国家理科基地教材

微积分进阶

楼红卫　编

科学出版社
www.sciencep.com

国家理科基地教材

微积分进阶

楼红卫　编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是作者多年在复旦大学讲授“数学分析原理”课程的讲义基础上编写而成的. 全书共 7 章, 内容包括: 分析基础、实数系基本定理, 极限与连续, 微分, 积分, 级数, 多元函数微积分, 反常积分和含参变量积分. 教材注重思想性, 在内容上尽量做到融会贯通, 突出理论的严密性, 同时每章都精选了例题与习题.

本书可以与通常的高等数学教材结合成为数学类专业的数学分析教材, 也可以作为数学分析的复习用书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分进阶/楼红卫编. —北京: 科学出版社, 2009
国家理科基地教材
ISBN 978-7-03-025105-3
Ⅰ. 微… Ⅱ. 楼… Ⅲ. 微积分-高等学校-教材 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 130396 号

责任编辑: 姚莉丽 唐保军 / 责任校对: 刘小梅
责任印制: 张克忠 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 8 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)
2009 年 8 月第一次印刷 印张: 13 1/4
印数: 1—3 000 字数: 257 000

定价: 24.00 元

前言

数学分析作为大学数学类专业的一门主要基础课，受到了人们广泛的重视. 近年来，国内对数学分析的教学提出了一些新的要求. 很多人需要在学完高等数学的基础上进一步学习数学分析. 先修学高等数学类课程，再修学 (数学) 分析基础类课程一直是数学类专业学生学习数学分析的途径之一. 但在国内，由于在相当长的一段时间内，学生初入大学时就确定了专业，因此，在数学分析课程的教学上普遍采用了直接讲授数学分析的方式. 如果学生初入大学时专业具有不确定性，那么这一模式就需要加以调整. 复旦大学自施行转专业政策以来，每年都有相当数量的学生从其他专业转入数学类专业学习. 对于这些同学，开设一门高等数学后续的数学分析课程成为必要.

撰写本书主要是为学过高等数学的学生提供一本弥补高等数学和数学分析内容或要求上差距的教材. 全书内容主要为在高等数学中没有涉及、深度不够或个别我们认为需要强调的数学分析知识. 本书可以与通常的高等数学教材结合成为数学类专业的数学分析教材，也可以作为数学分析的复习用书.

本书在编排上有以下特点：

(1) 内容上尽量做到融会贯通. 由于有高等数学做基础，读者对课程的大部分内容已有所接触，因此，我们在讨论各类问题时基本上可以不受方法的限制. 例如，在讨论极限问题时，我们既可以利用微分知识，又可以利用积分知识，而不必等到学完微分或积分的相应章节再来介绍有关思想. 这也是利用“先高等数学，后分析基础”这一模式学习数学分析的一个优点.

(2) 突出了理论的严密性. 这是由编写本书的目的决定的. 因为高等数学课程和数学分析课程的主要区别就在这里. “先高等数学，后分析基础”的缺点之一是学生在高等数学的学习中可能会形成一些错误的观点，这些观点一旦形成，纠正起来比较困难. 因此，本书有意识地对某些概念和定理进行了正反两方面的讨论.

(3) 内容上较为详细地介绍了上下极限、Stolz 公式、关于导函数具有介值性质的 Darboux 定理、函数的光滑逼近、Riemann 引理的推广、一些常用的积分不等式和关于积分号下求极限的 Arzelà定理. 在一些处理手法上，较多地使用了上、下极限和利用函数光滑逼近的思想，这与通常的数学分析教材有所不同，其中函数光滑逼近部分对于学生来说有一定难度.

(4) 习题的编排不仅在于帮助学生掌握所学知识，还努力引导学生去做进一步的思考，其中一些习题是开放式的. 这体现了对学生发散性思维的训练以及研究能

力的初步培养.

完整地讲授此书大约需要 72 学时, 课时允许的话, 可另行安排 36 学时的习题课. 有一些比较简单且已在高等数学中讲清楚的概念没有写入本书. 当与这些概念相应的一些习题需要编入时, 可能会与它们所编入的章节内容并不直接相关.

本书已在复旦大学试用多年, 它的成稿离不开广大教师的帮助和与学生的互动. 特别是陈纪修教授、邱维元教授、金路教授和严金海副教授对本书的内容提出了许多具体而有益的建议. 尽管数学分析是一门成熟的课程, 但编者还是在本课程的教学过程中对教学相长有了更深刻的体会. 书中的例题、习题除了取材于不同的教材、习题集、研究生入学试题和适当的自编外, 还来自于与同事、学生的讨论. 在此, 谨向为本书的成稿和完善提供过帮助的所有师生表示衷心的感谢.

限于水平和精力, 书中难免有不足之处, 望广大读者不吝指正.

编　者

2009 年 3 月 31 日

目录

绪 论

在国内大多数高等院校, 微积分都是一门理工科学生必修的课程. 对于数学类专业, 微积分的教学是通过讲授名为数学分析的课程来完成的, 而对于非数学类专业, 通常通过讲授名为高等数学或微积分的课程来完成.

相对来说, 高等数学或微积分课程主要以了解、应用相应的知识为主, 通俗地讲就是对大多数有难度的概念、定理的要求只是知其然, 而不需要知其所以然, 应用上也往往以会算为目标. 近年来, 随着国内大学教学体制的转变, 相当一部分学生在大学二年级才转入数学专业学习①. 这使得在微积分基本知识基础上开设一门数学分析课程并撰写相应的教材成为必要. 本书对照了我国现行高等数学课程的一些主要教材, 着重在数学分析课程内容范围内, 介绍了高等数学课程中未涉及或涉及不够深刻部分的内容, 而且重心更多地在于证明而不是计算②.

应该说, 国内的高等数学课程对理论部分是有一定要求的. 因此, 在某些知识点上, 有时候不容易区分数学分析和高等数学的要求. 例如, 单调有界定理在高等数学课程和数学分析课程中都会讲到, 都会在一定程度上给予理论上的要求, 对一部分学生来讲, 似乎两者区别不大. 但事实上, 在数学分析中, 会要求将单调有界定理应用到更抽象的问题中去.

本书的部分内容对于学习了数学分析课程的数学类专业的同学来讲, 也会有一定帮助. 这主要体现在知识的融会贯通、以点带面和知识的扩充方面. 尽管这部分学生在数学分析方面已经受到了较好的训练, 但由于教学进度、顺序的限制, 许多有效的分析工具在数学分析课程中没有很好地加以介绍. 例如, 上、下极限, 关于导函数介值性质的 Darboux 定理, 函数的光滑化等内容. 又如, 在一般数学分析教材中, 一致收敛和一致连续等概念常采用 ε-δ 语言描述, 对此, 即使学习能力较强的学生也不容易掌握. 本书更多地利用上确界来处理这两个概念, 使它们更容易被掌握③.

严密性 通常认为, 数学证明是严密的. 数学分析之区别于高等数学, 重要的一条就在于严密性. 那么, 本书将会提供严密的数学证明吗? 其回答是否定的. 尽管

---

① 这包括从非数学类专业转到数学类专业的那部分学生. 与之相反, 也出现了一些非数学类专业从大学一年级就开始学习数学分析的现象.

② 我们并不完全回避计算, 因为数学分析中的有些计算需要附带证明, 而有些证明又可以用计算的方法给出.

③ 许多教材也都提到了利用上确界来定义一致收敛性和一致连续性. 但由于缺乏运用, 多数学生对此印象不深. 另外, 需要指出, 掌握用 ε-δ 语言描述这类概念也是必要的.

在一开始指出这一点, 既不容易理解, 也有可能影响一部分读者的学习积极性. 但是, 我们觉得还是有必要指出, 通常的数学证明都称不上是绝对严密的. 借用英国数学家哈代的话: "严格说来, 没有所谓证明这个东西, 归根结底, 我们只能指指点点."

但这决不意味着我们将放弃严密性. 与其他非数学学科不同, 数学证明的不严密性并不在于它不合逻辑, 而只是体现在事实上很少有人会严格按照逻辑的三段论来进行数学证明. 人们相信, 如果需要, 一个被认为正确的数学证明是可以严密化的.

某种意义上, 把握一个证明应该写到何种程度的严密, 是一个数学工作者必备的专业修养. 通过本书的学习, 我们期望读者能够领会到什么是数学家们所能接受的严密性. 书写一个证明的目标是有效地让读者信服整个推理过程. 因此, 书写的严密程度随书写者和读者的变化而略有不同.

直觉和联想　除了逻辑, 数学还需要一些其他的东西. 要得到新的结果, 第一步是要提出这样的命题, 而这通常不是靠逻辑推理就可以得到的. 这需要数学上的一种直觉, 需要联想. 事实上, 即使是证明本身, 也往往需要直觉的引导. 与逻辑能力一样, 数学的直觉也需要通过学习加以培养.

技巧　目前有一种倾向, 认为数学教学不应该太注重技巧训练. 但是, 学习数学分析不讲技巧是不对的. 只是我们需要对技巧做一些界定. 分析中有许多常用的技巧具有普遍性, 且抓住问题的本质, 应该特别加以训练. 但有的技巧是非本质的, 这样的技巧不应该花太多的精力去追求. 另外, 数学上也有许多事例, 人们对于特定的问题给出一种非常具有技巧性的漂亮的解决方法, 且利用这种技巧得到的结果可以引出一些非常有意义的结果, 甚至因此形成一门学科. 但由于这种技巧性往往过于特殊, 缺乏一般性, 因此它不是本书所追求的.

例 0.1　设 $a, b > 0$ 满足 $a + 2b = 1$. 试求 $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ 的最小值.

解法 I　考虑

$$(a+2b)\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\Big) = 3 + \frac{a}{b} + \frac{2b}{a}$$

$$\geqslant 3 + 2\sqrt{\frac{a}{b}\frac{2b}{a}} = 3 + 2\sqrt{2}.$$

从而最小值为 $3+2\sqrt{2}$, 且对应的 a, b 为 $a = \sqrt{2} - 1$, $b = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

在这个解法中, 对于表达式 $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ 乘上 $a + 2b$ 无疑是一种技巧. 我们也可以找到使用这种技巧的理由. 尽管如此, 我们还是宁愿采用下面这种不那么技巧的方法.

解法 II　易见

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{1-2b}+\frac{1}{b}.$$

记 $x=\frac{1}{b}$, 则 $x>2$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}&=\frac{x}{x-2}+x\\&=3+\frac{2}{x-2}+(x-2)\geqslant 3+2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

从而最小值为 $3+2\sqrt{2}$, 且对应的 x 为 $2+\sqrt{2}$, 即 $a=\sqrt{2}-1, b=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

相对于解法 I, 解法 II 的优点在于它在化简原问题的同时, 使我们更接近于这样一种境地: 要么可以进一步得到原问题的结论, 要么可以发现原问题是错误的.

学习中的要求　学生在学习中, 对自己提出适当的要求是非常重要的. 而教师也应该对学生提出恰当的要求, 特别是持续地对学生提出略高于其已有水平的任务.

对于学生来讲, 通过练习来检验、提高自己的能力是一个必要且有效的途径. 在这个过程中, 除了要努力争取独立地解决问题外, 还要注意不要满足于眼下已解决的特殊问题. 而应尽量去寻求问题的本质, 并推广结论.

例 0.2　设 $a_1=0, a_2=2, a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+1$. 证明当 n 为素数时, $n|a_n$.

证明　记 $b_k=a_k+1$. 则

$$b_1=1,\quad b_2=3,\quad b_k=b_{k-1}+b_{k-2}.$$

要证当 n 为素数时, $n|(b_n-1)$. 显然当 $n=2$ 时, 结论成立.

证法 I　可以求得 b_n 的表达式, 从而证明结论. 可以解得

$$b_n=\Big(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\Big)^n+\Big(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}\Big)^n.$$

现设 n 为大于 2 的素数, 则利用①

$$2^n=2\ (\mathrm{mod}\ n),$$

以及

$$n|\mathrm{C}_n^k,\quad \forall\ k=1,2,\cdots,n-1,$$

可得

$$2^n a_n=\big(\sqrt{5}+1\big)^n+\big(-\sqrt{5}+1\big)^n-2^n$$

① $p=q\ (\mathrm{mod}\ n)$ 表示 n 整除 $p-q$.

$$=\sum_{j=0}^{n} C_n^j(\sqrt{5})^j+\sum_{j=0}^{n} C_n^j(-\sqrt{5})^j-2^n$$

$$=2\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2k}(\sqrt{5})^{2k}-2^n$$

$$=2\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2k}5^k-(2^n-2)=0(\mathrm{mod}\ n).$$

即当 n 是奇素数时, $n|2^n a_n$. 由此立即可得结论.

如果仅仅满足于上面的证明, 那么我们只是证明了这个结论, 但没有更深刻的理解. 下面的证明, 看起来会比已给的证明繁琐, 但是它在证明过程中保留了更多的信息, 从而使我们更容易看到本题的关键之处.

证法 II 记

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

有

$$\begin{pmatrix}b_n\\ b_{n-1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}b_{n-1}\\ b_{n-2}\end{pmatrix}.$$

从而补充定义 $b_0=b_2-b_1=2,\ b_{-1}=b_1-b_0=-1$, 有

$$b_n=(1\quad 0)\begin{pmatrix}b_n\\ b_{n-1}\end{pmatrix}=(1\quad 0)A^n\begin{pmatrix}b_0\\ b_{-1}\end{pmatrix}.$$

考虑

$$B=2A-I=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix},$$

则当 n 为奇素数时,

$$2^n(b_n-1)=(1\quad 0)(B+I)^n\begin{pmatrix}b_0\\ b_{-1}\end{pmatrix}-2^n$$

$$=(1\quad 0)(B^n+I)\begin{pmatrix}b_0\\ b_{-1}\end{pmatrix}-2^n$$

$$=(1\quad 0)B^n\begin{pmatrix}b_0\\ b_{-1}\end{pmatrix}+b_0-2^n\quad(\mathrm{mod}\ n).$$

可以验证

$$(1\quad 0)B^n\begin{pmatrix}b_0\\ b_{-1}\end{pmatrix}=0,\quad \forall\, n\geqslant 1. \tag{0.1}$$

从而

$$2^n(b_n-1)=2-2^n=0\ (\mathrm{mod}\ n).$$

这就证明了结论. □

推广　通常, 能否对所做练习加以推广是对该练习的本质是否把握的一个指标. 根据证法 II, 我们可以容易地把本题加以推广.

可以看到, 题中结论成立的关键在于对于奇素数 n, 等式 (0.1) 以及 $b_0-2^n=0\ (\mathrm{mod}\ n)$ 成立. 注意到 B 的特征根是一对相反数, 不难看到 (0.1) 对所有正奇数成立当且仅当 $n=1$ 时它成立. 事实上, 此时设 λ 为 B 的一个特征值, 则 $B^2=\lambda^2 I$, 从而

$$(1\quad 0)\,B^{2k+1}\begin{pmatrix}b_0\\ b_{-1}\end{pmatrix}=\lambda^{2k}\,(1\quad 0)\,B\begin{pmatrix}b_0\\ b_{-1}\end{pmatrix}.$$

这样, 类似地可以看到, 对于满足递推公式 (α,β 是整数)

$$b_{n+1}=b_n+\beta b_{n-1}$$

的一列整数, 要使得 n 为奇素数时, $n|b_n-\alpha$ 成立, 只要 $b_0-2^n\alpha=0\ (\mathrm{mod}\ n)$ 以及

$$(1\quad 0)\begin{pmatrix}1 & 2\beta\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_0\\ b_{-1}\end{pmatrix}=0$$

成立. 为此, 只要成立以下关系式:

$$b_0=2\alpha,\quad \alpha+\beta b_{-1}=0.$$

取

$$\alpha=3,\quad \beta=3,\quad b_{-1}=-1,$$

则相应的 b_n 满足: 当 n 为奇素数时, $n|b_n-3$. 注意到 $b_0=6, b_1=3$ 都含有因子 3, 事实上, 可以令 $b_n=3c_n$, 定义

$$c_0=2,\quad c_1=1,\quad c_n=c_{n-1}+3c_{n-2},$$

则当 n 为大于 3 的素数时,

$$n|b_n-3=3(c_n-1),$$

从而 $n|c_n-1$.

直接验证 $n=2,3$ 的情形, 得到当 n 为素数时, 总有 $n|c_n-1$.

按此思路, 可以构造出一大堆类似的例子. 进一步, 还使我们有可能彻底解决与之相关的一大类问题 (参见习题 0 第 3 题).

下面再来看一个例子, 来说明我们如何对待遇到的数学问题.

例 0.3 试求 $y=\ln x$ 在 $x=4$ 与 $x=8$ 之间的一条切线, 使得曲线与该切线、直线 $x=4$ 以及直线 $x=8$ 所围的区域面积最小.

解 设切点横坐标为 $x_0\in[4,8]$, 直接计算可以把相应区域的面积 S 用 x_0 表示出来:

$$S(x_0)=4\ln x_0+\frac{24}{x_0}-16\ln 2.$$

然后通过求闭区间上函数 $S(x_0)$ 的最小值可以得到使面积 $S(x_0)$ 最小的 x_0 为 6.

对于大多数同学来讲, 上面的解题过程是非常自然的. 但是, 当得到切点横坐标为 6 时, 就不应该止步不前. 很明显, 6 是所讨论区间 $[4,8]$ 的中点. 那么这个中点是不是只是因为凑巧呢?

为此, 我们可以考虑将区间改为一般的 $[a,b]$ $(0<a<b)$. 有趣的是解答后发现相应问题的结果仍然是中点!

希望读者有足够的兴趣和激情去研究究竟是什么原因导致了这样的结果. 我们把这个问题留给读者.

最后以例 0.4 为例进一步说明本书在技巧方面的取舍.

例 0.4 计算 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

解 计算上述级数, 大家熟知的方法是利用函数

$$f(x)=\pi-x,\quad x\in(0,2\pi)$$

的 Fourier 级数展开式:

$$\pi-x=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\quad x\in(0,2\pi),$$

然后利用 Fourier 级数的逐项可积性得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx-1}{n^2}=-\frac{\pi}{2}x+\frac{x^2}{4},\quad x\in(0,2\pi),$$

最后求得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

但是利用上述方法进行计算, 某种程度上是一种 “马后炮” 式的解法, 因为函数 $f(x)=\pi-x$ 从天而降, 事先看不出为什么要取这个函数.

本书中, 我们会在例 5.4.5 和例 5.4.6 中给出一个直接从问题出发的解答. 这并不是说直接利用 Fourier 展式的解法不好, 只是以此说明编写此书的一个侧重点. 我们更偏重的是培养读者能够利用常规的方法求得最后结果的能力, 尽管这种常规的方法可能不是很精彩.

习 题 0

1. 试对例 0.2 中的结论进行推广, 构造出不同的例子来.
2. 研究例 0.3.
3. 思考: 考虑由递推公式

$$b_{n+1} = \alpha b_n + \beta b_{n-1}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

确定的数列 $\{b_n\}$. 试寻找所有的整数组 $(\alpha, \beta, \gamma, b_0, b_{-1})$ 使得对所有奇素数 n 成立 $n | b_n - \gamma$.

第 1 章　分析基础、实数系基本定理

通常, 对于数学工作者来讲, 并不需要对建立实数系的详细过程有充分的了解. 人们可以把实数系所具备的一些最简单的性质作为公理, 由此出发来建立进一步的理论. 但是实数系的建立毕竟是现代数学的一块基石, 所以, 我们还是鼓励大家对此有一定的了解, 特别是了解为什么需要用那样的方法去建立实数理论.

1.1　数的发展、有理数的基本性质

数的发展过程可以从两个方面来看: 一个是它的历史发展过程; 另一个是它的逻辑发展过程.

历史地看, 人们对于数的认识过程可以用图 1.1.1 表示, 需要注意的是, 这是一个交叉、反复的过程①:

正整数
$\Downarrow$　引入正分数
正有理数
$\Downarrow$　引入零
非负有理数
$\Downarrow$　引入正无理数
非负实数
$\Downarrow$　引入负数
实数
$\Downarrow$　引入虚数
复数

图 1.1.1

值得注意的是, 零并不是从一开始就出现的, 所以, 曾经只把正整数才看成自然数②.

数的逻辑发展过程可以用图 1.1.2 表示.

① 不同的文化对数的认识过程有所区别.

② 1993 年颁布的中华人民共和国国家标准《量和单位》(GB 3100~3102—93) 将零纳入自然数.

正整数 (半群, 良序集)

$\Downarrow$ 减法运算封闭

整数 (加群, 整环, 全序集)

$\Downarrow$ 除法运算封闭

有理数 (全序域)

$\Downarrow$ 完备化

实数 (有最小上界性的有序域)

$\Downarrow$ 对代数方程封闭

复数

图 1.1.2

从逻辑的角度来看, 从自然数到有理数是一个自然的、可接受的过程①. 大家知道, 早在古希腊, 人们对无理数就有了一定的认识, 知道了有些长度不能用有理数表示. 但是, 人们对什么是无理数, 直到 19 世纪还没有一个可以接受的定义. 考虑一下什么是 $\sqrt{2}$, 是方程 $x^2 = 2$ 的根? 或者是

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213, 1.4142135, \cdots$$

的“极限”? 细细想来, 都是有问题的.

尽管如此, 有一点是肯定的, 有理数是引入实数 (或无理数) 的基础.

下面回顾一下有理数所具有的一些基本性质.

有理数的基本运算有加法 (和)、减法 (差)、乘法 (积) 与除法 (商), 且有理数对四种运算是封闭的, 即任意两个有理数的和差积商 (除数不能为零) 还是有理数. 在总结这些性质时, 想一想矩阵的运算会有利于我们理解到有理数运算的这些特殊性. 我们用 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R}$ 分别表示自然数集、正整数集、整数集、有理数集和将要定义的实数集.

1. 全序集

定义 1.1.1 *设 F 是一个集合. F 上的***偏序关系***“$\leqslant$”是 F 中元素之间的一种次序关系, 满足:*

(O1) **自反性** *对于任何 $x \in F$, $x \leqslant x$ 成立;*

(O2) **反对称性** *对于任何 $x, y \in F$, 若 $x \leqslant y$, 且 $y \leqslant x$, 则 $x = y$;*

(O3) **传递性** *若 $x, y, z \in F$ 满足 $x \leqslant y$, 且 $y \leqslant z$, 则 $x \leqslant z$.*

*此时, 称 $(F, \leqslant)$ 为一个***偏序集***.*

可以看到 $(\mathbb{Z}_+, \leqslant)$, $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ 和 $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ 都是偏序集.

① 尽管历史上, 某些文化对负数和零的接受并不像现代人想象的那么顺利.

定义 1.1.2　设 $(F, \leqslant)$ 是一个偏序集. $x \in E \subseteq F$.

如果对任何 $y \in E$, 成立着 $x \leqslant y$, 则称 x 为 E 的**最小元**.

如果 F 的任何子集都有最小元, 则称 $(F, \leqslant)$ 为一个**良序集**.

易见, $(\mathbb{Z}_+, \leqslant)$ 是良序集, 但 $(\mathbb{Z}, \leqslant)$ 和 $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ 都不是良序集.

定义 1.1.3　设 F 是一个集合. 如果 F 中元素之间的一种次序关系"$<$", 满足传递性 (O3) 和

(O4) **反自反性**　对于任何 $x \in F$, $x < x$ 不成立,

则称"$<$"为 F 上的一个**拟序关系**. 此时, $(F, <)$ 就成为一个**拟序集**.

易见 $(\mathbb{Z}_+, <)$, $(\mathbb{Z}, <)$ 和 $(\mathbb{Q}, <)$ 都是拟序集.

另外, 不难由偏序关系 (拟序关系) 定义一个与之相对应的拟序关系 (偏序关系). 参见习题 1.1 第 1 题.

定义 1.1.4　设 $(F, \leqslant)$ 是一个偏序集. 且具有以下性质:

(O5) **全序性**　对于任何 $x, y \in F$, 下列关系式至少有一个成立: $x \leqslant y, y \leqslant x$,

则称 $(F, \leqslant)$ 为一个**全序集**①.

可以看到, 对于 $F = \mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, $(F, \leqslant)$ 是全序集.

2. 加群

定义 1.1.5　设 F 和其上的一种加法运算"$+$"满足如下性质:

(A1) **封闭性**　若 $x, y \in F$, 则 $x + y \in F$;

(A2) **结合律**　对于任何 $x, y, z \in F$, 有 $(x + y) + z = x + (y + z)$;

(A3) **交换律**　对于任何 $x, y \in F$, 有 $x + y = y + x$;

(A4) **存在零元**　存在元素 $0 \in F$ 满足: 对于任何 $x \in F$, $x + 0 = x$;

(A5) **存在负元**　对于任何 $x \in F$, 存在一个元素 $y \in F$ (记做 $-x$) 满足 $x + (-x) = 0$, 则称 $(F, +)$ 为一个 **(可) 交换群**②(或 **Abel 群**, **加群**③).

可以看到 $(\mathbb{Z}, +)$ 和 $(\mathbb{Q}, +)$ 都是加群, 但 $(\mathbb{Z}_+, +)$ 不是.

3. 域

定义 1.1.6　设集合 F 上有加法运算"$+$"和乘法运算"$\cdot$", 使得 $(F, +)$ 构成一个加群且满足如下性质④:

(M1) **乘法封闭性**　若 $x, y \in F$, 则 $xy \in F$;

(M2) **乘法结合律**　对于任何 $x, y, z \in F$, 有 $(xy)z = x(yz)$;

---

① 对于拟序集 $(F, <)$, 如果对任何 $x, y \in F$, 以下的 $x < y$, $x = y$, $y < x$ 三者之一成立, 则也称 $(F, <)$ 为全序集.

② 满足 (A1), (A2) 的 $(F, +)$ 称为**半群**.

③ 一般只有当这里的运算用"+"表示时, 才称为加群.

④ 为简单起见, 常用 xy 表示 $x \cdot y$.