GAODENGSHUXUE FUXI JI
SHITI XUANJIANG

吴振奎 梁邦助 唐文广 编著

高等数学复习及试题选讲

微积分
线性代数
概率统计

GAODENGSHUXUE FUXI JI SHITI XUANJIANG

北京工业大学出版社
BEIJING GONGYE DAXUE CHUBANSHE

高等数学
复习及试题选讲

吴振奎　梁邦助　唐文广　编著

北京工业大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学复习及试题选讲/吴振奎，梁邦助，唐文广编著.
—北京：北京工业大学出版社，2009.7
ISBN 978-7-5639-1897-3

Ⅰ.高… Ⅱ.①吴…②梁…③唐… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 063683 号

高等数学复习及试题选讲
吴振奎　梁邦助　唐文广　编著
*
北京工业大学出版社出版发行
邮编：100022　电话：（010）67392308
各地新华书店经销
徐水宏远印刷有限公司印刷
*
2009 年 7 月第 1 版　2009 年 7 月第 1 次印刷
787mm×1 092mm　16 开　36 印张　1440 千字
ISBN 978-7-5639-1897-3
定价：58.00 元

前　言

近年来，随着高等教育事业的迅猛发展，我国研究生的报考和招收人数逐年增多，这无论是对高校在校学子，还是对已经工作的往届大学毕业生乃至自学者来讲，都无疑提供了极好的继续深造、施展才华的机会。

“高等数学”（包括微积分、线性代数和概率统计）是大学理工科及部分文科（如经济、管理等）专业的重要基础课，也是大多数专业研究生入学考试的必试科目。但其内容较为庞杂，涉及分支又多，同时题目新颖灵活、花样纷繁多变。这一切常令不少考生因敬畏而却步，也许会留下终生遗憾。

1982 年，笔者在辽宁大学供职、正课之暇，为学校部分打算报考研究生的学子，开设了“高等数学复习与试题选讲”选修课，目的是从知识上给学生们一个小结，方法上给他们一点开拓，技巧上给他们些微启迪，让他们多看些、多练些。

当时课讲得很辛苦，但学生们学得极认真。教者与学者不断地交流、研讨、切磋，使得两遍下来，讲义便已形成，且由辽宁科学技术出版社于 1984 年出版，转年增订本再印。

尔后，笔者调天津工作，种种原因，使笔者终与本书修订再版工作无缘。

一晃 20 余年，时过境迁，感触良多。

随着近年来大学扩招，由于办学条件的限制，学生们对数学学习普遍感到困难，不少学生都希望能有一本数学复习用书，希望这本书的知识面广阔些，内容上丰富些，层次稍高些，这不仅对在校生复习迎考有所帮助，而且对考研乃至参加数学竞赛也能有益（近几年大学生数学竞赛似乎成了检验各个学校数学教学水平的标准，越来越被人们重视），因为学子们都将同样面临复习、考试，尽管是不同的类型、层次的考试。

此次应北京工业大学出版社之邀，笔者有幸将书稿修订再次奉献给广大读者，为此笔者对原书大动刀斧，以使之适应新时代、新潮流、新形势、新变化。

另外，在本书的修订版中每章都增加了以下内容：

（1）经典问题解析；

（2）1987 年以后全国硕士学位研究生招生数学统考试题选讲；

（3）国内外大学生数学竞赛题赏析。

（此前，本书曾按学科拆分成三册出版：高等数学（微积分）、线性代数和概率统计。但事后发觉有些读者因无法购得全套书而多有不便，故现又将它们合并为一册。）

俗话说“温故知新”，历史也许不会重复，但考试却不然，几年、十几年前的题目，往往又会被改头换面地拿出来，甚至原封不动地“克隆”。了解这些看上去也许有些“陈旧”的试题，细细品味，有时仍感新鲜、别致，不信就请查一查近年的考卷，你总会有“似曾相识”之感，因为“高等数学”内容就那么多，好的试题也就那么一些。正如时尚的流行，一个周期下来，便是旧时尚的复制与翻版（当然

不是简单的重复)。

“登高望远”，对考研题乃至竞赛题的了解与赏析，往往会使我们开阔眼界、打通思路，因为掌握蕴涵在这些题目中的匠心、立意、解法、技巧，不仅使我们会有茅塞顿开之感，有时还会使我们大吃一惊，啊哈！原来如此。

本书在编写过程中参阅了大量文献，北京文登学校也提供了极为宝贵的资料，笔者谨向他们致以谢意。此次本书出版过程中，年轻的朗俊新秀梁邦助、唐文广两位的加盟，加之北京工业大学出版社吕小红编辑精心审读、编辑加工，定使本书增色不少。

尽管笔者十分努力，但精力与体力已不从心，幸好有梁、唐两后生的恳诚协佐及出版社的鼎力支持，竟令笔者焕发了活力与激情，责任告诫自己仍须努力（当然我也仍会努力)。

本书的出版唤起了笔者对在辽宁大学工作的那段美好时光的追忆，对昔日的挚友、同仁的怀念，在此也向他们捎去祝福。

笔者也殷切期待着读者的建议、批评和指教，让我们一起将这本小书再次出版成功。

吴振奎

2009 年 3 月

目　录

上篇　微积分

中篇　线性代数

下篇　概率统计

上篇　微积分

一、函数、极限、连续

内　容　提　要

（一）集合及运算

集合是现代数学中最基本的概念，其观点和方法已渗透到数学的许多分支中．通常用“具有某种特定性质事物（对象）的全体”去描述集合．集合简称集，通常用大写字母$A,B,C,\cdots$表示．构成集合的事物称为元素，通常用小写字母$a,b,c,\cdots$表示．

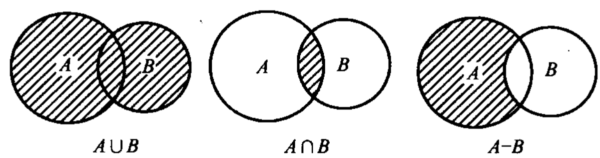
若a是A的元素，称a属于A，记$a\in A$；若a不是A的元素，称a不属于A，记作$a\overline{\in}A$．

又$A=\{a\mid a$具有$P\}$表示集合A由满足条件P的元素组成．

不含任何元素的集合叫**空集**，记作$\varnothing$．又若$x\in A$，必有$x\in B$，则称A是B的**子集**，记$A\subset B$．

当$A\subset B$，且$B\subset A$时，称集合A,B**相等**，记$A=B$．

集合的运算指并、交、差等：



X：$\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$称集合A,B的**并**，记$A\cup B$；

Y：$\{y\mid y\in A$ 且 $y\in B\}$称集合A,B的**交**，记$A\cap B$；

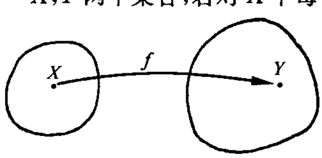
Z：$\{z\mid z\in A$ 且 $z\overline{\in}B\}$称集合A,B的**差**，记$A-B$或$A\backslash B$；

又若S是全空间，则任一集合$A\subset S$，称$S-A$为A的余集或补集，记$\overline{A}$．

（二）函数概念

1．函数

X,Y两个集合，若对X中每一元素x，通过法则（映射）f对应到Y中一个元素y，则称f为定义在X上的一个函数，记$y=f(x)$（x称自变量，y称因变量）．



X称为函数的**定义域**．而$Y=\{y\mid y=f(x),x\in X\}$称为函数的**值域**．变量也称为**元**．随自变量个数不同函数又分一元函数、二元函数……多元函数．

2．函数的表示法

函数的表示法有解析法（又称公式法，它有显式、隐式、参数式之分）、列表法、图像法等．

3．函数的几种特性

单、多值性	对定义域X中每一个x，只确定唯一的y的函数叫**单值函数**；否则称为**多值函数**
奇　偶　性	$f(-x)=f(x)$称$f(x)$为**偶函数**，$f(-x)=-f(x)$称$f(x)$为**奇函数**（对所有$x\in X$）
单　调　性	对X内任两点$x_1<x_2$，若$f(x_1)<f(x_2)$[$f(x_1)\leqslant f(x_2)$]则称函数$f(x)$**单增**[**不减**]；$f(x_1)>f(x_2)$[$f(x_1)\geqslant f(x_2)$]则称函数$f(x)$**单减**[**不增**]
有　界　性	若$\mid f(x)\mid\leqslant M$（M是正的常数）对所有$x\in X$成立，则$f(x)$在X上**有界**；否则称**无界**
周　期　性	若$f(x+T)=f(x)$，对所有$x\in X$成立，称$f(x)$为**周期函数**．满足上式的最小正数T（如果存在）称为该函数的**周期**
齐　次　性	对多元函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$来说，若$f(tx_1,tx_2,\cdots,tx_n)=t^kf(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，称该函数为$k$**次齐次函数**

4．反函数、复合函数

复合函数是由函数$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$经过中间变量u而组合成的函数$y=f[\varphi(x)]$．

注意当$x\in X$（或其一部分），$\varphi(x)$的值域包含在$f(u)$的定义域中时，函数才能复合．

	自变量	因变量	定义域	值　域	表达式
函　数	x	y	X	Y	$y=f(x)$
反函数	y	x	Y(或部分)	X(或部分)	$x=f^{-1}(y)$

注　函数与反函数是相对的，它们的位置可互换.

5. 显函数、隐函数

	定　义	表　示　式
显函数	已解出因变量为自变量的解析表达式所表示的函数	$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$
隐函数	未解出因变量，而是用方程表示自变量与因变量间的关系的函数	$F(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)=0$

6. 初等函数

基本初等函数是指幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等.

初等函数是由基本初等函数经有限次代数运算或函数复合得到的函数.

$$\textbf{基本初等函数}\begin{cases}\text{幂函数 } y=x^{\alpha}(\alpha\text{ 为实数})\\ \text{指数函数 } y=a^{x}(a>0,a\neq 1)\\ \text{对数函数 } y=\log_a x\ \ (a>0,a\neq 1)\\ \text{三角函数 } y=\sin x,\cos x,\cdots\\ \text{反三角函数 } y=\arcsin x,\arccos x,\cdots\end{cases}$$

$$\Big\downarrow\ (\text{四则运算})(\text{函数复合})$$

初等函数

（三）极限的概念

1. 极限

极限分数列的极限和函数的极限，详见下表：

数列的极限	对一个数列$\{x_n\}$，若任给$\varepsilon>0$，存在自然数$N=N(\varepsilon)$，使当$n>N$时，不等式$\lvert x_n-A\rvert<\varepsilon$恒成立，则称$A$为$\{x_n\}$当$n\to\infty$时的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$或$x_n\to A$(当$n\to\infty$时)
函数的极限	若任给$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，使当$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$时，不等式$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$恒成立，则称$A$为$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$或$f(x)\to A$(当$x\to x_0$时) 当$x$从$x_0$左(右)边趋向于$x_0$时，$f(x)$的极限称为左(右)极限，记为$\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)\left(\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)\right)$

2. 极限的运算

若$\lim f(x)=A,\lim\varphi(x)=B$，则

(1) $\lim[f(x)\pm\varphi(x)]=\lim f(x)\pm\lim\varphi(x)=A\pm B$；　(2) $\lim cf(x)=c\lim f(x)=cA$；

(3) $\lim f(x)\cdot\varphi(x)=\lim f(x)\cdot\lim\varphi(x)=A\cdot B$；　(4) $\lim\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim\varphi(x)}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq 0)$.

这儿lim下未写x的趋向，表示$x\to x_0,x\to\infty,x\to+\infty,x\to-\infty$等中的一种.

3. 两个重要的极限

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}\qquad\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}}$$

4. 无穷大量、无穷小量及其阶

无穷小量	$\lim\alpha(x)=0$	关　系	$\lim\dfrac{1}{\alpha(x)}=\infty$
无穷大量	$\lim g(x)=\infty$		$\lim\dfrac{1}{g(x)}=0$

无穷小量 $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 的阶

比值		定义	记号
$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$	$=0$	$\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶无穷小	$\alpha(x)=o[\beta(x)]$
	$=A\neq 0$	$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小	$\alpha(x)=O[\beta(x)]$
	$=1$	$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小	$\alpha(x)\sim\beta(x)$
$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=A\neq 0(k>0)$		$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小	$\alpha(x)=O[\beta^k(x)]$

无穷小量的性质:(1) 有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量;(2) 有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量;(3) 无穷小量与有界量的乘积仍是无穷小量.

5. 极限存在的判定

(1) **柯西(Cauchy) 准则**　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在 $\Longleftrightarrow N(\varepsilon)>0$,使任何 $x_1\geqslant N,x_2\geqslant N$ 时,$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ 恒成立.

(2) **单调有界函数有极限**　(a,b) 内单调有界函数 $f(x)$ 存在 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$.

(3) **压挤或夹逼准则**　$\lim g(x)=\lim h(x)=A$,又 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,则 $\lim f(x)=A$.

(4) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$.

6. 极限的常用求法

方法	例子	
利用定义 ($\varepsilon-\delta(N)$ 方法)	若 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$	(国防科技大学,1981)
利用极限的基本性质和法则	求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4}{a^{\frac{x}{2}}}(a>1)$	(中南矿冶学院,1982)
连续函数求极限	求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$	(大连铁道学院,1989)
利用两个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$	求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{\theta}{n}\right)^n$ 求 $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$	(东北重型机械学院,1981) (一机部 1981—1982 年出国进修生)
利用适当的函数变换(化去不定型的不定性或变化不定型类型)	求 $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-4x^2-x+4}{x+1}$ 求 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x$[提示:令 $1-x=u$]	(哈尔滨工业大学,1981) (湘潭大学,1981)
洛必达(L'Hospital)法则	求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x-\sin x}$	(国防科技大学,1983)
极限判别准则	设对 $n=1,2,\cdots$ 均有 $0<x_n<1$,且 $x_{n+1}=-x_n^2+2x_n$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$	(湘潭大学,1981)
等价无穷小代换	求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\sin^2x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$	(湖南大学,1983)
用左右极限关系	设 $y=\begin{cases}\frac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}, & x\neq 0;\\ 1, & x=0.\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0}y$	(厦门大学,1980)
用级数敛散性	求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$	(成都地质学院,1979;山东矿冶学院,1982)
适当放缩(利用不等式)	求 $\lim\limits_{x\to 0}x\sqrt[3]{\sin\frac{1}{x^2}}$	(湘潭大学,1982)
利用积分	求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$	(华东水利学院,1980)

（四）函数的连续性

1. 连续性的概念及连续函数

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，称 $f(x)$ 在点 x_0 **处连续**.

若函数 $f(x)$ 在某区间的每一点都连续，则说函数在该区间上连续，且称 $f(x)$ 为该区间上的**连续函数**.

2. 左、右连续及函数连续条件

右连续：若 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$

左连续：若 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$

函数在 x_0 连续：$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f(x)=0$

$\Leftrightarrow f(x)=f(x_0)+\alpha$，当 $x\to x_0$ 时 $\alpha\to 0$

3. 函数的间断点

函数的间断点	间断点的分类
①$f(x)$ 在 x_0 无定义； ②$f(x)$ 在 x_0 有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在； ③$f(x)$ 在 x_0 有定义，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$（可去间断点）； ④ $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$	满足 ③、④ 的间断点称为**第一类间断点**，其余的间断点称为**第二类间断点**

4. 一致连续

函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使对任意 $x_1,x_2\in I$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，总有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ 成立，则称 $f(x)$ 在 I 上一致连续.

5. 闭区间连续函数的基本性质

最（大、小）值定理	若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在该区间至少取得最大、最小值各一次（它们分别记为 M,m）[由此可推出 $|f(x)|\leqslant M$（有界性）]
介值定理	若 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，又 $\mu\in[m,M]$，则 $[a,b]$ 上至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=\mu$. 特别地，若 $f(a)f(b)<0$，则有 $\xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=0$
一致连续定理	闭区间上的连续函数，在该区间一致连续

连续函数性质：
- 局部性质　$f(x)$ 在 x_0 的邻域有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）（局部保号性）
- 闭区间整体性质
  - 最（大、小）值定理
  - 介值定理
  - 一致连续定理

6. 连续函数的性质

四则运算的连续性	若 $f_1(x),f_2(x)$ 在某一区间上连续，则 $\alpha f_1(x)\pm\beta f_2(x)$，$f_1(x)\cdot f_2(x)$，$f_1(x)/f_2(x)$ $(f_2(x)\neq 0)$ 也连续（在同一区间），这里 α,β 为常数
复合函数	若 $y=f(z)$ 在 z_0 连续，$z=\varphi(x)$ 在 x_0 连续，且 $z_0=\varphi(x_0)$，则 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 连续
反 函 数	若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单增（减）、连续，则其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在其值域上也单增（减）、连续

7. 初等函数的连续性

（1）基本初等函数在其定义城内是连续的；（2）初等函数在其定义域内是连续的.

经 典 问 题 解 析

1. 函数及其表达式

（1）函数表达式

例 1　设函数 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，试求 $f(f(f(f(x))))$ 和 $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$ $(x\neq 0$ 且 $x\neq 1)$.

解 由 $f(x)=\frac{x}{x-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}$，有 $\frac{1}{f(x)}=1-\frac{1}{x}$，则 $f(f(x))=\frac{1}{1-\frac{1}{f(x)}}=\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{x}\right)}=x.$

故 $f(f(f(x)))=f(x)$. 从而 $f(f(f(f(x))))=\frac{1}{1-1/f(x)}=x.$

而
$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right)=f\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}-1}=1-x \quad (x\neq 0 \text{ 且 } x\neq 1).$$

例 2 若 $f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$.

解 设 $x+y=u$，$\frac{y}{x}=v$，解得 $x=\frac{u}{1+v}$，$y=\frac{uv}{1+v}$.

故
$$f(u,v)=\left(\frac{u}{1+v}\right)^2-\left(\frac{uv}{1+v}\right)^2=\frac{(1-v)u^2}{1+v}，\text{即 } f(x,y)=\frac{x^2(1-y)}{1+y}.$$

(2) 函数定义域

例 1 设 $f(x)=\frac{1}{\ln(3-x)}+\sqrt{49-x^2}$，求 $f(x)$ 的定义域.

解 由题设有 $3-x>0$，$3-x\neq 1$，即 $\ln(3-x)\neq 0$ 和 $49-x^2\geqslant 0$.

故 $f(x)$ 的定义域为 $-7\leqslant x<2$，$2<x<3$.

例 2 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，试求 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域 $(a>0)$.

解 令 $x+a=u, x-a=v$，则 $f(x+a)+f(x-a)=f(u)+f(v)$.

由题设有 $0\leqslant u\leqslant 1$，即 $0\leqslant x+a\leqslant 1$，得 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$；

$0\leqslant v\leqslant 1$，即 $0\leqslant x-a\leqslant 1$，得 $a\leqslant x\leqslant 1+a$.

故 若 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$，则所求定义域为区间 $[a,1-a]$；若 $a>\frac{1}{2}$，其定义域不存在.

(3) 函数奇偶性、周期性

例 1 试证定义在 $(-l,l)$ 内的任何函数 $f(x)$ 均可表为奇函数与偶函数之和的形式，且表示式唯一.

证 令 $H(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，$G(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，易验证 $H(x)$，$G(x)$ 分别为定义在 $(-l,l)$ 上的偶函数和奇函数. 则 $f(x)=H(x)+G(x)$. (*)

下证唯一性. 若还有偶函数 $H_1(x)$ 和奇函数 $G_1(x)$ 使 $f(x)=H_1(x)+G_1(x)$，则由式(*)有

$$H(x)-H_1(x)=G_1(x)-G(x).$$

用 $-x$ 代入上式有 $H(x)-H_1(x)=G(x)-G_1(x)$，故 $H(x)=H_1(x)$，$G(x)=G_1(x)$.

此即说明表法唯一.

例 2 求 $f(x)=x-[x]$ 的最小周期.

解 设 $x=n+r$ $(0\leqslant r<1, n$ 为整数$)$，T 为任意整数，则由

$$\begin{aligned}f(x+T)&=f(n+T+r)=n+T+r-[n+T+r]=n+T+r-(T+[n+r])\\&=n+r-[n+r]=f(x).\end{aligned}$$

故任何整数均为其周期，则最小周期 $T=1$.

例 3 试证 $f(x)=\sin x^2$ 不是周期函数.

证 考虑 $\sin x^2=0$，即 $f(x)$ 的零点分布：$x^2=k\pi$，$x=\sqrt{k\pi}$ $(k=0,1,2,\cdots)$. 注意到

$$\sqrt{(k+1)\pi}-\sqrt{k\pi}=\pi/[\sqrt{(k+1)\pi}+\sqrt{k\pi}],$$

它随 k 的增大而变小，即 $f(x)$ 的零点随 k 的增大越来越密，这是不可能的. 因为周期函数的零点分布也是以周期形式出现的.

2. 数列极限及函数极限

(1) 数列极限

例 1 求 $x_0=0, x_1=1$，且 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+x_{n-1})$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 由题设 $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(x_n+x_{n-1})-x_n=-\frac{1}{2}(x_n-x_{n-1})$，反复运用此结论可有

$$x_{n+1}-x_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(x_1-x_0)=\frac{(-1)^n}{2^n};\ n=1,2,\cdots$$

于是由下面变形有 $x_{n+1}=(x_{n+1}-x_n)+(x_n-x_{n-1})+\cdots+(x_1-x_0)+x_0=\dfrac{1-(-1/2)^{n+1}}{1-(-1/2)}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{2}{3}$.

例 2 若 $x_0=1$，且 $x_n=\dfrac{3+2x_{n-1}}{3+x_{n-1}}$，$n=1,2,\cdots$，试证数列 $\{x_n\}$ 收敛，且求其值.

解 由题设有 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{3+2x_n}{3+x_n}-\dfrac{3+2x_{n-1}}{3+x_{n-1}}=\dfrac{3(x_n-x_{n-1})}{(3+x_n)(3+x_{n-1})}$，故 $|x_{n+1}-x_n|=\dfrac{3|x_n-x_{n-1}|}{|3+x_n||3+x_{n-1}|}$.

又由题设，显然 $x_n>0$，从而 $|x_{n+1}-x_n|\leqslant\dfrac{1}{3}|x_n-x_{n-1}|$，归纳地可有 $|x_{n+1}-x_n|\leqslant\dfrac{1}{3^n}|x_1-x_0|=\dfrac{1}{3^n\cdot 4}$;

这里注意到，$x_0=1$，$x_1=\dfrac{5}{4}$. 从而正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 收敛. 又

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)=\lim_{m\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{m}(x_{n+1}-x_n)\right]=\lim_{m\to\infty}(x_m-x_1)=\lim_{m\to\infty}x_m-x_1,$$

从而极限 $\lim\limits_{m\to\infty}x_m$ 存在，设其为 A.

在 $x_n=\dfrac{3+2x_{n-1}}{3+x_{n-1}}$ 两边取极限($n\to\infty$)，有 $A=\dfrac{3+2A}{3+A}$，即 $A^2+A-3=0\Rightarrow A=\dfrac{1}{2}(-1+\sqrt{13})$（已舍去负值）.

例 3 若数列 $\{p_n\}$，$\{q_n\}$ 满足 $p_{n+1}=p_n+2q_n$，$q_{n+1}=p_n+q_n$，且 $p_1=q_1=1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{q_n}$.

解 设 $a_n=\dfrac{p_n}{q_n}$. 由题设对一切 a_n 均有 $a_n\geqslant 1$，且 $a_{n+1}=\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\dfrac{p_n+2q_n}{p_n+q_n}=1+\dfrac{q_n}{p_n+q_n}=1+\dfrac{1}{a_n+1}$. (*)

$$\text{由 } |a_{n+1}-a_n|=\left|\left(1+\frac{1}{a_n+1}\right)-\left(1+\frac{1}{a_{n-1}+1}\right)\right|=\frac{|a_{n-1}-a_n|}{|(a_n+1)(a_{n-1}+1)|}$$
$$<\frac{|a_{n-1}-a_n|}{4}<\frac{|a_{n-2}-a_{n-1}|}{4}<\cdots<\frac{a_2-a_1}{4^{n-1}},$$

有

$$|a_{n+m}-a_n|=|(a_{n+m}-a_{n+m-1})+(a_{n+m-1}-a_{n+m-2})+\cdots+(a_{n+1}-a_n)|$$
$$\leqslant|a_{n+m}-a_{n+m-1}|+|a_{n+m-1}-a_{n+m-2}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|$$
$$<(a_2-a_1)\left(\frac{1}{4^{m+n-2}}+\frac{1}{4^{m+n-3}}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}\right).$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4^n}$ 收敛，对充分大的 n 和给定的 m，上式右后一项可小于 $\dfrac{\varepsilon}{a_2-a_1}$，从而 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

在式(*)两边取极限有 $a=1+\dfrac{1}{a+1}$，得 $a=\sqrt{2}$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{q_n}=\sqrt{2}$.

例 4 若 $\{a_n\}(n=1,2,\cdots)$ 是一数列，又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=0$.

证 由极限存在的柯西准则，对任给 $\varepsilon>0$，存在充分大的 n，使

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}{n+1}\right|<\varepsilon,$$

即

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n-na_{n+1}}{n(n+1)}\right|<\varepsilon \text{ 或 } \left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n(n+1)}-\frac{a_{n+1}}{n+1}\right|<\varepsilon,$$

则

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n(n+1)}-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{n+1}<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n(n+1)}+\varepsilon, \tag{*}$$

另一方面，当 n 充分大时还有 $a-\varepsilon<\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}<a+\varepsilon$. (**)

从而由式(*)及式(**)有 $\dfrac{a-\varepsilon}{n+1}-\varepsilon<\dfrac{a_{n+1}}{n+1}<\dfrac{a+\varepsilon}{n+1}+\varepsilon$，即 n 充分大时，$\dfrac{a+\varepsilon}{n+1}<\varepsilon$，$\dfrac{a-\varepsilon}{n+1}>-\varepsilon$.

故 $-2\varepsilon<\dfrac{a_{n+1}}{n+1}<2\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=0$.

例 5 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

解 注意到下面的变形：

$$\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}=\sqrt[n]{\frac{(n+1)^n}{n!}}=\sqrt[n]{\frac{2}{1}\cdot\frac{3^2}{2^2}\cdot\frac{4^3}{3^3}\cdot\cdots\cdot\frac{(n+1)^n}{n^n}}=\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\left(1+\frac{1}{3}\right)^3\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

由正项数列 $\{a_n\}\to a\ (n\to\infty)$，则 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\to a\ (n\to\infty)$.

故由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1}=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

例 6 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\{\underbrace{\sin(\sin\cdots\sin x)}_{n个}\}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

解 记 $f_n(x)=\underbrace{\sin(\sin\cdots\sin x)}_{n个}$. 设 $0\leqslant x\leqslant\pi$，则 $0\leqslant\sin x\leqslant x$，从而 $f_{n+1}(x)=\sin[f(x)]\leqslant f_n(x)$，知 $\{f_n(x)\}$ 单调减少，又其非负，故知其有极限. 取 $x_0\in[0,\pi]$，则

$$0\leqslant u=\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)=\lim_{n\to\infty}\sin[f_{n-1}(x_0)]=\sin[\lim_{n\to\infty}f_{n-1}(x_0)]=\sin u\leqslant 1.$$

又由 $\sin u\leqslant u$，知 $u=0$. 从而对一切 $x\in[0,\pi]$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$.

同理，可证 $x\in[\pi,2\pi]$ 的情形. 又由 $\sin x$ 的周期性，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\{\underbrace{\sin(\sin\cdots\sin x)}_{n个}\}=0$.

例 7 设 $c_1,c_2,c_3,\cdots$ 总满足 $\sum\limits_{k=1}^{n}c_k=0$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(c_k\sqrt{x^2+1+k})$.

解 由 $\sum\limits_{k=1}^{n}c_k=0$ 知，对任意 x 均有 $\sum\limits_{k=1}^{n}c_kx=x\sum\limits_{k=1}^{n}c_k=0$. 故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}c_kx=0$. 从而可有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}c_k\sqrt{x^2+1+k}\right)&=\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}c_k\sqrt{x^2+1+k}-\sum_{k=1}^{n}c_kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}c_k(\sqrt{x^2+1+k}-x)\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}c_k\frac{1+k}{\sqrt{x^2+1+k}+x}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left[c_k(1+k)\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1+k}+x}\right]=0.\end{aligned}$$

例 8 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n}$.

解 首先用数学归纳法可证：$0<\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ $(n=1,2,\cdots)$.

事实上，$n=1$ 时，由 $\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$，知命题真. 若 $n=k$ 时命题真，即

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2k}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

今考虑 $n=k+1$ 的情形，注意到：

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2k\cdot(2k+2)}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\sqrt{\frac{(2k+1)(2k+3)}{(2k+2)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2k+3}}.$$

因 $(2k+1)(2k+3)=4k^2+8k+3<4k^2+8k+4=(2k+2)^2$，故 $\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2k+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2k+2)}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$.

从而不等式对一切自然数 n 真. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$ 及夹逼准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n}=0$.

例 9 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{2004}}{n^\alpha-(n-1)^\alpha}$ 为非零实数，求 α 并求此极限值.

解 注意下面的式子变形(包括无穷小量代换)：

$$\frac{n^{2004}}{n^\alpha-(n-1)^\alpha}=\frac{n^{2004-\alpha}}{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^\alpha}=\frac{n^{2004-\alpha}}{1-\left[1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]}=\frac{n^{2004-\alpha}}{\frac{\alpha}{n}-o\left(\frac{1}{n}\right)}=\frac{n^{2005-\alpha}}{\alpha+\frac{o\left(\frac{1}{n}\right)}{n}}.$$

当 $n\to\infty$ 时，$\alpha+\frac{o\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\to\alpha$，这样可有 $n^{2005-\alpha}\xrightarrow{(n\to\infty)}\begin{cases}1, & \alpha=2005;\\0, & \alpha>2005;\\\infty, & \alpha<2005.\end{cases}$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{2004}}{n^\alpha-(n-1)^\alpha}=\begin{cases}1/\alpha, & \alpha=2005;\\0, & \alpha>2005;\\\infty, & \alpha<2005.\end{cases}$

故题设要求的 $\alpha = 2005$，且此时极限值为 $\frac{1}{2005}$.

例 10 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right]$

解 考虑 $\ln(1+x)$ 的泰勒展开：$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n},\ x\in(-1,1]$.

当 $x=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right]=\ln 2$.

例 11 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}\right)$，这里 $a>1$.

解 设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{a^k}$，则考虑 $S_n-\frac{1}{a}S_n=\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}-\frac{n}{a^{n+1}}=\dfrac{\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{a^n}\right)}{1-\frac{1}{a}}-\frac{n}{a^{n+1}}$,

从而有 $S_n=\dfrac{1}{1-\frac{1}{a}}\left[\dfrac{\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{a^n}\right)}{1-\frac{1}{a}}-\frac{n}{a^{n+1}}\right]$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{1-\frac{1}{a}}\cdot\dfrac{\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}}=\dfrac{a}{(1-a)^2}$.

例 12 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}\right]$.

解 由 $\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}=\frac{k+2}{k!(k+2)+(k+2)!}=\frac{1}{k!+(k+1)!}=\frac{1}{k!(k+2)}$.

由 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty)$，则 $xe^x=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{n!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty)$.

两边积分 $\int_0^x xe^x\,dx=xe^x-e^x\Big|_0^x=xe^x-e^x+1$，及

$$\int_0^x\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+1}}{k!}\right)dx=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_0^x\frac{x^{k+1}}{k!}dx\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{k+2}}{(k+2)k!},\qquad(-\infty<x<+\infty).$$

令 $x=1$ 代入上式有 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!(k+2)}=1\cdot e-e+1=1$.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k!+(k+1)!+(k+2)!}\right]=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+2)k!}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+2)k!}-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

例 13 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos\frac{k\pi}{n}}{2+\sin\frac{k\pi}{n}}\right)$.

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{n}\cdot\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos\frac{k\pi}{n}}{2+\sin\frac{k\pi}{n}}\right)$ （注意到 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$）$=\pi\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\cos\frac{k\pi}{n}}{2+\sin\frac{k\pi}{n}}\cdot\frac{1}{n}\right)$ （提出因子 π）

$$=\pi\int_0^1\frac{\cos\pi x}{2+\sin\pi x}dx=\int_0^1\frac{d(2+\sin\pi x)}{2+\sin\pi x}=\ln(2+\sin\pi x)\Big|_0^1=\ln 2-\ln 2=0.$$

例 14 若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，且 $f(a)\neq 0$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n$.

解 考虑函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(a+x)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{x}}$，当 x 充分小时，$f(a)$，$f(a+x)$ 同号，注意到

$$\ln\left\{\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(a+x)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{x}}\right\}=\lim_{x\to 0}\left\{\ln\left[\frac{|f(a+x)|}{|f(a)|}\right]^{\frac{1}{x}}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln|f(a+x)|-\ln|f(a)|}{x}=[\ln f(x)]'_{x=a}=\frac{f'(a)}{f(a)}.$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{f(a+x)}{f(a)}\right]^{\frac{1}{x}}=\exp\left\{\frac{f'(a)}{f(a)}\right\}$，从而 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n=\exp\left\{\frac{f'(a)}{f(a)}\right\}$.

(2) 函数极限

例 1 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x\sin x)}{1-\cos x}$.

解 $x\to 0$ 时,$\ln(1+x\sin x)\sim x\sin x\sim x^2$,而 $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$,故$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x\sin x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2/2}=2$.

例 2 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin^2 x+e^x)-\ln e^x}{\ln(x^2+e^{2x})-\ln e^{2x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{\sin^2 x}{e^x}\right)}{\ln\left(1+\dfrac{x^2}{e^{2x}}\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x/e^x}{x^2/e^{2x}}$ (用无穷小量代换)$=\lim\limits_{x\to 0}e^x=1$.

例 3 (1) 若 $a>1$,n 为自然数,求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{a^x}$;(2) 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}x(\ln x)^n$.

解 经检验或式子变形后使之符合使用洛必达法则.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{a^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^n}{a^x\ln a}=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n!}{a^x(\ln a)^n}=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}x(\ln x)^n=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(\ln x)^n}{x^{-1}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{n(\ln x)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{n(n-1)(\ln x)^{n-2}}{(-1)^2\cdot\dfrac{1}{x}}=\cdots=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{n!\cdot\dfrac{1}{x}}{\dfrac{(-1)^n}{x^2}}=0$.

例 4 若函数 $f(x)$ 在$(a,+\infty)$ 内可导,且$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=A$. 试证:$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=A$.

证 由题设对任意 $\varepsilon>0$,有 X 当 $x>X$ 时 $|f'(x)-A|<\varepsilon$.

再由微分中值定理可有 $\left|\dfrac{f(x)-f(X)}{x-X}-A\right|=|f'(\xi)-A|<\varepsilon$, $X<\xi<x$,

即
$$\left(A-\varepsilon+\frac{f(X)}{x-X}\right)\frac{x-X}{x}<\frac{f(x)}{x}<\left(A+\varepsilon+\frac{f(X)}{x-X}\right)\frac{x-X}{x}.$$

当 $x\to\infty$ 时,上式左 $\to A-\varepsilon$,上式右 $\to A+\varepsilon$,从而 x 充分大时有

$A-2\varepsilon<\dfrac{f(x)}{x}<A+2\varepsilon\Rightarrow\left|\dfrac{f(x)}{x}-A\right|<2\varepsilon$. 从而$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=A$.

例 5 设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$ 上连续,且 $\min\limits_{x\in[a,b]}f(x)=1$. 试证$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b\dfrac{dx}{f^n(x)}}=1$.

证 由设知 $f(x)\geqslant 1$,从而$\dfrac{1}{f(x)}\leqslant 1$,$x\in[a,b]$. 则$\sqrt[n]{\int_a^b\dfrac{dx}{f^n(x)}}\leqslant\sqrt[n]{\int_a^b dx}=\sqrt[n]{b-a}\to 1$ $(n\to\infty)$.

故
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b\frac{dx}{f^n(x)}}\leqslant 1. \qquad (*)$$

另一方面,由$\dfrac{1}{f(x)}$ 在$[a,b]$ 上连续,对任意 $\varepsilon>0$,有 $\delta>0$. 当 $|x-\xi|<\delta$ 时,有

$\left|\dfrac{1}{f(x)}-\dfrac{1}{f(\xi)}\right|<\varepsilon\Rightarrow\dfrac{1}{f(x)}>1-\varepsilon$. 则 $\sqrt[n]{\int_a^b\dfrac{dx}{f^n(x)}}\geqslant\sqrt[n]{\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta}(1-\varepsilon)dx}=(1-\varepsilon)\sqrt[n]{2\delta}\to 1-\varepsilon$ $(n\to\infty)$.

故$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b\dfrac{dx}{f^n(x)}}\geqslant 1-\varepsilon$. 由 ε 任意性,知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b\dfrac{dx}{f^n(x)}}\geqslant 1$. $\qquad(**)$

由式($*$)及式($**$)有$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b\dfrac{dx}{f^n(x)}}=1$.

研究生入学考试试题选讲

1978—1986 年部分

1. 函数问题

例 1 设函数 $f(x)$ 的定义域为$(0,1)$,又$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,试求$f\left(\dfrac{[x]}{x}\right)$的定义域.(西北轻工业

学院,1985)*

解 欲使 $0<\frac{[x]}{x}<1$ 成立,必须 $x>1$ 且 $x\neq k$ $(k=2,3,4,\cdots)$.

故 $f\left(\frac{[x]}{x}\right)$ 的定义域为 $\{x\mid x>1,$ 且 $x\neq 2,3,4,\cdots\}$.

例 2 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$ 试求 $f[g(x)]$.(南京邮电学院,1985)

解 由设知,当 $|x|<1$ 时,$f[g(x)]=f(2-x^2)=0$;当 $x=1$ 时,$f[g(x)]=f(1)=1$;当 $|x|>1$ 时,$f[g(x)]=f(2)=0$.

综上 $f[g(x)]=\begin{cases}0, & x\neq 1;\\ 1, & |x|=1.\end{cases}$

例 3 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<-1;\\ x, & |x|\leqslant 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$ 求 $f(x^2+5)\cdot f(\sin x)+5f(4x-x^2-6)$.(海军工程学院,1986)

解 由 $x^2+5>1$,故 $f(x^2+5)=1$;
又 $|\sin x|\leqslant 1$,$4x-x^2-6=-[(x-2)^2+2]<-1$,故 $f(\sin x)=\sin x$,$f(4x-x^2-6)=-1$.
从而 $f(x^2+5)\cdot f(\sin x)+5f(4x-x^2-6)=\sin x-5$.

例 4 已知 $f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+1$,求 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)$.(武汉钢铁学院,1980)

解 令 $x=\pi-t$,则 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right)=\cos\frac{t}{2}$.

又 $\cos x=\cos(\pi-t)=-\cos t$. 故 $f\left(\cos\frac{t}{2}\right)=-\cos t+1$. 再令 $t=x$,有 $f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=1-\cos x$.

函数的奇偶性和周期性,是某些函数的一些重要性质,我们来看一个关于这方面的例子.

例 5 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数,且 $f(1)=a$,又对任何 x 值均有 $f(x+2)-f(x)=f(2)$.(1) 试用 a 表示 $f(2)$ 和 $f(5)$;(2) 问 a 取何值时,$f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.(清华大学,1982)

解 (1) 因 $f(x)$ 是奇函数,且令 $x=-1$,由题设有 $f(1)-f(-1)=f(2)$,从而 $f(2)=2f(1)=2a$.
再令 $x=1$ 和 $x=3$ 代入题设式可有 $f(3)-f(1)=f(2)$, $f(5)-f(3)=f(2)$,
从而有 $f(5)-f(1)=2f(2)$,即 $f(5)=f(1)+2f(2)=5a$.
(2) 注意到 $a=0$ 时,$f(2)=2a=0$,有 $f(x+2)=f(x)$,此时 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

2. 极限问题

例 1 设对于 $n=0,1,2,\cdots$,均有 $0<x_n<1$,且 $x_{n+1}=-x_n^2+2x_n$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.(湘潭大学,1981)

解 由设 $x_{n+1}=-x_n^2+2x_n=x_n(2-x_n)$,又 $2-x_n>1$,故 $x_{n+1}>x_n$,即 $\{x_n\}$ 递增.
又由 $x_{n+1}=1-(x_n-1)^2<1$,故 $\{x_n\}$ 有界.
从而 $\{x_n\}$ 有极限,设为 a. 对 $x_{n+1}=-x_n^2+2x_n$ 两边取极限有 $a=-a^2+2a\Rightarrow a(a-1)=0$.
又 $0<x_n<1$ 及 $\{x_n\}$ 递增,知 $a\neq 0$,从而 $a=1$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

例 2 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{3\sqrt{3\cdots\sqrt{3}}}}_{n\text{个}}$.(中国科学院,1985)

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt{3\sqrt{3\cdots\sqrt{3}}}}_{n\text{个}}=\lim\limits_{n\to\infty}\{[(3^{\frac{1}{2}}\cdot 3)^{\frac{1}{2}}\cdot 3]^{\frac{1}{2}}\cdots\}^{\frac{1}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}(3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{4}}\cdot\cdots\cdot 3^{\frac{1}{2^n}})=\lim\limits_{n\to\infty}(3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}})=3^1=3.$

例 3 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.(安徽工业学院,1985)

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$

例 4 已知数列 $f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$,试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f_n}{f_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.(长春光学精密机械学院,

* 括号内数字,为该试题考试年份,其前为试题出自的院校. 其余类同.