ &\quad - C_1 \cos x - C_2 \cos(2x) - \dots \end{aligned}$$

以與(13-7)式相比較, 欲合乎(13-14)式的條件, 必須  $A_0$  及含  $\cos$  各項都為零, 即原函數應為:

$$y = f(x) = B_1 \sin x + B_2 \sin(2x) + \dots \quad (13-15)$$

這種波是依原點而對稱, 叫做**原點對稱波**。凡原點對稱波, 在(13-7)式中, 必不含直流及  $\cos$  各項的分量。

欲確定某一復波, 只須求出它的  $A$ 、 $B$ 、 $C$  等系數就是。確定這些系數的方法, 可以分為兩種: 一種是分析法; 一種是圖解法。分別敘述於以下二節。

## 第2節 非正弦波的分析法

若曲線方程式  $y = f(x)$  為已知, 或可以由觀察復波而求得, 則  $A$ 、 $B$ 、 $C$  等系數可以算出。例如把(13-7)式的兩邊, 各乘以  $dx$ , 再各從0積到  $2\pi$ , 就可以求出  $A_0$  來。

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} y dx &= \int_0^{2\pi} A_0 dx + \int_0^{2\pi} B_1 \sin x dx + \int_0^{2\pi} B_2 \sin 2x dx + \dots \\ &\quad + \int_0^{2\pi} C_1 \cos x dx + \int_0^{2\pi} C_2 \cos 2x dx + \dots \end{aligned}$$

上式的右邊各項, 除第一項為  $2\pi A_0$  外, 其餘各項各為零, 故:



$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y dx. \quad (13-16)$$

欲求系数  $B_k$ ，只須把 (13-7) 式的兩边各乘以  $\sin kx dx$ ，再各从零积到  $2\pi$ ，就是：

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} y \sin kx dx &= \int_0^{2\pi} A_0 \sin kx dx + \int_0^{2\pi} B_1 \sin x \sin kx dx + \dots \\ &+ \int_0^{2\pi} C_1 \cos x \sin kx dx + \int_0^{2\pi} C_2 \cos 2x \sin kx dx + \dots \end{aligned}$$

上式右边各項可分为四类 ( $m \neq n$ )：

$$\begin{aligned} A_0 \int_0^{2\pi} \sin kx dx &= 0; \\ B \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx &= \frac{B}{2} \int_0^{2\pi} \cos(m-n)x dx \\ &- \frac{B}{2} \int_0^{2\pi} \cos(m+n)x dx = 0; \\ C \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx &= \frac{C}{2} \int_0^{2\pi} \sin(m+n)x dx \\ &+ \frac{C}{2} \int_0^{2\pi} \sin(m-n)x dx = 0; \\ B_k \int_0^{2\pi} \sin^2 kx dx &= \frac{B_k}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2kx) dx = \pi B_k. \end{aligned} \quad (13-17)$$

前三类各为零，只有最后一类为  $\pi B_k$ ，故：

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \sin kx dx. \quad (13-18)$$

同理

$$C_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y \cos kx dx. \quad (13-19)$$

如此复波函数  $y=f(x)$  与系数  $A_0$ 、 $B_k$ 、 $C_k$  間已有一定的关联。我們就可以从方程式  $y=f(x)$ ，按照 (13-16)、(13-18)、(13-19) 三式以求得各系数。既求得各系数后，又可按照 (13-7) 式，求出复波的分解式。

(例1) 有一锯齿形的复波 (图13-6)，在一週之間， $y$  的数值从  $(-\pi)$  到  $(+\pi)$ ，試以傅里叶級数表示这复波。

锯齿形的波在一週之中是一直綫波。当  $x$  为零时， $y$  为  $(-\pi)$ ； $x$  为  $2\pi$  时， $y$  为  $(+\pi)$ 。故：

$$y = x - \pi.$$

(13-20)

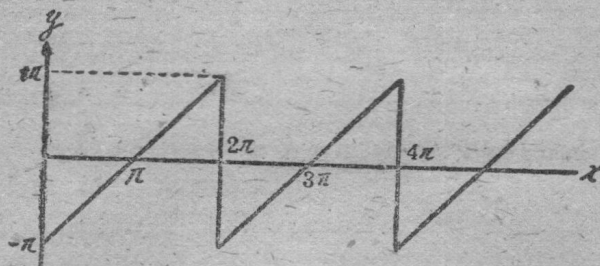


图13-6 锯齿波的分析

由(13-17)式

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x - \pi) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{x^2}{2} - \pi x \right]_0^{2\pi} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (13-21)$$

由(13-18)式

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x - \pi) \sin kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin kx dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \pi \sin kx dx, \end{aligned}$$

等式右边第二项为零, 第一项的积分可引用积分公式:

$$\int x \sin x dx = \sin x - x \cos x,$$

$$\text{得 } B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{k^2} \sin kx - \frac{x \cos kx}{k} \right]_0^{2\pi} = -\frac{2}{k}, \quad (13-22)$$

$$\text{故 } B_1 = -\frac{2}{1}; B_2 = -\frac{2}{2}; B_3 = -\frac{2}{3}; B_4 = -\frac{2}{4} \text{ 等}.$$

由(13-19)式

$$C_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x - \pi) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos kx dx - \int_0^{2\pi} \cos kx dx$$

上式右边第二项为零, 第一项的积分可引用积分公式:

$$\int x \cos x dx = \cos x + x \sin x,$$

$$\text{得 } C_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\cos kx}{k^2} + \frac{x \sin kx}{k} \right]_0^{2\pi} = 0. \quad (13-23)$$

以(13-21)、(13-22)、(13-23)三式的A、B、C的数值代入(13-7)式, 得锯齿波的傅里叶级数式为:

$$y = -2 \left( \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots \right). \quad (13-24)$$

〔例 2〕有一正弦波，經整流后，只留正的半波（图13-7）。試以傅里叶級数前四項表示这波的近似值。

在  $x$  从零到  $\pi$  时， $i = I_m \sin \alpha$ ，

在  $x$  从  $\pi$  到  $2\pi$  时， $i = 0$ 。

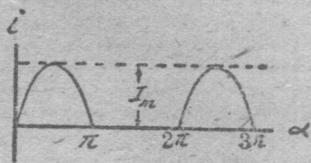


图13-7 半波整流的複波

由 (13-16) 式

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} I_m \sin \alpha d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (0) d\alpha = \frac{I_m}{2\pi} \left[ -\cos \alpha \right]_0^{\pi} = \frac{I_m}{\pi} \quad (13-25)$$

由 (13-18) 式

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (I_m \sin \alpha) \sin \alpha d\alpha + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (0) \sin \alpha d\alpha \\ &= \frac{I_m}{2\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\alpha) d\alpha = \frac{I_m}{2} \end{aligned} \quad (13-26)$$

在  $k$  不为零，也不为 1，而为 2 以上时，則：

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (I_m \sin \alpha) \sin k\alpha d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin (k-1)\alpha}{k-1} - \frac{\sin (k+1)\alpha}{k+1} \right]_0^{\pi} = 0. \end{aligned} \quad (13-27)$$

由 (13-19) 式

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (I_m \sin \alpha) \cos \alpha d\alpha + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (0) \cos \alpha d\alpha \\ &= \frac{I_m}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin 2\alpha}{2} d\alpha = \frac{I_m}{\pi} \left[ -\frac{\cos 2\alpha}{4} \right]_0^{\pi} = 0. \end{aligned} \quad (13-28)$$

在  $k$  不为零，也不为 1，而为 2 以上时，則：

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (I_m \sin \alpha) \cos k\alpha d\alpha \\ &= \frac{I_m}{2\pi} \int_0^{\pi} \left[ \sin(\alpha + k\alpha) + \sin(\alpha - k\alpha) \right] d\alpha \\ &= \frac{I_m}{2\pi} \left[ -\frac{\cos(1+k)\alpha}{1+k} - \frac{\cos(1-k)\alpha}{1-k} \right]_0^{\pi} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{当 } k=2 \text{ 时, } C_2 &= -\frac{2I_m}{3\pi} \\
 k=3 \text{ 时, } C_3 &= 0 \\
 k=4 \text{ 时, } C_4 &= \frac{2I_m}{15\pi}
 \end{aligned} \quad (13-29)$$

以 (13-25) 到 (13-29) 式各值代入 (13-7) 式, 得整流波(图 13-7) 的傅里叶级数的前四项式:

$$\begin{aligned}
 i &= \frac{I_m}{\pi} + \frac{I_m}{2} \sin \alpha - \frac{2I_m}{5\pi} \cos 2\alpha - \frac{2I_m}{15\pi} \cos 4\alpha \\
 &= 0.318I_m + 0.500I_m \sin \alpha - 0.212I_m \cos 2\alpha - 0.0424I_m \cos 4\alpha. \quad (13-30)
 \end{aligned}$$

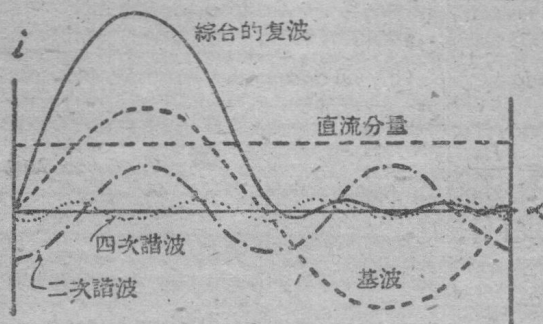


图13-8 整流波的各分量

把这四个分量各绘于图 13-8, 综合的复波已接近于整流波。

[例 3] 有一 R、C、L 相串联的电路, 电源的基波频率为 50 赫, 已知:

$$R = 10 \text{ 欧,}$$

$$L = 0.05 \text{ 亨,}$$

$$C = 22.5 \text{ 微法,}$$

$$u = 180 \sin \omega t + 60 \sin 3\omega t + 40 \sin(5\omega t + 18^\circ) \text{ 伏,}$$

试求电路中的电流。

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 10 + j\left(314 \times 0.05 - \frac{10^6}{314 \times 22.5}\right) \\
 &= 10 + j(15.7 - 141) = 10 - j125.3 = 126 \angle -85.3^\circ \text{ 欧,}
 \end{aligned}$$

$$I_{1m} = \frac{U_{1m}}{Z_1} = \frac{180}{126} = 1.43 \text{ 安,}$$

$$\therefore i_1 = 1.43 \sin(\omega t + 85.3^\circ) \text{ 安.}$$

$$\begin{aligned}
 Z_3 &= R + j\left(3\omega L - \frac{1}{3\omega C}\right) = 10 + j\left(3 \times 15.7 - \frac{141}{3}\right) = 10 + j(47 - 47) \\
 &= 10 \angle 0^\circ \text{ 欧,}
 \end{aligned}$$

$$I_{3m} = \frac{U_{3m}}{Z_3} = \frac{60}{10} = 6 \text{ 安,}$$

$$\therefore i_3 = 6 \sin(3\omega t + 0^\circ) = 6 \sin 3\omega t \text{ 安.}$$

$$\begin{aligned}
 Z_5 &= R + j\left(5\omega L - \frac{1}{5\omega C}\right) = 10 + j\left(5 \times 15.7 - \frac{141}{5}\right) = 10 + j50.3 \\
 &= 51.2 \angle 78^\circ \text{ 欧,}
 \end{aligned}$$

$$I_{5m} = \frac{U_{5m}}{Z_5} = \frac{40}{51.2} = 0.78 \text{ 安,}$$

$$\therefore i_5 = 0.78 \sin(5\omega t + 18^\circ - 78^\circ) = 0.78 \sin(5\omega t - 60^\circ) \text{ 安.}$$

电流  $i = i_1 + i_3 + i_5 = 1.43 \sin(\omega t + 85.3^\circ) + 6 \sin 3\omega t + 0.78 \sin(5\omega t - 60^\circ)$  安。  
 請注意上例的波幅，电压的基波远大于第 3 次谐波，而电流的基波，却远小于第 3 次谐波，其理由請思考（或参阅以下第 10 节）。

### 第 3 节 非正弦波的图解法

从以上的分析，可知傅里叶的级数是复波和正弦波间的桥梁。一个任意形状的复波，经过傅里叶级数的分解，可以化作若干不同频率的正弦波，对于复波的处理，可援用正弦波的方法。

例如有一复波的电势施于一电路，我们可以把复波的电势经傅里叶级数的分解，化作若干不同频率的电势，分别施于这电路，这电路的电流按照迭加定理，就是这些电势所产生的电流的总和，如上节的例 3。

倘  $y = f(x)$  为已知或可求得，则用上节的分析方法，经过傅里叶级数的桥梁，分解为不同频率的正弦波，自是最省事的办法。但实际所研究的复波往往是现波器所照下来的波形，无从确定它的数学方程式，而只有一定形状的波形。如此就须採用近似的图解法。所谓图解法，就是从已知复波的图中，求出各级数的系数  $A_0, B_k, C_k$  来。理论很简单，而计算的数字甚繁。

先叙述求  $A_0$  的方法。由 (13-16) 式，可知：

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y dx = \text{一週間平均的縱坐标。}$$

量出复波在一週以內的曲綫与横軸所包圍的面积的和，再用一週間的横坐标  $2\pi$  来除，所得的商就是系数  $A_0$ 。

（图 13-9）。这面积可用「面积計」量出，也可用精細而透明的方格紙数出。如复波对横軸对称，则一週之間面积的和为零， $A_0$  也必为零，就是横軸对称波，不含有直流分量。

次叙述求  $B_k$  的方法。既系图解，自不能



图 13-9  $A_0$  是一週間平均的縱坐标