高中新课标（北师大版）

新课程 新练习

数学 必修4

与北师大版普通高中课程标准实验教科书同步

xin kecheng xin lianxi xin kecheng xin lianxi

xin kecheng xin lianxi xin kecheng xin lianxi

xin kecheng xin lianxi xin kecheng xin lianxi

xin kecheng xin lianxi xin kecheng xin lianxi

xin kecheng xin lianxi xin kecheng xin lianxi

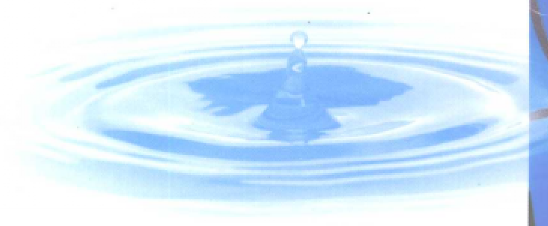
xin kecheng xin lianxi xin kecheng xin lianxi

xin kecheng xin lianxi xin kecheng xin lianxi

二十一世纪出版社
21st Century Publishing House

与北师大版普通高中课程标准实验教科书同步

学新课标教材
用新理念教辅



SHUXUE

策　　划：鼎尖教育研究中心
责任编辑：罗安和

高中新课标系列

语文	(必修1～必修5)
数学	(必修1～必修5)
英语	(必修1～必修5)
物理	(必修1～必修2)
化学	(必修1～必修2)
生物	(必修1～必修3)
地理	(必修1～必修3)
思想政治	(必修1～必修4)
历史	(必修1～必修3)

ISBN 978-7-5391-4700-0

9 787539 147000 >

定价：19.00元

魔方号新课标系列丛书

新课程　新练习

数　学

必修4　北师大版

主编　严治理

学校____________

班级____________

姓名____________

二十一世纪出版社
21st Century Publishing House

图书在版编目(CIP)数据

新课程 新练习：北师大版．高中数学．4：必修 /邓桂林等编写．
—南昌：二十一世纪出版社，2009.1
(魔方号新课标系列丛书)
ISBN 978-7-5391-4700-0
Ⅰ.新… Ⅱ.邓… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ.G634
中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第010703号

策　　划：鼎尖教育研究中心
主　　编：严治理
编　　著：邓桂林　易光禄　邹庆兴
责任编辑：罗安和
审　　读：罗继远　曹发根　张辉寅　王跃平　曾国如　洪　安　曾书庆　张辉耀
毛和圣　张昌祥　赵小林　刘六桂　罗为民　赵秋明　许灿明　蒋新泉
肖思贵　游和平　罗春保　李桂南　刘家平　李　敢　谭厚坚　刘希贤
肖友才　张友志
本册主审：杜小许

与北师大版普通高中课程标准实验教科书同步
新课程　新练习　高中数学必修4

出版发行：二十一世纪出版社
地　　址：江西省南昌市子安路75号(330009)
邮　　箱：xkcxlx21th@126.com
电　　话：0791-6526259
发　　行：新华书店
承　　印：江西江报传媒彩印有限公司
开　　本：850mm×1168mm　1/16
印　　张：10.25
版　　次：2009年1月第1版
印　　次：2009年1月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5391-4700-0
定　　价：19.00元

写给同学们

2008年秋季,江西省普通高中全面进入新课程实验改革。在新的课改形式下,面对新的课程要求、新的教材,学习怎么学?考试怎么考?万一上课没能抓住老师的讲解要点,课后怎么补?

《新课程　新练习》(高中新课标系列)的出现解决了这些难题,它真正做到了从同步教学的角度出发,对新课改、新教材的"教"与"学"做出了全面、全新的阐释。该套丛书经过高中新课改实验区的试用,在广泛征求意见和建议的基础上进行了全面修订。

丛书具有以下鲜明特色:

标准制造——丛书的编写以国家教育部颁布的各学科课程标准为纲,以国家教育部教材审定委员会审查通过的各种教材最新版本为依据,由新课标实验地区特高级教师编写,并得到国内著名的高中新课程研究专家的指导与审定。

引领潮流——丛书贴近高中新课标理念,突出新理念、新思想、新思路。丛书栏目新颖,版式活泼,讲解透彻,题量适中。栏目的设置拓展了学生知识和眼界,有利于学生构建开放的学习体系;语言风格清新流畅,亲和力强,充分尊重学生学习的主体地位。

与时俱进——丛书分讲解与练习两部分。充分考虑到课程"新"这一特点,针对学生上课听不懂,下课记不牢的情况,课时讲解细致入微,全面中突出重点,既注重知识的基础性,也体现了知识的综合拓展,还巧妙加入大量的规律点拨和学习技巧提示,"讲""练"结合,可使学生达到"课课通,题题通"的效果。

科学实用——丛书体例设置科学实用,开创了高中教辅"与每课时教学内容严格同步"的教材讲析模式,课时划分一般以教参、标准课时的规定与建议为依据,并参照教学实践,具有普遍性、参照性。同时在课时讲解的基础上设置随堂练习,从而进一步夯实学生的基本功。并按新课标高考题型和规律,设置了单元测试和期末综合测试,既充分考虑全国高考的现状,又真实反映了高中新课标教材教学模式和评价模式。各学科的练习均有参考答案,并采取单本装订形式,使用起来方便灵活。

编写高中新课标学生助学用书是新的研究课题,丛书中难免会存在问题,在此期待你的指正。

同学们,你的成功就是我们的成功,我们愿伴随你一同成长。

智慧在此隐藏,成功从这起步。

丛书策划组

目　录

第一章　三角函数

§1　周期现象

课程导入

在我们的周围，存在不少周而复始循环不息的现象．例如，今天是星期一，过了七天还是星期一，再过七天又是星期一，以后每过七天均是星期一．由此一个星期中的某一天，每隔7天周而复始循环不息．又如，时钟的时针每十二小时重复旋转一周，这样有规律性的重复，我们称它为周期性现象．

三角函数是刻画周期性现象的数学基本模型．

探究新知

学点　周期现象

观察钱塘江潮的图片（见教材第3页），我们看到波浪每间隔一段时间会重复出现，这种现象被称为周期现象．

例如，潮汐、四季的变化、时针的运行、质点的简谐振动等都是周期现象，因此我们有必要研究这种规律性的重复现象．

【例1】 今天是星期一，那么

(1)$7k(k\in \mathbf{Z})$天后的那一天是星期几？

$7k(k\in \mathbf{Z})$天前的那一天是星期几？

(2)158天后的那一天是星期几？

分析　每星期从星期一、星期二一直到星期日，每星期7天，呈现周期性变化，每7天都要重复出现．

解答　(1)∵今天是星期一，

∴$7k(k\in \mathbf{Z})$天后的那一天仍是星期一；

$7k(k\in \mathbf{Z})$天前的那一天仍是星期一．

(2)∵$158=7\times 22+4$，又∵今天是星期一，

∴158天后的那一天是星期五．

特别提示　判断星期几的问题实质隐含了周期这一数学内容，深入理解周期现象是正确解决此类问题的关键．

【同类变式】 1997年7月1日香港回归祖国，中国人民终于洗刷了百年耻辱．已知1997年7月1日是星期二，那么，1898年6月9日是星期　　　（　　）

A.二　　B.三　　C.四　　D.五

（注：公历纪年，凡年份为4的倍数但不是100的倍数的那年为闰年，年份为400的倍数的那年也为闰年，闰年的二月有29天，平年的二月有28天）

分析　星期的变化是周期现象，每7天都要重复出现，因此只要计算出天数即可．

解答　已知1997年7月1日是星期二，易知1997年6月9日是星期一．而1898年6月9日到1997年6月9日共99年，其中闰年24次，所以过了$99\times 365+24=36\,159$天．

由于$36\,159=5\,165\times 7+4$，所以1898年6月9日是星期四．选C．

拓广延伸

【例2】 天上有些恒星的亮度是会变化的，其中一种称为造父（型）变星，本身体积会膨胀收缩造成亮度周期性的变化．图1.1-1为一造父变星的亮度随时间的周期变化图．此变星的亮度变化的周期为多少天？最亮时是几等星？最暗时是几等星？

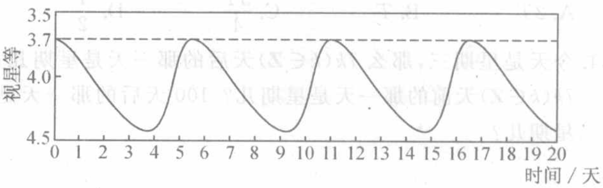


图1.1-1

分析　过0天对应的3.7等星的点作与时间轴平行的直线，发现每经过5.5天，3.7等星出现一次．事实上，无论从哪个时刻算起，经过5.5天，又出现相同的等星，所以，我们有：$f(t+T)=f(t)$，其中T为5.5天．

解答　观察图知，此星的亮度变化的周期为5.5天；最亮时约是3.7等星；最暗时，约是4.4等星．

思维诊断　从图像上观察，每个周期的图像不一定完全相同，但是题目说明了这一造父变星的亮度随时间变化为周期现象．因此，我们认为它是周期变化图，还要注意的是表示视星等的坐标是由大到小．

课时作业

1.地球同步通信卫星绕地球公转的周期是　　　（　　）

A.一年　　B.一个月

C.24小时　　D.12小时

2.图1.1-2是汽油机的气缸结构示意图，活塞在燃料的推动下做往复运动的过程中，通过连杆带动曲轴做圆周运动．如果活塞每分钟往复运动2 400次，则曲轴的运动周期是　　　（　　）

A.1分钟　　B.40秒

C. 0.05 秒　　　　D. 0.025 秒

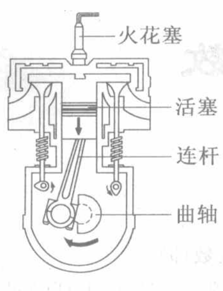


图 1.1 - 2

3. 图 1.1 - 3 是一个单摆，让摆球从 A 点开始摆动，最后又回到 A 点，单摆所经历的时间是一个周期 T. 则摆球在 $O \to B \to O \to A \to O$ 的运动过程中，经历的时间是　(　　)

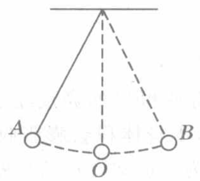


图 1.1 - 3

A. $2T$　　B. T　　C. $\frac{3T}{4}$　　D. $\frac{T}{2}$

4. 今天是星期三，那么 $7k(k \in \mathbf{Z})$ 天后的那一天是星期几? $7k(k \in \mathbf{Z})$ 天前的那一天是星期几? 100 天后的那一天是星期几?

5. 电视台的不同栏目播出的时间周期是不同的，有的是每天播出，有的是隔天播出，有的是一周播出一次. 请查阅当地的电视节目预告，统计不同栏目的播出周期.

6. 图 1.1 - 4 为一向右传播的绳波在某一时刻绳子各点的位置图，经过 $\frac{1}{2}$ 周期后，乙点的位置将移至何处?

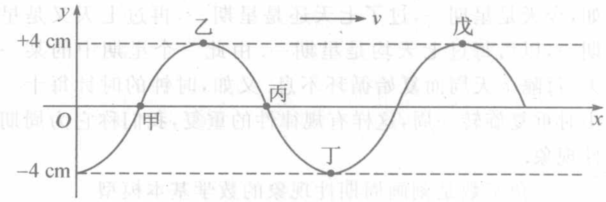


图 1.1 - 4

§2　角的概念的推广

课程导入

角是平面几何中的一个基本图形，对角的图形特点，人们有如下两种认识:

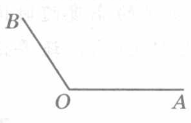


图 1.2 - 1

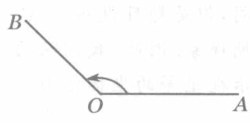


图 1.2 - 2

(1) 角可以看成是平面内一点引出的两条射线所组成的图形，如图 1.2 - 1.

(2) 角可以看成平面内一条射线绕着其端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形，如图 1.2 - 2.

思考

1. 你认为上述两种认识，哪一种认识更科学、合理?

2. 如果将手表拨快 20 分钟，或拨慢 90 分钟，那么应分别将分针旋转多少度?

第 1 课时　探索新知课

探究新知

本节我们将要学习正角、负角、零角、象限角，以及终边相同的角.

学点❶　任意角的概念

角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置形成的图形.

如图 1.2 - 3，一条射线的端点是 O，它从起始位置 OA 按逆时针方向旋转到终止位置 OB，形成了一个角 α，点 O

是角的顶点，射线 OA 是角 α 的始边，射线 OB 是角 α 的终边.

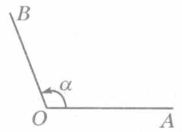


图 1.2-3

我们规定：按逆时针方向旋转形成的角叫正角，按顺时针方向旋转形成的角叫负角，一条射线没有作任何旋转形成的角叫零角.

特别提示 1.确定一个角的大小需要考虑两个要素，即角的旋转量和旋转方向.旋转量相同而旋转方向不同的两个角是不相等的，如 $-60°\neq60°$.

2.由于角包括正角、负角和零角，从而角的值可以取任意大小，这样，我们就把角的概念推广到了任意角.

3.两个任意角的数量大小可以相加、相减，并按实数的加、减法则进行.如 $50°+80°=130°$，$50°-80°=-30°$ 等.其几何意义是以 $50°$ 角的终边为始边，再逆时针(或顺时针)旋转 $80°$ 所成的角.

4.角常用希腊字母 α、β、γ 等表示，在不引起混淆的前提下，"角 α"或"$\angle\alpha$"可以简记成"α".

【例 1】 (1)一角为 $30°$，其终边按逆时针方向旋转三周后的角度是________.

(2)时钟走过了 3 小时 20 分，则分针所转过的角的度数为________，时针所转过的角的度数为________.

分析 角旋转一周为 $360°$，时钟中时针每小时走 $\frac{1}{12}$周，分针每分钟走 $\frac{1}{60}$周.

解答 (1)终边按逆时针方向旋转三周，转过的角度为 $360°\times3=1\ 080°$.再加这一角为 $1\ 080°+30°=1\ 110°$，所以旋转后的角度数是 $1\ 110°$.

(2)时针、分针都是按顺时针方向旋转的，故所转过的角度数为负.3 小时 20 分，分针转了 $3\frac{1}{3}$周，故转过的角度数为 $-360°\times3\frac{1}{3}=-1\ 200°$；时针转了 $\frac{5}{18}$周，故转过的角度数为 $-360°\times\frac{5}{18}=-100°$.

易错点提示 在处理有关时针旋转的角度问题时，容易忘了时针的旋转方向而少写了负号.

【例 2】 画图表示下列各角：$\alpha=390°$，$\beta=-210°$，$\gamma=-330°$.

分析 α 为正角，将射线绕其端点逆时针旋转 $390°$，β、γ 为负角，将射线绕其端点顺时针分别旋转 $210°$和 $330°$.

解答 如图 1.2-4.(其中$\angle AOB_1=30°$，$\angle AOB_2=150°$)

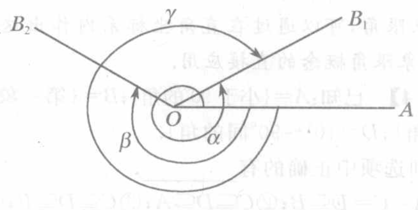


图 1.2-4

解题规律 画图表示一个大小为定值的角，先要画一条射线作为角的始边(一般画成水平向右的射线)，再由角的正负确定角的旋转方向，再由角的绝对值大小确定角的旋转量，画出角的终边，并用带箭头的螺旋线加以标注.

学点❷ 象限角、轴线角

1.象限角

当角的顶点与坐标原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合，那么角的终边(除端点外)在第几象限，就说这个角是第几象限角.如 $30°$，$390°$，$-300°$ 都是第一象限角；$150°$，$480°$，$-240°$ 都是第二象限角；$240°$，$570°$，$-120°$ 都是第三象限角；$330°$，$660°$，$-30°$ 都是第四象限角.

特别提示 如果角的顶点不与坐标原点重合，或者角的始边不与 x 轴非负半轴重合，则不能判断角在哪一象限，也就是不能称它为象限角.

2.轴线角

当角的顶点与坐标原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合，角的终边就在坐标轴上，称做轴线角，这时这个角不属于任何象限.

如 $0°$，$90°$，$180°$，$270°$，$360°$，$-90°$，$-180°$，$-270°$，$-360°$，$-1\ 080°$等都是轴线角.

【例 3】 已知角的顶点与直角坐标系的原点重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，作出下列各角，并指出它们是第几象限角：

(1)$225°$；(2)$-300°$；(3)$-450°$.

分析 以原点为顶点，x 轴的非负半轴为始边作出 $225°$，$-300°$，$-450°$，如图 1.2-5.

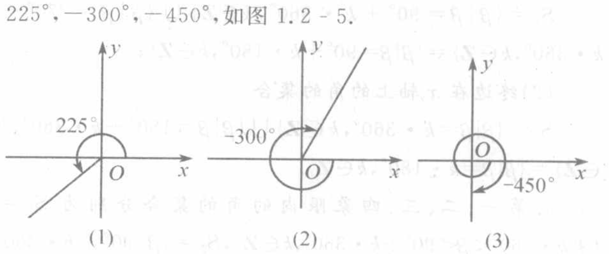


图 1.2-5

解答 观察角的终边所在位置，知 $225°$，$-300°$分别是第三象限角和第一象限角，$-450°$的终边在 y 轴负半轴上，不属于任何象限.

学后感悟 在直角坐标系内作角，其始边位置及角的顶点是统一固定的，结合角的正负符号和角的绝对值大小作出其终边，并用带箭头的螺旋线标注就行了.确定一个角是第几象限角，可以通过在直角坐标系内作出这个角来说明，这是象限角概念的直接应用.

【例4】 已知：$A=\{$小于90°的角$\}$；$B=\{$第一象限的角$\}$；$C=\{$锐角$\}$；$D=\{0^\circ\sim90^\circ$间的角$\}$.

下列选项中正确的有________.

①$A=C=D\subseteq B$；②$C\subseteq D\subseteq A$；③$C\subseteq D\subseteq B$；④$C\subseteq D\subseteq B\subseteq A$；⑤$B\cap D=C$；⑥$A\cap B=C$.

分析 小于90°的角由锐角、零角、负角组成，而第一象限角包含锐角及其他终边在第一象限的角.而$0^\circ\sim90^\circ$间的角包括0°，不包括90°.

解答 ②③⑤

易错点提示 我们以前认为小于90°的角就是锐角.事实上，小于90°的角不都是锐角，还有零角、负角，只有小于90°的正角才是锐角，还有"～"代表的含义是"含前"不"含后"，也要时时注意.因此角的概念推广之后，考虑问题要全面.

易忽视点提示 在讨论角时，极容易忽视轴上角的存在.轴上角不属于任何象限，它和象限角共同组成了平面直角坐标系内顶点在原点，始边与x轴非负半轴重合的角.

学点❸ 终边相同的角

所有与角α终边相同的角，连同角α在内，可构成一个集合$S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.即任一与角$\alpha$终边相同的角，都可以表示成角$\alpha$与整数个周角的和.

特别提示 1.在直角坐标系中，对于一个给定的角，就有唯一的一条终边与之对应.但大小不同的角可以有相同的终边，与角α终边相同的角有无数个，它们构成一个集合$S=\{\beta|\beta=\alpha+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

2.在$0^\circ\sim360^\circ$范围内，与角α终边相同的角有且只有一个.一般地，若$\theta_2-\theta_1=360^\circ$，则在$\theta_1\sim\theta_2$范围内，与角$\alpha$终边相同的角有且只有一个，若$\theta_2-\theta_1=k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$，则在$\theta_1\sim\theta_2$范围内，与角$\alpha$终边相同的角有且只有$k$个.

3.(1)终边在y轴上的角的集合

$S_1=\{\beta|\beta=90^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\beta|\beta=270^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}=\{\beta|\beta=90^\circ+k\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$；

(2)终边在x轴上的角的集合

$S_2=\{\beta|\beta=k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\beta|\beta=180^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}=\{\beta|\beta=k\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

4.第一、二、三、四象限内的角的集合分别为$S_1=\{\beta|k\cdot360^\circ<\beta<90^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，$S_2=\{\beta|90^\circ+k\cdot360^\circ<\beta<180^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，$S_3=\{\beta|180^\circ+k\cdot360^\circ<\beta<270^\circ+k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，$S_4=\{\beta|-90^\circ+k\cdot360^\circ<\beta<k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

5.若β与γ是终边相同的角，则$\beta=\gamma+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$，这表明任意两个终边相同的角，它们相差周角的整数倍.

问题研讨 终边落在同一条直线上的两角之间的关系如何？

【例5】 若$\alpha=1\ 590^\circ$，(1)把α改写成$k\cdot360^\circ+\beta(k\in\mathbf{Z},0^\circ\leqslant\beta<360^\circ)$的形式为________；

(2)使θ与α的终边相同，且$-360^\circ<\theta<360^\circ$，则$\theta=$________，$\theta$所属象限为________.

分析 (1)用$\alpha\div360^\circ$确定商及余数，按要求确定β；(2)借助终边相同的角的表示方法.

解答 (1)$\alpha=4\times360^\circ+150^\circ(k=4,\beta=150^\circ)$，

∴应填$4\times360^\circ+150^\circ$.

(2)∵θ与α终边相同，

∴θ角可写成$k\cdot360^\circ+150^\circ(k\in\mathbf{Z})$.

由$-360^\circ<k\cdot360^\circ+150^\circ<360^\circ(k\in\mathbf{Z})$解得

$k=-1$或$k=0$.

∴$\theta=-210^\circ$或150°，故θ属于第二象限.

∴应填-210°或150°，第二象限.

解题规律 1.欲判断某一个角属于第几象限，常常将这个角表示为$k\cdot360^\circ+\alpha(0^\circ\leqslant\alpha<360^\circ,k\in\mathbf{Z})$的形式，只需判断$\alpha$所在象限即可.

2.在一定条件下，求与α角终边相同的角，首先将这样的角表示成$k\cdot360^\circ+\alpha(k\in\mathbf{Z})$的形式，然后确定$k$的值，求出适合条件的角.

【同类变式】 求与$3\ 900^\circ$终边相同的最小正角和最大负角，并指出它们是第几象限角.

分析 与$3\ 900^\circ$终边相同的最小正角和最大负角，就是分别在$0^\circ\sim360^\circ$，$-360^\circ\sim0^\circ$范围内与$3\ 900^\circ$终边相同的角.找出了在$0^\circ\sim360^\circ$范围内与$3\ 900^\circ$终边相同的角，就能指出它的象限位置.

解答 设$\beta=3\ 900^\circ+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$.

则当$k=-10$时，$\beta=3\ 900^\circ-10\times360^\circ=300^\circ$，

当$k=-11$时，$\beta=3\ 900^\circ-11\times360^\circ=-60^\circ$.

∴与$3\ 900^\circ$终边相同的最小正角是300°，最大负角是-60°，且$3\ 900^\circ$是第四象限的角.

感悟规律 求在某个范围内与角α终边相同的角，先要写出其一般表达式：$\beta=\gamma+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$，再根据$\beta$的取值范围确定整数$k$的取值.确定绝对值较大的角的象限位置，可先在$0^\circ\sim360^\circ$范围内找出其终边相同的角，再作出判断.

课时作业

1.下列命题中正确的是 (　　)

A.第一象限角一定不是负角

B.小于90°的角一定是锐角

C. 钝角一定是第二象限角

D. 终边相同的角一定相等

2. 以原点为角的顶点、x 轴的正方向为角的始边，终边在 x 轴上的角等于 (　　)

A. $\{\alpha|\alpha=k\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}\}$

B. $\{\alpha|\alpha=(2k+1)\cdot 180°,k\in \mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha|\alpha=k\cdot 180°,k\in \mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha|\alpha=k\cdot 180°+90°,k\in \mathbf{Z}\}$

3. 若 α 是第三象限角，则 2α 不可能在 (　　)

A. 第一、二象限　　B. 第二、三象限

C. 第三、四象限　　D. 第一、四象限

4. 在直角坐标系中，若角 α 与角 β 的终边互为反向延长线，则角 α 与角 β 的关系是 (　　)

A. $\alpha=-\beta$

B. $\alpha=-k\cdot 360°+\beta(k\in \mathbf{Z})$

C. $\alpha=180°+\beta$

D. $\alpha=k\cdot 360°+180°+\beta(k\in \mathbf{Z})$

5. 若集合 $M=\{\alpha|\alpha=\pm 30°+k\cdot 180°,k\in \mathbf{Z}\}$，$N=\{\alpha|\alpha=(-1)^k\cdot 30°+k\cdot 180°,k\in \mathbf{Z}\}$，则 (　　)

A. $M=N$　　B. $M\subsetneqq N$

C. $M\supsetneqq N$　　D. $M\not\subseteq N$ 且 $N\not\subseteq M$

6. 若 α 为锐角，$-\alpha+k\cdot 180°(k\in \mathbf{Z})$ 所在的象限是______.

7. 已知角 α 的终边与 y 的正半轴所夹的角为 $30°$，且终边落在第二象限，又 $-720°<\alpha<0°$，求 α.

8. 已知 α、β 的终边关于 y 轴对称，θ 与 $\frac{\alpha+\beta}{2}$ 的终边关于直线 $y=\sqrt{3}x$ 对称，求在 $0°\sim 360°$ 范围内与 θ 终边相同的角.

*第2课时　拓广习题课

拓广延伸

探究学习　已知 θ 为某象限的角，如何确定 $\frac{\theta}{n}$ 所在的象限

(1) $\frac{\theta}{2}$ 所在的象限问题

作出各个象限的角平分线，它们与坐标轴把周角等分成8个区域，从 x 轴的非负半轴起，按逆时针方向把这8个区域依次循环标上号码1、2、3、4，则标号是几的两个区域，就是 θ 为第几象限的角时 $\frac{\theta}{2}$ 终边落在的区域，这样 $\frac{\theta}{2}$ 所在的象限就可以直观地看出，如图1.2-6所示.

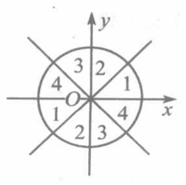


图 1.2-6

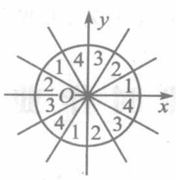


图 1.2-7

(2) $\frac{\theta}{3}$ 所在象限的问题

作出三等分各个象限的从原点出发的射线，它们与坐标轴把周角等分成12个区域. 从 x 轴的非负半轴起，按逆时针方向把这12个区域依次循环标上号码1、2、3、4. 则标号是几的区域，就是 θ 为第几象限角时 $\frac{\theta}{3}$ 终边落在的区域. 这样 $\frac{\theta}{3}$ 所在的象限就可以直观地看出，如图1.2-7所示.

(3) $\frac{\theta}{n}$ 所在象限的问题

一般地，要确定 $\frac{\theta}{n}$ 所在的象限，可以作出 n 等分各个象限的从原点出发的射线，它们与坐标轴把周角等分成 $4n$ 个区域，从 x 轴的非负半轴起，按逆时针方向把这 $4n$ 个区域依次循环标上号码1、2、3、4，则标号是几的区域，就是 θ 为第几象限的角时 $\frac{\theta}{n}$ 终边落在的区域，这样 $\frac{\theta}{n}$ 所在的象限就可直观地看出.

【例1】 已知角 α 是第二象限角，求角 2α，$\frac{\alpha}{2}$ 分别是第几象限角.

分析　根据象限角的定义结合不等式知识求解.

解答　$\because \alpha$ 是第二象限角，则

$k\cdot 360°+90°<\alpha<k\cdot 360°+180°,k\in \mathbf{Z}$,

$\therefore 2k\cdot 360°+180°<2\alpha<2k\cdot 360°+360°,k\in \mathbf{Z}$,

$\therefore 2\alpha$ 是第三或第四象限角，以及终边落在 y 轴的非正半轴上的角.

$k\cdot360^\circ+90^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+180^\circ, k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore k\cdot180^\circ+45^\circ<\frac{\alpha}{2}<k\cdot180^\circ+90^\circ, k\in\mathbf{Z}$,

当 k 为偶数时，令 $k=2n, n\in\mathbf{Z}$,

则 $n\cdot360^\circ+45^\circ<\frac{\alpha}{2}<n\cdot360^\circ+90^\circ$，$\frac{\alpha}{2}$ 为第一象限角，

当 k 为奇数时，令 $k=2n+1, k\in\mathbf{Z}$,

则 $n\cdot360^\circ+225^\circ<\frac{\alpha}{2}<n\cdot360^\circ+270^\circ$，$\frac{\alpha}{2}$ 为第三象限角.

$\therefore \frac{\alpha}{2}$ 为第一、第三象限角.

警示误区 谨防出现这样的错误，由 α 是第二象限角，仅想到 $90^\circ<\alpha<180^\circ$，从而得到 $45^\circ<\frac{\alpha}{2}<90^\circ$，仅得到 $\frac{\alpha}{2}$ 为第一象限角，而将 $\frac{\alpha}{2}$ 是第三象限角的可能性丢掉.

综合方法　利用终边相同的角的知识解决有关的综合问题

利用终边相同的角的知识解决有关综合问题的关键在于：要能综合运用不等式、集合等知识进行相互转化.

【例 2】 若 θ 角的终边与 168° 角的终边相同，求在 $[0^\circ,360^\circ)$ 内终边与 $\frac{\theta}{3}$ 角的终边相同的角.

分析 先写出与 168° 角终边相同的角，再在 $[0^\circ,360^\circ)$ 内写出与 $\frac{\theta}{3}$ 角终边相同的角.

解答 $\because \theta=k\cdot360^\circ+168^\circ(k\in\mathbf{Z})$,

$\therefore \frac{\theta}{3}=k\cdot120^\circ+56^\circ(k\in\mathbf{Z})$.

而 $0^\circ\leqslant k\cdot120^\circ+56^\circ<360^\circ(k\in\mathbf{Z})$,

则 $k=0、1、2$.

即在 $[0^\circ,360^\circ)$ 内有 $\frac{\theta}{3}=56^\circ、176^\circ、296^\circ$.

应用拓展　用集合表示终边落在某区域的角

【例 3】 写出顶点在原点，始边重合于 x 轴的非负半轴、终边落在阴影部分的角的集合(如图 1.2-8 所示，不包括边界).

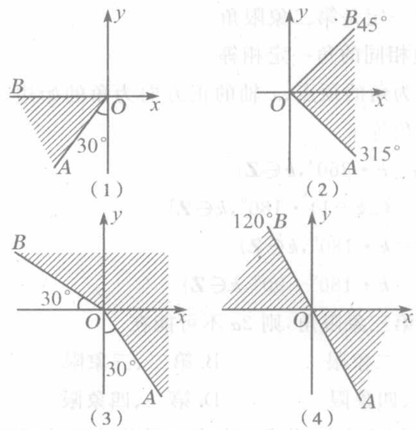


图 1.2-8

分析 对于阴影部分形成的 $\angle AOB$，先应选定 OA (OB)，并写出其终边对应的一个角，再依照逆时针原则写出一周内终边 $OB(OA)$ 对应的角，最后用终边相同的角的写法表示符合条件的角的范围.

解答 (1)选定 OB，在 $0^\circ\sim360^\circ$ 间，把图中以 OB 为终边的角看成 180°，则以 OA 为终边的角看成 240°，则有

$\{\alpha|180^\circ+k\cdot360^\circ<\alpha<240^\circ+k\cdot360^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$.

(2)选定 OA，在 $360^\circ\sim720^\circ$ 间(若取 $0^\circ\sim360^\circ$，则无法表示出以 OB 为终边的角)，把图中以 OA 为终边的角看成 315°，则以 OB 为终边的角看成 405°，则有

$\{\alpha|315^\circ+k\cdot360^\circ<\alpha<405^\circ+k\cdot360^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$.

或选定 OB，在 $-180^\circ\sim180^\circ$ 间，把图中以 OB 为终边的角看成 45°，则以 OA 为终边的角看成 -45°，则有

$\{\alpha|-45^\circ+k\cdot360^\circ<\alpha<45^\circ+k\cdot360^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$.

(3)选定 OA，在 $-180^\circ\sim180^\circ$ 间，把图中以 OA 为终边的角看成 -60°，则以 OB 为终边的角看成 150°，则有

$\{\alpha|-60^\circ+k\cdot360^\circ<\alpha<150^\circ+k\cdot360^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$.

(4)把图中 x 轴下方的阴影部分看成是由 x 轴上方的阴影部分旋转 180° 得到的，则有

$\{\alpha|120^\circ+k\cdot180^\circ<\alpha<180^\circ+k\cdot180^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$.

易错点提示 (2)易错为 $\{\alpha|k\cdot360^\circ+315^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+45^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$. 原因是角的终边表示错误.

课时作业

1. 若 $A=\{\theta|\theta=k\cdot360^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{\theta|\theta=k\cdot180^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{\theta|\theta=k\cdot90^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$，则下列关系中正确的是 (　　)

A. $A=B=C$　　　　B. $A=C\subseteq B$

C. $A\subseteq B=C$　　　　D. $A\subseteq B\subseteq C$

2. 与 $120°$ 角终边相同的角的集合是（　　）

A. $-600°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$

B. $-120°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$

C. $120°+(2k+1)\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$

D. $660°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}$

3. 已知集合 $A=\{\alpha|k\cdot360°\leqslant\alpha\leqslant k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{\alpha|k\cdot360°+60°<\alpha<k\cdot360°+240°,k\in\mathbf{Z}\}$，则 $A\cap B$ 等于（　　）

A. $\{\alpha|k\cdot360°\leqslant\alpha<k\cdot360°+240°,k\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{\alpha|k\cdot360°+60°<\alpha\leqslant k\cdot360°+180°,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha|k\cdot360°\leqslant\alpha<k\cdot360°+60°,k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\{\alpha|k\cdot360°+60°\leqslant\alpha<k\cdot360°+240°,k\in\mathbf{Z}\}$

4. 若 4α 与 $40°$ 的终边相同，则适合不等式 $0°\leqslant\alpha<360°$ 的角的集合是________.

5. 如图 1.2 - 9，阴影部分表示角 α 的终边所在的位置，写出角 α 的集合.

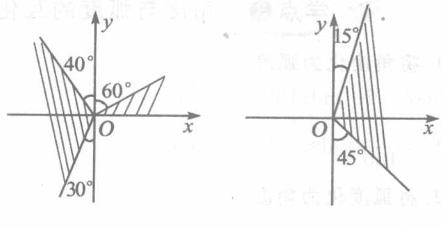


图 1.2 - 9

6. 如图 1.2 - 10，甲、乙物体在圆 O 上同时从点 P 出发，做圆周运动，甲按逆时针方向运动，乙按顺时针方向运动，甲第一分钟转 $4°$，以后每分钟比前一分钟多走 $4°$，乙每分钟走 $20°$，试问甲、乙开始运动后几分钟第一次相遇？第一次相遇时各自转过的角度是多少？

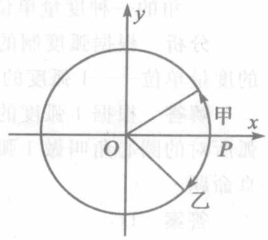


图 1.2 - 10

§3　弧度制

课程导入

我们在平面几何中研究角的度量，当时是用度、分、秒作单位来量角，规定周角的 $\frac{1}{360}$ 作为 1 度的角，1 度的角的 $\frac{1}{60}$ 作为1 分的角，1 分的 $\frac{1}{60}$ 作为 1 秒的角. 在角度制下，当把两个带着度、分、秒各单位的角相加、相减时，由于运算进率非十进制，总给我们带来不少困难. 那么，我们能否重新选择角的单位，使在该单位制下两角的加、减运算与常规的十进制加法一样呢？

第 1 课时　探索新知课

探究新知

本节课我们尝试用一种新的单位——弧度即弧长与半径的比来度量角的大小.

学点❶　弧度制的定义

我们把长度等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角，如图1.3 - 1，弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的长等于半径 r. $\overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角 $\angle AOB$ 就是 1 弧度的角，弧度制的单位符号 rad，读作弧度.

特别提示　弧度制是一种用来度量角的大小的单位制，弧度(rad)是其单位，正如长度的单位是米、厘米等一样.

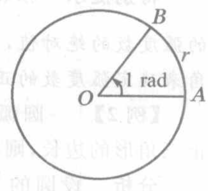


图 1.3 - 1

问题研讨　为什么可以用弧长与半径的比值来度量角的大小？

____

【例1】 下列诸命题中,真命题是 （　　）

A. 1弧度是1度的圆心角所对的弧

B. 1弧度是长度为半径的弧

C. 1弧度是1度的弧与1度的角之和

D. 1弧度是长度等于半径长的弧所对的圆心角,它是角的一种度量单位

分析 根据弧度制的概念判断.本题考查弧度制下角的度量单位——1弧度的概念.

解答 根据1弧度的定义:我们把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做1弧度的角.对照各选项,可知D为真命题.

答案 D

学点❷ 弧度数的绝对值公式

如图1.3-2中,$\overset{\frown}{AB}$的长等于半径r,$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角$\angle AOB$就是1弧度的角,即$\frac{r}{r}=1$.

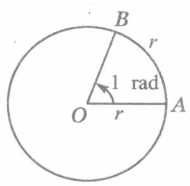


图1.3-2

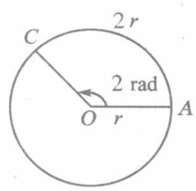


图1.3-3

在图1.3-3中,圆心角$\angle AOC$所对的$\overset{\frown}{AC}$的长$l=2r$,那么$\angle AOC$的弧度数就是$\frac{l}{r}=\frac{2r}{r}=2$.

如果圆心角所对的弧的长$l=2\pi r$(即弧长是一个整圆),那么这个圆心角的弧度数是$\frac{l}{r}=\frac{2\pi r}{r}=2\pi$.

如果圆心角表示一个负数,且它所对的弧的长$l=4\pi r$,那么这个角的弧度数的绝对值是$\frac{l}{r}=4\pi$,即这个角的弧度数是-4π.

一般地,正角的弧度数是一个正数,负角的弧度数是一个负数,零角的弧度数是零.

角α的弧度数的绝对值$|\alpha|=\frac{l}{r}$(其中l是以角α作为圆心角时所对的弧的长,r是圆的半径).

特别提示 根据弧度数公式$|\alpha|=\frac{l}{r}$,求出的是角α的弧度数的绝对值,因此最后还要根据是正角、负角或零角来确定弧度数的正、负、零情况.

【例2】 一圆弧的长度等于该圆弧所在的圆的内接正三角形的边长,则其圆心角的弧度数为________.

分析 设圆的半径为r,则内接正三角形的边长为$\sqrt{3}r$,所以圆心角的弧度数为$\frac{\sqrt{3}r}{r}=\sqrt{3}$.

解答 $\sqrt{3}$

点评 利用圆内接正三角形的条件找出圆的半径和圆弧长度之间的关系是解决这个问题的关键.

【同类变式】 已知扇形的周长等于它所在圆的周长的一半,求这个扇形的圆心角.

分析 设法求出扇形的弧长与其半径之比,就能求得扇形的圆心角.

解答 设扇形的半径为r,弧长为l.

由已知$l+2r=\pi r$,即$l=(\pi-2)r$.

$\therefore \frac{l}{r}=\pi-2$.

$\therefore$扇形的圆心角$\alpha=\frac{l}{r}=(\pi-2)\text{rad}$.

要点提示 对于扇形的弧长、半径和圆心角,只要知道其中两个量的值,就可利用弧度数的绝对值公式求得第三个量的值.同时要注意运用整体思想求解,如本例中求圆心角无需分别求扇形的弧长和半径,而是从整体上求出它们的比值.

学点❸ 角度与弧度的互化

1. 将角度化为弧度

$360°=2\pi\ \text{rad}$;$180°=\pi\ \text{rad}$;

$1°=\frac{\pi}{180}\ \text{rad}\approx 0.01745\ \text{rad}$.

2. 将弧度化为角度

$2\pi\ \text{rad}=360°$;$\pi\ \text{rad}=180°$;

$1\ \text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)°\approx 57.30°=57°18'$.

3. 需要记住的特殊角的弧度数

度	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	120°	135°	150°
弧度	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
度	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°	
弧度	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	

特别提示 1.今后我们在用弧度制表示角的时候,弧度(或rad)可以略去不写,而只写这个角对应的弧度数.

2.将角度换成弧度一般用$1°=\frac{\pi}{180}$ rad进行,如果没有特别的要求,弧度数就用含π的代数式表示.

3.将弧度换成角度一般用$1\ \text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)°$进行,由于判断角所在的象限用角度方便一些,因此也可用$1\ \text{rad}\approx 57.30°$将弧度换成角度.

【例3】 (1)将$92°30'$化为弧度;

(2)将$-\frac{7}{18}\pi$弧度化为度.

分析 利用$1°=\frac{\pi}{180}$ rad和$1\ \text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)°$进行角度和弧度的互化.

解答 (1)$\because 1°=\frac{\pi}{180}$ rad,

$\therefore 92°30' = \frac{\pi}{180} \times 92.5\ \text{rad} = \frac{37\pi}{72}\ \text{rad}$.

(2) $\because 1\ \text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)°$,

$\therefore -\frac{7\pi}{18}\ \text{rad} = -\left(\frac{7\pi}{18} \times \frac{180}{\pi}\right)° = -70°$.

易忽视点提示 解答这类题目易忽视三个问题：

1. 计算过程中的单位换算；

2. 计算时容易掉了符号；

3. 把度换为弧度时应把角度制的角中的分化为度，如(1)中的 $30' = 0.5°$，然后再换算.

学点4 弧长公式和扇形面积公式

在弧度制下，弧长公式和扇形的面积公式分别为：

$l = |\alpha| \cdot r$；$S = \frac{1}{2} l \cdot r = \frac{1}{2} |\alpha| \cdot r^2$.

在角度制下，弧长公式和扇形的面积公式分别为：

$l = \frac{|n|\pi r}{180}$；$S = \frac{n\pi r^2}{360}$.

特别提示 两者相比较，弧度制下的弧长公式和扇形面积公式具有更为简单的形式，其记忆和应用更易操作，但使用公式时应注意：

(1)用公式 $|\alpha| = \frac{l}{r}$ 求圆心角时，应注意其结果是圆心角的弧度数的绝对值，具体应用时，既要注意其大小，又要注意其正负；

(2)使用弧度制下的弧长公式、扇形面积公式有诸多优越性，但是如果已知的角是以"度"为单位，则必须先把它化成弧度后再计算，这样可避免计算过程或结果出错.

【例 4】 直径为 1.4 m 的飞轮，每小时按逆时针方向旋转24 000转，求：

(1)飞轮每秒转过的弧度数；

(2)轮周上的一点 P 每秒钟经过的弧长.

分析 先考虑飞轮每秒钟转多少转，再注意到每转的弧度数为 2π.

解答 (1)飞轮每秒钟转过的弧度数为

$\frac{24\,000}{3\,600} \times 2\pi = \frac{40}{3}\pi(\text{rad})$.

(2)轮周上一点 P 每秒钟转过的弧长为

$l = |\alpha| r = \frac{40}{3}\pi \times \frac{1.4}{2} = \frac{28}{3}\pi(\text{m})$.

学后感悟 解决此类问题的关键是将实际问题转化为数学问题——求圆心角的弧度数和扇形的弧长.

【同类变式】 已知扇形的周长为 6 cm，面积为 2 cm^2，求扇形中心角的弧度数.

分析 扇形的周长＝弧长＋2×半径，列方程，可求结果.

解答 设扇形的圆弧长为 l，所在圆的半径为 r，由题意得

$\begin{cases} l + 2r = 6, \\ \frac{1}{2} lr = 2, \end{cases}$ 消去 l 得：$r^2 - 3r + 2 = 0$,

解得 $r = 1$ 或 $r = 2$.

当 $r = 1$ 时，$l = 4$，中心角 $\alpha = \frac{l}{r} = \frac{4}{1} = 4$,

当 $r = 2$ 时，$l = 2$，中心角 $\alpha = \frac{l}{r} = \frac{2}{2} = 1$.

故扇形的中心角为 1 rad 或 4 rad.

学后感悟 1. 解本题的关键在于弄清一个概念——扇形的周长.

2. 要根据题意设出所需要的字母.

【例 5】 一个扇形的周长为 20，求扇形的半径、圆心角各取何值时，此扇形的面积最大？

分析 本题的实质是二次函数的最值问题.

解答 设扇形的半径为 r，面积为 S，圆心角为 α，则扇形的弧长为 $20 - 2r$.

$\therefore S = \frac{1}{2}(20 - 2r) \cdot r = -(r - 5)^2 + 25$.

$\therefore r = 5$，$\alpha = \frac{20 - 10}{5} = 2$ 时，扇形面积 S 最大，且最大值为 25.

【同类变式】 一个扇形的周长为 l，求扇形的半径、圆心角各取何值时，此扇形的面积最大.

分析 本题运用扇形面积公式 $S = \frac{1}{2} lr$（l 为弧长）以及 l 与 r 的关系式，写出 S 关于 r 的目标函数，然后就式子讨论 S 的最大值以及此时 α 的值.

解答 设扇形面积为 S，半径为 r，圆心角为 α，则扇形弧长为 $l - 2r$，所以

$S = \frac{1}{2}(l - 2r) \cdot r = -\left(r - \frac{l}{4}\right)^2 + \frac{l^2}{16}$.

故当 $r = \frac{l}{4}$，且 $\alpha = \frac{l - 2 \cdot \frac{l}{4}}{\frac{l}{4}} = 2$ 时，此扇形的面积最大.

点评 1. 本例实际上推导出一个重要公式，即当扇形周长为定值时，怎样选取中心角可使面积得到最大值.

2. 本题也可将面积表示为 α 的函数式，用判别式求解，同学们不妨试一试.

课时作业

1. 把 $-1\,485°$ 化为 $2k\pi + \alpha (k \in \mathbf{Z}, 0 \leqslant \alpha < 2\pi)$ 的形式为 ( )

A. $-8\pi + \frac{\pi}{4}$　　B. $-8\pi - \frac{7}{4}\pi$

C. $-10\pi + \frac{\pi}{4}$　　D. $-10\pi + \frac{7}{4}\pi$

2. 下列各组角中，终边相同的角是 ( )

A. $(2k+1)\pi$ 与 $(4k \pm 1)\pi$，$k \in \mathbf{Z}$

B. $\frac{k\pi}{2}$ 与 $k\pi + \frac{\pi}{2}$，$k \in \mathbf{Z}$

C. $k\pi + \frac{\pi}{6}$ 与 $2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$，$k \in \mathbf{Z}$

D. $k\pi\pm\frac{\pi}{3}$与$\frac{k\pi}{3}$,$k\in\mathbf{Z}$

3. 一条弧所对的圆心角是 2 rad,它所对的弦长为 2,则这条弧的长是 (　　)

A. $\frac{1}{\sin 1}$　　　B. $\frac{1}{\sin 2}$

C. $\frac{2}{\sin 1}$　　　D. $\frac{2}{\sin 2}$

4. 如图 1.3 - 4 中,圆的半径为 5,圆内阴影部分的面积是 (　　)

A. $\frac{175\pi}{36}$

B. $\frac{125\pi}{18}$

C. $\frac{75\pi}{18}$

D. $\frac{34}{9}\pi$

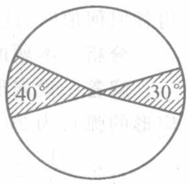


图 1.3 - 4

5. 若角 α、β 的终边关于 y 轴对称,则 α、β 的关系一定是(其中$k\in\mathbf{Z}$) (　　)

A. $\alpha+\beta=\pi$　　　B. $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$

C. $\alpha-\beta=(2k+1)\pi$　　　D. $\alpha+\beta=(2k+1)\pi$

6. 所有与$\frac{73\pi}{12}$终边相同的角的集合是什么?求不等式$0<\frac{73\pi}{12}+k\pi<2\pi$的整数解,并在 0 到 2π 范围内求出与$\frac{73\pi}{12}$终边相同的角.

7. 设半径为 12 cm,弧长为 8π cm 的弧所对圆心角为 α,α 在$0\sim2\pi$间.求出与角 α 终边相同的角的集合 A,并判断 A 是否为 $B=\left\{\theta\,\middle|\,\theta=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right\}$的真子集.

*第 2 课时　拓广习题课

拓广延伸

综合方法　角度与弧度间的转化问题

无论角度制还是弧度制,最大的好处莫过于使角度与实数建立起了一一对应的关系,即每一个角有唯一的实数(例如这个角的弧度数或度数)与它对应;反过来,每一个实数也都有唯一的一个角(例如弧度数或度数等于这个实数的角)与它对应.同时根据实际的需要,弧度与角度之间可以进行相互转化.

【例 1】 把下列各角化成 $2k\pi+\alpha(0\leqslant\alpha<2\pi,k\in\mathbf{Z})$的形式,并指出它们是第几象限角.

(1)$-1\,500°$;(2)$2\,004\pi$;(3)-6.

分析　(1)利用互化公式将$-1\,500°$化为弧度,再按题目要求写成 $2k\pi+\alpha(0\leqslant\alpha<2\pi,k\in\mathbf{Z})$的形式.

解答　(1)$-1\,500°=-1\,500\times\frac{\pi}{180}=-\frac{25}{3}\pi$

$$=-10\pi+\frac{5\pi}{3},$$

$\therefore -1\,500°$为第四象限角.

(2)$2\,004\pi=1\,002\times2\pi$,

$\therefore 2\,004\pi$ 是终边在 x 轴非负半轴上的角,不属于任何象限.

(3)$-6=-2\pi+(2\pi-6)$,$\therefore -6$ 为第一象限的角.

易错点提示　(1)易错为$-\frac{25}{3}\pi=-9\pi+\frac{2\pi}{3}$.这个等式虽然成立,但不符合题目要求.产生错误的原因是没有理解 $2k\pi+\alpha$,$0\leqslant\alpha<2\pi$,$k\in\mathbf{Z}$ 的形式,一是 π 前的系数应为偶数,二是 $0\leqslant\alpha<2\pi$.(1)还易错为$-10\pi+300°$,这里的角 α 应用弧度表示,使式子前后一致.

【例 2】 $\alpha=1$,$\beta=60°$,$r=\frac{\pi}{3}$,$\delta=-\frac{\pi}{6}$,试比较这四个角的大小.

分析　四个角的单位不同,应首先将 β 的单位角度换算成弧度,再根据实数比较大小的方法进行比较.

解答　$\because \beta=60°=\frac{\pi}{3}>1>-\frac{\pi}{6}$,

$\therefore \beta=r>\alpha>\delta$.

提醒　在同一个题目中,统一度量单位便于解决问题.

【同类变式】 若两个角的和为 1 弧度,其差为 1°,求这两个角.

分析　将两角都化成弧度,再列方程求解.