

高级中学课本
代数第一册
课堂教学参考书
(第二分册)

上海市教育局教学研究室編

0023
新 知 識 出 版 社

07
13
53

430.7
808

存

高級中學課本
代數第一冊課堂教學參考書
(第二分冊)
上海市教育局教學研究室編

中

新 知 識 出 版 社 出 版
(上海湖南路9號)

上海市書刊出版業營業許可証出015號

上海市印刷三廠印刷 新華書店上海發行所總經售

※

開本：787×1032 1/32 印張：3 字數：70,000

1957年10月第1版 1957年10月第1次印刷

印數：1—17,000本

統一書號：7076·263

定 價：(6) 0.26元

6
72-3

編 者 的 話

本分冊我們要講的話基本上與第一分冊相同，這裡不再重複。現在把有更勁的幾點補充如下：

一、本分冊包括課本第二章第Ⅰ節二次方程及第Ⅱ節可以化成二次方程的方程中的雙二次方程（高中一年級第一學期教學進度至此）。該章第Ⅱ節其餘部分因屬於第二學期教學進度，所以改變原定計劃，將其併入第三分冊中。

本分冊在第Ⅰ節的說明中闡明該節的教學目的、教材分析和教學進度，並提供一些有關教學方法的建議。接着按照教材順序寫成課時計劃。關於第Ⅱ節的說明擬在第三分冊介紹，這裡僅提出了雙二次方程的課時計劃。

二、本書由我室數學科同志主持，本分冊由教師彭恕華、華錚兩同志執筆編寫，並經張信鴻、唐秀穎兩同志校訂和作了修正。但由於時間匆促，限於水平，一定還存在着不少缺點與錯誤，希望教師們在參考時隨時提出指正的意見。

上海市教育局教學研究室

1957年9月

目 录

第二章 二次方程和可以化成二次方程的方程	1
I 二次方程	1
第 1 課 二次方程的意义 (§ 30)	9
第 2 課 不完全二次方程 $ax^2 + c = 0$ 及 $ax^2 = 0$ 的解法 (§ 31 (1)、(3))	12
第 3 課 不完全二次方程 $ax^2 + bx = 0$ 的解法 [§ 31 (2)]	14
第 4 課 完全二次方程的解法 (§ 32)	16
第 5 課 简化二次方程的根的公式 (§ 33)	19
第 6 課 一般二次方程的根的公式 (§ 34)	23
第 7 課 二次方程解法的练习	27
第 8 課 用二次方程解分式方程(包括文字系数的方程)	28
第 9 課 应用问题(一)(§ 35)	30
第 10 課 应用问题(二)(§ 35)	34
第 11 課 应用问题(三)(§ 35)	37
第 12 課 应用问题(四)(§ 35)	39
第 13 課 应用问题(五)(§ 35)	44
第 14 課 应用问题(六)(§ 35)	46
第 15 課 二次方程的解法和应用题的复习	48
第 16 課 关于二次方程的解法和布列二次方程 解应用题的检查	50
第 17 課 二次方程的根与系数的关系(韦达定理) (§ 36 定理和例 1)	51
第 18 課 韦达定理的应用 (§ 36 例 2, 例 3)	54
第 19 課 韦达定理的逆定理及其应用 (§ 36 例 4, 例 5)	57

第20課	韋達定理及其逆定理的应用(§33例6)	59
第21課	二次三項式(§37)	61
第22課	二次三項式的因式分解(一)——定理及其应用 (§38例2,例3,例4)	65
第23課	二次三項式的因式分解(二)(§38例5,例6)	68
第24課	已知二次方程的两个根作方程 用因式分解法解方程(§39)	70
第25課	二次方程的根的討論(一)(§40)	73
第26課	二次方程的根的討論(二)(§40)	77
第27課	二次方程的根的討論(三)(§40)	81
第28課	韋達定理、二次三項式和二次方程的根的討論的复习	84
第29課	关于韋達定理、二次三項式的因式分解以及二次方程 的根的討論的檢查	86
II	可以化成二次方程的方程	86
第30課	双二次方程的意义及解法(§41例1,例2)	86
第31課	双二次方程的根的性质	88
第32課	具有实数根的 $ax^4 + bx^2 + c$ 的因式分解 已知四实数根($\pm a, \pm b$) 作双二次方程	91
第33課	用輔助未知数法解可以化为 二次方程的方程(§41例3)	93

第二章 二次方程和可以化成 二次方程的方程

I 二次方程

教 学 目 的

(1) 使学生能熟練地、合理地掌握各种类型的二次方程的解法和求根公式的运用。

(2) 使学生能在求根公式的基础上掌握韋达定理和二次三項式的因式分解的定理以及它們正逆兩方面的应用，并从而提高二次方程解法的合理性的程度。

(3) 使学生能运用根的判別式和韋达定理来討論二次方程的根的性質，以增强求解的預見性并提供驗根的輔助方法。

(4) 使学生能用二次方程的知識布列方程来解应用題，并能按照題意对解答加以正确的解釋。

(5) 注意发展学生的思維能力和培养学生的合理的、迅速的运算以及書写整齐的习惯。

教 材 分 析

(一) 教材的系統:在初中阶段,我們在有理数範圍内,通过四則运算,已系統地学习了求解一元一次方程和二元或三元一次方程組.在本学期內已学习了无理数,把数的范围从有理数扩

大到实数；学习了幂和方根，把加、减、乘、除运算扩大为加、减、乘、除、乘方、开方运算。我們就將在这样的新的条件下比較有系統地来学习二次方程的实数根的解法，并为以后二次函数和高次方程的学习在理論和技能上打下必要的基础。

首先由实际应用問題来引出解二次方程的需要，其次研究各种类型的二次方程的解法，然后从配方法和平方根的意义导出一般二次方程的解法和求根的公式，进而在求根公式的基础上导出韋达定理并利用韋达定理建立二次三項式的因式分解的定理，最后用判別式和韋达定理来討論二次方程的根的性质。

(二) 二次方程的概念：

1. 本單元所研究的是实系数的一元二次方程。由于整数系包含在有理数系內，而有理数系包含在实数系內（当然整数系也就包含在实数系內），所以整系数的一元二次方程、有理系数的一元二次方程当然也在本單元所研究的范围之內。

2. 在 $ax^2+bx+c=0$ 中， a 、 b 分別称为二次項和一次項的系数，而 c 也可称为常数項的系数，因为常数項可写为 cx^0 的形式。我們以后在研究韋达定理和根的性质的时候，都是把 a 、 b 、 c 同称为系数的。

3. 不完全二次方程的两种类型 $ax^2+c=0$ 和 $ax^2=0$ 都是二次的二項方程，且都可用平方根的意义求解。因此一般的二次方程也可按照下列的方式进行分类：

$$\begin{aligned} \text{一般的二次方程} & \left\{ \begin{array}{l} ax^2+bx+c=0 \\ (a \neq 0) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{不完全二次方程} \\ \left(\begin{array}{l} b=0 \\ \text{或 } c=0 \\ \text{或 } b=c=0 \end{array} \right) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{二項方程} \\ (b=0) \left\{ \begin{array}{l} ax^2+c=0 \text{ (第一类型)} \\ (c \neq 0) \\ ax^2=0 \text{ (第二类型)} \\ (c=0) \end{array} \right. \\ \text{非二項方程} \text{——} ax^2+bx=0 \text{ (第三类型)} \\ (b \neq 0) \end{array} \right. \\ \text{完全二次方程} \text{——} ax^2+bx+c=0 \\ (b \neq 0, c \neq 0) \end{array} \right. \end{aligned}$$

(三) 二次方程的解法：

1. 在实数范围内求解实系数的二次方程的意义就是求出它的所有的实数根或是判定它无实数根，因此对于一个给定的二次方程如果能够作出无实数根的判定，也就在实数范围内解了这个方程。“不能解”和“无解”是两个不相同的概念，切不可把它们混淆起来。

2. 二次方程的一般解法：

(1) 一般解法的理论根据是方程的两个性质（初三学的）、配方法和平方根的意义。

(2) 一般求解的步骤是：

(i) 先用 $b^2 - 4ac$ 大于、等于或小于 0 的关系，判定所给方程有无实数根。如无实数根，则方程求解的工作已告完成；

(ii) 如有实数根，则再直接用求根的公式 $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

和 $x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 求出它的所有实数根。

(3) 一个二次方程如有实数根，则实数根的个数必须根据求根的公式解释为两个，或是两个不相等的实数根或是两个相等的实数根。这样的解释，不但是以后建立代数方程的一般理论所必需的，而且也是本单元中建立韦达定理和二次三项式的因式分解的定理所绝对必需的。

3. 二次方程的合理解法：

(1) 在实际求解中，除完全二次方程外，其他各种类型的不完全二次方程必须采用它们各自的特殊解法，不可死用一般方程的求根公式求解；

(2) 在学过韦达定理和二次三项式的因式分解法以后，特别当完全二次方程的系数为整数的时候，也可应用韦达定理的

逆定理(补充的)或因式分解法去解,如果这样做比用求根公式较为便利的话。

4. 驗根方法: 在二次方程的解法中没有引进增根的可能,因此驗根这一步驟在二次方程的解法的理論上說是沒有必要的。但是为了保証計算結果的正确性,在开始的阶段,最好用代入法去驗算;在講完韋达定理的逆定理以后,可用兩根的和与积去驗証;在講完根的性質的討論以后,也可用它作为輔助性的驗証(但这不是充分的驗証)。

(四) 韋达定理的导出和应用:

1. 在实数範圍內,二次方程的韋达定理的成立是以二次方程有兩实数根(相等或不相等)为条件的,因此韋达定理只有在 $b^2 - 4ac \geq 0$ 的条件下才可应用。如果在不滿足这个条件的时候也随便引用韋达定理,这就犯了形式主义的毛病,是絕對不能容許的。例如在 $3x^2 - 2x + 1 = 0$ 中,不注意条件就說它的兩根之和为 $\frac{2}{3}$,兩根之积为 $\frac{1}{3}$,这在目前实数範圍內是沒有意义的。

2. 韋达定理的逆定理在解方程、造方程和驗根各方面都是有很大的应用的,伯拉基斯的“中学数学教学法”第三册“代数教学法”中曾強調指出它的引进的必要性。

3. 韋达定理及其逆定理的一般应用(不包括对解二次方程的直接应用):

正定理的主要应用有三:

(1) 用二次方程的实系数的有理式来表示它的实数根的对称函数(包括有理整式和有理分式);

(2) 为导出二次三項式的因式分解提供理論根据;

(3) 为根的性質的进一步討論提供理論根据。

逆定理的主要应用是: 已知二根之和与积, 求造具有此二

根的二次方程。

4. 韋達定理的逆定理對於解二次方程的主要應用：

(1) 用觀察法解簡化的整系數方程的整數根；

(2) 提供驗算二次方程的根的充分條件。

(五) 二次三項式的根和因式分解：

1. 這部分教材的主要作用在初步建立二次方程的解法和相應的二次三項式的因式分解的相互關係的理論。在這裡，二次三項式的因式分解的定理是從韋達定理導出的，而韋達定理又是從二次方程的求根公式導出的。但是我們也可反過來做，就是先從建立二次三項式的因式分解的定理開始，從而導出韋達定理和二次方程的求根公式。我們以後研究一般方程的理論的時候，就是採用後一種路線的。

2. 二次三項式 ax^2+bx+c ($a \neq 0$) 的因式分解是以二次三項式的韋達定理為基礎的，而二次三項式的韋達定理的成立是以二次三項式的具有實數根為條件的，而二次三項式的有無實數根又是和方程 $ax^2+bx+c=0$ 的有無實數根完全一致的，因此二次三項式 ax^2+bx+c 只有在 $b^2-4ac \geq 0$ 的條件之下才可分解為 $a(x-x_1)(x-x_2)$ ，否則它就是二次的既約式，決不能在實數範圍內分解為兩個一次式（實系數的）的乘積。

3. 二次三項式因式分解定理的逆定理，是用因式分解法解二次方程的必要理論根據。

4. 二次三項式的因式分解定理和逆定理的應用：

正定理的應用：提供分解二次三項式為實系數的一次因式的一般方法。

逆定理的應用：

(1) 已知兩根，用因式的乘積造二次方程；

(2) 在條件許可時，用因式分解法解二次方程。

(六) 根的性質的討論：

1. 判別式 $b^2 - 4ac$ 与根的性質的相互关系：除建立 $b^2 - 4ac$ 大于、等于或小于 0 时則方程有兩個相异实数根、有兩個相等实数根或无实数根的关系以外，为了提供其他应用的理論根据，又引进了这个定理的逆定理，即方程有兩個相异实数根、有兩個相等实数根或无实数根則 $b^2 - 4ac$ 大于、等于或小于 0。例如在求解下面这个問題的时候，就要引用这个逆定理作为理論根据：

要使 $x^2 + 4x - m = 0$ 的兩实数根相等，則 m 应取何值？

2. 利用判別式初步判定根的性質：

(1) 有无实数根；

(2) 如有实数根，相等与否。

3. 利用韋达定理进一步判定根的性質：

(1) 同号根或异号根；

(2) 如果是同号根，是正根或是負根；

(3) 如果是异号根，哪一種的根的絕對值較大；

(4) 其他特殊的情况(包括具有零根的情况)。

4. 应用：

(1) 全面了解解的可能出現的情况；

(2) 提高解数字系数方程的預見性；

(3) 提供解数字系数方程的一种輔助性的驗根方法。

(七) 用二次方程解应用題：

(1) 問題中具有未知量間的一次关系和二次关系(如乘积关系、平方的和差关系)，才可导出二次方程；

(2) 組織教材划分課时要以数量关系的复杂性程度作为重要的标准，但也須同时酌量照顧到問題情况复杂程度和答案解釋的难易。

教材分配

本單元共 29 課時，其中又分四個分單元。

第一個分單元：二次方程的解法，8 課時。

第二個分單元：用二次方程解應用題，8 課時（包括第一、第二兩分單元的復習和檢查各 1 課時）。

第三個分單元：韋達定理和二次三項式的因式分解，8 課時。

第四個分單元：根的性質的討論，5 課時（包括第三、第四分單元的復習和檢查各 1 課時）。

教法建議

（一）概念、定理和法則都稱為理論知識。對於使學生自覺地、牢固地掌握理論知識，談話法是有效的方法之一，下面就是它的一般進行的步驟和方式：

1. 提出實際問題，說明引進新理論的重要性和必要性；
2. 要求學生用正確的數學語言或普通語言敘述這個新理論；
3. 要求學生分析這個理論的組成部分——特別是條件和結論；
4. 要求學生回憶舊有的有關知識來正確地建立這個理論；
5. 要求學生詳細討論理論中所涉及的一般情況和各種特殊情況；
6. 要求學生能自覺地運用這個理論並能隨時聯繫其他新知識創造性地運用這個理論；
7. 要求學生能正確地理解這個理論在一定階段內的理論體系上的地位和作用以及它在建立一定技能和技巧上的地位和

作用。

(二) 技能是理論的自覺的運用，而技巧是技能的自動化。要使學生掌握技能和技巧，一般可採用以下的手段：

1. 在培養技能的階段，要多舉例題示范，注意格式步驟，說明理論根據，並驗證計算結果。如有條件，可舉行課內練習，給予學生以個別指導。課外作業可少布置一些，但必須嚴格要求學生按照示范的例題的形式進行工作。要多用檢查提問和檢查作業等方式進行及時的檢查訂正，不要使錯誤重複和積累。

2. 在培養技巧的階段，要先複習解決某類問題的一切方法，其次要結合各種具體的例題，研究各種最迅速最合理的解法。可以舉行課內練習，對於學生的好的解法，要予以公開的介紹和表揚。課外作業要多布置一些，題目的性質要稍多差異，但不必要求寫出理論根據，而步驟也可酌量簡化一些。

3. 關於培養布列方程的技能的方法，課時計劃中已有概括性的建議，這裡只補充一點對於讀題的要求。為了簡明扼要地掌握應用題的具體內容，開始的階段，最好先按讀題的結果，用數學語言把各個未知量以及未知量與已知量的關係用表格的形式書寫出來，然後在這樣的基礎上進入正式解題的工作。

(三) 要啟發和指導學生積極思維，一般可採用下面的手段：

1. 要善於提出問題使學生感到一定的困難而同時又有克服這個困難的迫切要求，以引起積極的思維；

2. 要善於結合當前的問題，喚起學生回憶有關的舊有知識，為積極思考當前的問題提供必要的基礎；

3. 要善於應用由特殊到一般、由簡到繁、由易到難的原則，逐步提出問題，力求符合思維發展的一般規律；

4. 對每個論斷、每個步驟，嚴格要求提出理論的根據；

5. 要求動員一切知識使解題工作迅速而合理；

6. 要求能創造性地运用知識；
7. 要求对一般情况能进行分类,作出全面性的討論；
8. 要求对个别事例能进行綜合,作出概括性的結論；
9. 要求能正确地有条理地使用数学語言和普通語言。

(四) 其他：

1. 为了减少学生記憶上的負擔而同时又保證理論上的系統性,可要求学生只熟記一般二次方程的求根公式。

2. 学生对于正逆定理的區別和联系往往不够注意,因此在应用上常常有混淆不清的情况,在教学中应予以密切注意。

3. 学生对于根的性質的討論一部分,由于初次碰到,一定会感到相当的困难,应予以耐心反复的教导。

4. 关于十字法(本質上就是因式分解法)在解二次方程上的地位和作用,在教材分析中已有說明,片面強調十字法的作用,固然是不正确的,但是絕對加以廢除也是不合理的。

第 1 課

課題 二次方程的意义 (§30)

教學目的

- (1) 使學生了解二次方程是从解实际問題中产生的。
- (2) 使學生了解二次方程的一般形式和分类。

教學过程

(一) 引言：

1. 在初中阶段我們学习了有理数的加、减、乘(包含正整指数的乘方)、除四种运算,并且在这些基础上系統地学习了有理系数的一元一次方程解法。到初三下最后阶段学习了数字开平方,但是还未学到无理数,因此仍不能有系統地学习二次方程一般的解法,虽然在那时也初步学过一点不完全二次方程的解法。

2. 在高一阶段我們已从有理数扩大为实数,并且对于乘方和开方的运算,已作了比較深刻的研究,我們就將在这个基础上,对初三下最后阶段所接触到的二次方程的問題,在实数範圍內进行比較有系統的研究(板書本單元的总課題).本課时先从認識二次方程的意义开始(板書本課时的課題).

(二) 講解新課:

1. 現在有兩個应用問題,請同学用一个未知文字 x 列出方程来:

(1) 見課本 63 頁例題.

(2) 航空模型小組需購矩形薄板一块,它的面积是 169 平方分米,且長为寬的 4 倍,求这块薄板的長和寬各多少?

(可用小黑板先写好這兩個題目,指定学生二人各板演一題,要求列出方程,但不必解出.)

解 (1) 設水田寬 x 米,則水田長 $(x+10)$ 米.

依題意得 $x(x+10)=1200$.

展开、移項、合并,得 $x^2+10x-1200=0$.

(2) 設矩形寬 x 分米,則矩形長 $4x$ 分米.

依題意得 $4x \cdot x=169$.

即 $4x^2-169=0$.

要想解决这类应用問題,首先就应学会解这一类的方程,要想解这类方程,首先就应从認識这类方程的一般形式和它的分类着手.

2. 这类方程中都只含有一个未知数(即 x),而且未知数出現的最高次数都是二次,象这样的方程叫做一元二次方程.

任何一元二次方程經過适当变形都可化为 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的形式.

例如在(1)中 $a=1$, $b=10$, $c=-1200$.

在(2)中 $a=4, b=0, c=-169$.

$ax^2+bx+c=0$ 这种形式就叫二次方程的一般形式,或标准式. ax^2 是二次項, bx 是一次項, c 是常数項, 而 a, b, c 又分别称为各項的系数.

二次項系数 $a \neq 0$, 否則不是二次方程, 故写出一般形式时必须在后面注上 ($a \neq 0$) 的条件. 但一次項系数 b 及常数項 c 則可以是任何实数, 也可以是 0. 在(1)中 b, c 都不是 0, 而在(2)中 b 是 0, c 不是 0, b 和 c 都不是 0 的二次方程称为“完全二次方程”, 例如(1). 如 b 和 c 中有一个是 0, 例如(2), 或两个都是 0, 例如 $ax^2=0$, 这样的二次方程都称为“不完全二次方程”. 一般二次方程的分类如下:

$$\begin{array}{l} \text{一般二次方程} \\ ax^2+bx+c=0 \\ (a \neq 0) \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{完全二次方程} \cdots \cdots ax^2+bx+c=0 \quad (b \neq 0, c \neq 0) \\ \text{不完全二次方程} \left\{ \begin{array}{l} ax^2+c=0 \quad (b=0, c \neq 0) \\ ax^2=0 \quad (b=0, c=0) \\ ax^2+bx=0 \quad (b \neq 0, c=0) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

3. 在学习本章时, 应时时刻刻想到, 在方程中所表示的已知数是实数, 而根的可取值的范围也是实数, 例如在研究二次方程的一般形式时, b, c 的取值范围是任意实数, 而系数 a 的取值范围是 0 以外的任意实数. 解二次方程則是要求出它的所有实数根, 或者判定它无实数根.

(三) 布置作业: 习题十一第 1 题全做.

注意 为了使四个式子不全部是“完全二次方程”, 建議把(1)、(3)两个小題改为:

(1) 某数与 8 的差乘以某数与 30 的差得 240, 求某数.

(3) 某校有兩块农业实验园地, 一块是正方形的, 另一块是長方形的. 長方形园地的面积是 286 平方米, 它的長比正方形园

地边長的2倍小2米,它的寬比正方形園地的边長大1米,求正方形園地的边長。

第 2 課

課題 不完全二次方程 $ax^2+c=0$ 及 $ax^2=0$ 的解法
〔§ 31(1)、(3)〕

教学目的

在复习初三已有知識的基础上使学生能应用方程的性質和平方根的意义导出 $ax^2+c=0$ 及 $ax^2=0$ 的一般有解、无解的条件,并能进一步熟練地掌握其具体的运用。

教学过程

(一) 复习提問:

(1) 什么叫一元二次方程?它的一般形式是怎样的?依照作业中习题十一第1題的(4)分別說明所列方程各項的名称和各項的系数。

(2) 不完全二次方程与完全二次方程有什么区别?不完全二次方程可以有哪几种不同的形式?举例分別說明。

(二) 引入新課: 从本課时起就要开始学习二次方程的解法。关于不完全二次方程的各种类型的解法,我們在初三阶段曾加以初步的学习,但那时系数和根的取值范围只限于有理数,而現在則就要就实数范围来加以一般的研究。本課时先从学习头两种类型 $ax^2+c=0$ 及 $ax^2=0$ 开始。

(三) 講解新課:

1. 解 $ax^2+c=0$ 。

現在讓我們首先复习关于 $ax^2+c=0$ 这一类型的数字系数方程的解法。可由学生三人分別板演以下三个例题,其余学生在練習簿上做。