数学分析专题选讲

SHUXUE FENXI ZHUANTI XUANJIANG

编著 贾 高

上海交通大學出版社

数学分析专题选讲

贾　高　编著

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书对数学分析的主要基本概念、重要思想和解题方法进行了归纳和总结，重点是放在解题技巧和方法总结上，读者在知晓本书提出的一系列新颖有效的方法后，可以开阔思维空间，提高解题能力，增强学习兴趣。此外，每章都配有一定量的习题，这些题目多数是研究生入学考题，并附有提示或参考解法。

本书可作为学完“数学分析”课程后进一步开设“数学分析专题”的教材或参考书；对于报考硕士研究生的学生来说，本书也是考前复习时有价值的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析专题选讲/贾高编著．—上海：上海交通大学出版社，2009

ISBN 978-7-313-05916-1

Ⅰ．数…　Ⅱ．贾…　Ⅲ．数学分析—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 126581 号

数学分析专题选讲

贾　高　编著

上海交通大学出版社出版发行

（上海市番禺路 951 号　邮政编码 200030）

电话：64071208　出版人：韩建民

上海交大印务有限公司印刷　全国新华书店经销

开本：787mm×960mm　1/16　印张：9　字数：167 千字

2009 年 9 月第 1 版　2009 年 9 月第 1 次印刷

印数：1～2 030

ISBN 978-7-313-05916-1/O　定价：19.00 元

前　言

“数学分析”是数学与应用数学、信息与计算科学、统计学等理科专业本科生的最重要的基础课程之一，也是相关专业研究生入学的必考课程之一。该课程具有课时长、内容多、理论性强的特点。通过该课程的学习，能使学生对数学分析的基本概念、基本理论和基本方法有较系统的了解，为培养学生良好的数学修养、学习和研究现代数学的相关理论奠定了重要基础。

国内多数高校的数学与应用数学等专业开设了“数学分析专题”课程，但尚未见到这方面的教材或教学参考书，本书旨在对这方面的工作做一尝试。

作者根据多年从事数学分析和数学分析专题教学实践的经验，重点对于数学分析中的难点内容、解题方法等进行了归纳和总结，指出了常用解题方法、技巧和经验。因此，本书对于本科学生的学习或复习考研以及从事该课程教学的教师都有一定的参考价值。

本书章节的安排打破传统的逻辑顺序，根据知识的联系进行组织。例如，第 1 章总结了求极限的基本方法、洛必达法则、Stolz 定理等；第 2 章把导数和偏导数放在一起，有利于学生掌握它们的联系和区别，对高阶导数和高阶微分的计算方法也进行了一定的总结和阐述；为了拓宽学生的知识面，第 9 章介绍了常用不等式，第 10 章介绍了凸函数的性质及应用，这些内容都没有超过本科的教学要求，而是对过去学过知识的提炼和应用。

本书的例题是精心选择的,有一部分是作者在教学中编写的例题或教研论文中的结果,例题求解力求方法的多样性。在每章结束,选择了一定数量和一定难度的习题,对于较难的题目给出了较为详细的提示或参考解法。

本书编写过程中,得到张卫国教授、贾梅副教授、叶亚盛副教授等同志的支持和帮助,得到上海市重点学科项目(系统分析与集成,S30501)和上海市重点课程建设项目(数学分析)的经费资助。在此,编者对他们表示衷心感谢。

作者虽然尽了最大努力,但因水平有限,书中差错在所难免,欢迎读者提出批评意见或建议。

编　者

2009 年 7 月

目 录

1 极限与连续

主要知识点

- 极限的定义；
- 极限的基本性质；
- 极限存在性的判别；
- 极限的计算.

1.1 相关概念

1.1.1 基本极限

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n = A \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\, N > 0$,使得当 $n > N$ 时,有 $|x_n - A| < \varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x) = A \Leftrightarrow$ 对一切 $x_n \to x_0(x_n \neq x_0)$,必有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n) = A$.

$\Leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\,\delta > 0$,使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,成立 $|f - A| < \varepsilon$.

$\Leftrightarrow f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0)$.

$\Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x) = 0$.

例 1.1 求证 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在.

证 取 $x_n = n\pi$, $x_n' = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n' = 1$,而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n \neq \lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n'$,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在.

1.1.2 二重极限

$\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,y_0)} f(x,\ y)=A \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, \delta>0$,使得当 $0<|PP_0|<\delta$ 时,成立 $|f(P)-A|<\varepsilon$,其中 P 表示点$(x,\ y)$,P_0 表示点$(x_0,\ y_0)$.

例 1.2 求证 $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$.

证 因为当 $xy\neq 0$ 时,成立 $x^2+y^2\geqslant 2|xy|$,故

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|=\frac{x^2|y|}{x^2+y^2}\leqslant\frac{x^2|y|}{2|xy|}=\frac{1}{2}|x|,$$

又当 $x=0$,而 $y\neq 0$ 或 $y=0$,而 $x\neq 0$,则有 $\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$,故

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0.$$

1.1.3 累次极限

设 $f(x,\ y)$ 是 $D=\{(x,\ y)\mid 0<|x-x_0|<a,\ 0<|y-y_0|<b\}$ 上的函数,对任意 $y\in \mathring{U}(y_0,\ b)$ 有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,\ y)=\varphi(y)$,且 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$,我们就说 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,\ y)=A$;另一方面,若对任意 $x\in \mathring{U}(x_0,\ a)$ 有 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,\ y)=\psi(x)$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=B$,我们就说 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,\ y)=B$.

注 1.1 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,\ y)=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,\ y)=A \not\Rightarrow \lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} f(x,\ y)=A$.

例 1.3 设 $f(x,\ y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,\ y)\neq(0,\ 0)$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,\ y)=0$,且 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,\ y)=0$,但 $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x,\ y)$ 不存在.

注 1.2 $\lim\limits_{(x,\ y)\to(x_0,\ y_0)} f(x,\ y)=A \not\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,\ y)$, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,\ y)$ 存在.

例 1.4 设 $f(x,\ y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}$, $(x,\ y)\neq(0,\ 0)$,则 $\lim\limits_{(x,\ y)\to(0,\ 0)} f(x,\ y)=0$,但 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,\ y)$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,\ y)$ 均不存在.

1.2 运算法则

(1) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在，则成立：

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}(\lim_{n\to\infty}b_n\neq 0).$$

(2) 若极限存在，则极限值唯一.

(3) 若序列$\{a_n\}$极限存在，则序列$\{a_n\}$有界.

(4) 若存在正数 N_0，使得当 $n\geqslant N_0$ 时有 $a_n\geqslant b_n$，则有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.（保不等式性）

注 1.3 即使有 $a_n>b_n$，也只能得到$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}b_n$，而不一定有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n>\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

例如 $a_n=\dfrac{2}{n}$，$b_n=\dfrac{1}{n}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

(5) 若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n>\lim\limits_{n\to\infty}b_n$，$\exists\, N_0>0$，当 $n>N_0$ 时，总有 $a_n>b_n$.

(6) 若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 点连续，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(\lim\limits_{n\to\infty}x_n)=f(x_0)$.

注 1.4 对于函数极限$\lim\limits_{x\to a}f(x)$或二重极限$\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)}f(x,y)$都可得到类似的结论.

(7) 重要极限：

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e},\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e},\ \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

例 1.5 已知$\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-ax-b)=0$，求常数 a 和 b.

解 因$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-a-\dfrac{b}{x}\right]x=0$,

$$\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+a+\frac{b}{x}\right]=0,\Rightarrow a=-1.$$

进一步

$$b=\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=-\frac{1}{2}.$$

例 1.6 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

例 1.7 求$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right)$.

解 因为当$n=2k$时，$1-2+3-\cdots+(-1)^{2k-1}2k=-k$,此时$u_{2k}=-\frac{1}{2}$；当$n=2k-1$时，$1-2+3-\cdots+(-1)^{2k-2}(2k-1)=k$,此时$u_{2k-1}=\frac{k}{2k-1}$. 故极限$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$不存在.

1.3 极限存在的判别准则

(1) 单调有界数列(函数)必有极限.

(2) 夹逼法则：若$\exists N_0>0$,当$n>N_0$时,$a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$($a$为有限值或者$\pm\infty$,但是不可以是$\infty$)，则有$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$.

(3) Cauchy 收敛准则：$\{x_n\}$收敛$\Leftrightarrow\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\m\to\infty}}|x_n-x_m|=0$.

例 1.8 已知$x_n=\frac{a^n}{n!}(a\neq0)$,求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 因为$|x_{n+1}|=\frac{|a|}{n+1}|x_n|$,可见在$n>|a|-1$时，成立$|x_{n+1}|\leqslant|x_n|$,

$\{|x_n|\}$ 单调下降且有下界($|x_n|\geqslant 0$)，故极限 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|$ 存在且有限. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=A$，再在递推式 $|x_{n+1}|=\dfrac{|a|}{n+1}|x_n|$ 两边令 $n\to\infty$，可得 $A=0$.

例 1.9 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}\right)$.

解 方法 1

因为 $I_n^2=\left(\dfrac{1}{2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}\right)^2=\dfrac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n-1)\cdot(2n-1)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdot\cdots\cdot(2n)\cdot(2n)}$

$$\Rightarrow\frac{1}{4n}<I_n^2<\frac{2n-1}{4n^2}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}I_n=0.$$

方法 2

因为
$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}\sin^{2n}x\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,\mathrm{d}x,$$
而
$$0<\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}\sin^{2n}x\,\mathrm{d}x<\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\sin^{2n}\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\to 0(n\to\infty),$$
和
$$0<\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,\mathrm{d}x<\delta,$$
故
$$\lim_{n\to\infty}I_n=0.$$

例 1.10 求 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

解 因为
$$I=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n}{n}-\ln n\right)},$$
而
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n}{n}-\ln n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n}\right)$$
$$=\int_0^1\ln x\,\mathrm{d}x=-1,$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

1.4 极限计算方法

1.4.1 递推法

例 1.11 设 $x_n=\frac{5}{1}\cdot\frac{6}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n+4}{2n-1}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 因为 $x_{n+1}=\frac{n+5}{2n+1}x_n$，而当 $n>5$ 时，有 $\frac{n+5}{2n+1}<\frac{10}{11}$，即 $x_{n+1}<x_n$，且 $x_n<\left(\frac{10}{11}\right)^{n-5}x_1x_2\cdots x_5$，又因为 $x_n>0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

例 1.12 设 $x_{n+1}=\sin x_n$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 不妨设 $\sin x_1>0$，则有 $x_n\in(0,1]\subset\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$n=2,3,\cdots$

因为当 $0<x<\frac{\pi}{2}$，有 $\sin x<x\Rightarrow\sin x_n<x_n\Rightarrow\{x_{n+1}\}$ 单调递减，又 $0\leqslant x_n\leqslant 1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$，则有 $l=\sin l(l\geqslant 0)$. 若 $l>0$，则必有 $l>\sin l$，所以 $l=0$.

1.4.2 L'Hospital 法则与 Taylor 公式

(1) L'Hospital 法则：若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 是"$\frac{0}{0}$"型或"$\frac{\infty}{\infty}$"型不定式，而 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$(或 ∞)，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$(或 ∞).

注 1.5 对于 $x\to\pm\infty$ 或 $x\to\infty$ 的情形，上述结论仍然成立.

(2) 几个重要函数的 Taylor 公式：

① $\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$；

② $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o(x^{2m})$；

③ $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2m+1})$;

④ $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$;

⑤ $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$.

例 1.13 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-1)}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\left(-2\sin^2\frac{x}{2}\right)}{x^3\cos x}=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3\cos x}=-\frac{1}{2}$.

例 1.14 求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{3x^2}=-\frac{1}{3}$.

例 1.15 求$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(\sqrt[n]{n}-1)}{\ln n}$.

解 **方法 1** 因为

$$\sqrt[n]{n}=e^{\frac{1}{n}\ln n}=1+\frac{1}{n}\ln n+o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt[n]{n}-1)}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\left[1+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right]=1.$$

方法 2 利用 $e^x-1\sim x(x\to 0)$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt[n]{n}-1)}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}\ln n}-1}{\frac{1}{n}\ln n}=1.$$

例 1.16 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x^\alpha}}}-\sqrt{x}\right)$, $(0<\alpha<2)$.

解 由于$0<\alpha<2$,故当$x\to\infty$时,有

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x^\alpha}}}=\sqrt{x}\left[1+\left(\frac{1}{x}+x^{\frac{\alpha}{2}-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{x}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{1+x^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1}}\right]+o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \sqrt{x}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x^{\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1}+o(x^{\alpha-2})\right)+o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

所以，当 $0<\alpha<2$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x^{\alpha}}}}-\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}$.

1.4.3 Stolz 定理

定理 若 y_n 单调递增，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=l$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=l$.

例 1.17 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^{\alpha-1}+\cdots+n^{\alpha-1}}{n^{\alpha}}\ (\alpha>0)$.

解 方法 1 利用 Stolz 定理

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\alpha-1}}{n^{\alpha}-(n-1)^{\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n}}{e^{\alpha\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n}}{\alpha\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n}}{-\alpha\cdot\frac{1}{n}}=\frac{1}{\alpha}.$$

方法 2 利用定积分定义

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^{\alpha-1}+\cdots+n^{\alpha-1}}{n^{\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1}=\int_0^1 x^{\alpha-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}.$$

例 1.18 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}$.

解 方法 1 因为 $\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\sim\frac{1}{n-1}$，$n\to\infty$，利用 Stolz 定理，便有

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\ln n-\ln(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1.$$

方法 2 利用公式 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln n+o(n)(n\to\infty)$

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n+o(n)}{\ln n}=1.$$

例 1.19 已知 $x_n=\sin x_{n-1}$, $n=1, 2, \cdots$, $x_0\in(0, \pi)$,求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}x_n=1$.

证 事实上,$\sqrt{\frac{n}{3}}x_n\to 1(n\to\infty)\Leftrightarrow\frac{1}{nx_n^2}\to\frac{1}{3}(n\to\infty)$.

因为 $x_n\to 0(n\to\infty)$,利用 Stolz 定理,有

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_n^2}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}{1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sin^2 x_n}-\frac{1}{x_n^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{3}.$$

即成立 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}x_n=1$.

例 1.20 计算二重级数 $\sum\limits_{i, j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}$.

解 因为

$$S_{m, n}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}=\int_0^1\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}x^{i+j-1}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 x\sum_{i=0}^{m-1}(-x)^i\cdot\sum_{j=0}^{n-1}(-x)^j\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 x\frac{1-(-x)^m}{1+x}\cdot\frac{1-(-x)^n}{1+x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}[x+(-1)^{m+1}x^{m+1}+(-1)^{n+1}x^{n+1}+(-1)^{m+n}x^{m+n+1}]\mathrm{d}x,$$

又
$$\int_0^1\frac{x^k}{(1+x)^2}\mathrm{d}x<\int_0^1 x^k\mathrm{d}x=\frac{1}{1+k}\to 0(k\to\infty),$$