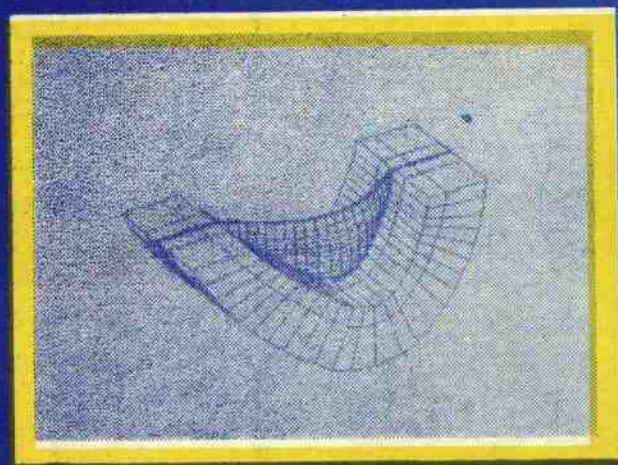


有限元法微机程序 与图形处理

陈和群 彭宣茂 编著

河海大学出版社



有限元法微机程序与图形处理

陈和群 彭宣茂 编著

河海大学出版社

(苏)新登字第 013 号

有限元法微机程序与图形处理

本书主要介绍有限元法的微机程序设计方法、技巧以及与之配套的前后数据、图形处理技术。前者给出了完整的平面八结点等参单元分块直接解的静力和自振特性计算源程序,并作了详尽的解释和说明;后者包括计算机图形学的有关基本知识和平面有限元网格的自动剖分、图形处理及成果整理中的各种曲线、平面等值线图的自动绘制方法,并给出了相应的源程序和使用说明。对空间有限元网格的自动剖分、高效消隐技术及空间任意剖面等值线图的自动绘制等问题作了介绍。书中提供的计算与前后图形处理程序互相配套,读者可直接使用。

本书可作为大学生、研究生的教材,也可供工程技术人员自学参考使用。

(本书程序备有软盘,可供拷贝)

责任编辑 朱 辉

特约编辑 王国仪

有限元法微机程序与图形处理

陈和群 彭宣茂 编著

出版发行:河海大学出版社

(南京西康路1号,邮政编码:210024)

经 销:江苏省新华书店

印 刷:河海大学印刷厂

(地 址:南京西康路1号 邮政编码:210024)

开本 787×1092 毫米 1/16 印张 15.25 字数 371 千字

1992 年 9 月第 1 版 1992 年 12 月第 1 次印刷

印数 1—1000 册

ISBN 7-5630-0502-1

TP·11

定价:4.35 元

(河海版图书若有印刷装订错误,可向承印厂调换)

言 序

60年代以后,计算技术和有限元法的发展,使科学研究和工程分析中的数值方法产生了重大的突破,过去那些使科学家和工程师们望而却步的数值计算问题都一一迎刃而解。但是,有限元法作为一种通用的工具普及到我国千万个基层单位,还是近十几年来事。由于微型计算机的大量生产和性能的迅速提高,已做到计算人员足不出户,便能解决未知数以万计的大型数值计算问题,与70年代中为了争取几分钟的通用机时而深夜奔波的艰苦情形相比,真是不可同日而语了。

随着计算对象复杂程度的增加和应用的不断深入,人们对软件质量的要求也逐渐提高。现在,不但要求程序有较高的计算效率和精度,而且要具有较强的前后处理功能,后一方面包括计算网格的自动剖分、图形显示和计算成果的图象输出等,这些内容对许多计算人员来说是比较陌生的。

陈和群和彭宣茂等同志从80年代起,就结合所承担的水工结构应力分析任务,从事微机上的计算程序和图表处理的研制和开发工作,取得了丰硕的成果。为了帮助工程数值计算人员和有关大专院校师生学习并掌握有限元法的微机程序设计方法和图形处理技术,他们将多年来的科研成果和工作经验编写成书,由河海大学出版社出版。相信此书的出版,对提高广大计算人员有限元法的微机程序设计水平和前后图形处理技术将起着有益的促进作用,故乐而为之作序。

傅作新

1992年6月

彭宣茂 陈和群

南京千景六号二〇二

前言

随着微型机性能及其应用水平的迅速提高,大量工程结构的有限元分析都能够在微型机上完成,而且解题规模越来越大,计算效率和精度要求也越来越高。因此,根据微型机的特点编制高效的计算程序和配备功能齐全的前后图形处理是现代有限元法研究及其程序设计的一个重要内容。作者多年来结合新承担的科研和生产任务,从事微型机上的有限元计算程序及其图形处理的研制和开发工作,现将工作中碰到的问题及其解决方法总结出来,以飨读者。本书的目的就在于帮助读者了解和掌握有限元法微机程序设计的一些基本方法和技巧,改变过去人工准备数据和整理成果的落后方式,而采用先进的前后图形处理技术,为结构分析软件的商品化和实用化打下基础。

本书共分六章。前三章介绍有限元法的基本原理和适合微型机特点的算法及其程序设计的方法和技巧。第一章简述有限元法程序设计的一般原则与特点,对求解弹性力学问题的有限元位移法的分析步骤和有关公式作了归纳性的介绍。第二、三章分别介绍在微型机上编制结构静力、动力有限元程序的方法、步骤和技巧。给出了完整的平面八结点等参数单元分块直接解的静力计算和自振特性计算的源程序,并作了详细的解释和说明。后三章介绍有限元计算的前后数据和图形处理技术。第四章简要介绍计算机图形学的有关基本知识。第五、六章介绍平面有限元网格的自动剖分、图形处理和成果整理中的各种曲线、平面等值线图的自动绘制方法,同时给出了相应的源程序及使用说明。还对空间有限元网格的自动剖分、高效消隐技术以及空间任意剖面等值线图的自动绘制等问题作了介绍。书中的部分内容和程序是作者近年来研究的最新成果。新提供的计算程序和前后图形处理程序互相配套,有较强的实用性,读者可用来直接解决有关的生产实际问题。

本书要求读者具备弹性力学问题的有限元法和 FORTRAN 语言方面的知识。在编著本书时考虑到教学和工程技术人员自学的特点,力求做到深入浅出,通俗易懂。

本书初稿承蒙姜弘道教授审阅,并提出了十分宝贵的意见,特此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限,书中难免有缺点乃至错误,敬请读者批评指正。

陈和群 彭宣茂

一九九二年六月于南京

目 录

第一章 绪论	(1)
§ 1-1 引言	(1)
§ 1-2 有限元分析的一般步骤	(2)
§ 1-3 大型稀疏线性方程组的分块解法	(6)
第二章 平面问题有限元程序设计	(12)
§ 2-1 8 结点等参数单元的计算公式	(12)
§ 2-2 程序流程图及原始数据的输入	(18)
§ 2-3 形成单元劲度矩阵	(21)
§ 2-4 形成整体荷载矩阵	(24)
§ 2-5 非零已知结点位移的处理	(26)
§ 2-6 整体劲度矩阵的分块	(27)
§ 2-7 分块劲度矩阵的形成、分解与前代	(29)
§ 2-8 整体结点位移矩阵的解出及输出	(33)
§ 2-9 计算应力分量与主应力	(34)
§ 2-10 源程序及其使用说明	(36)
第三章 大型特征值问题解法的程序设计	(65)
§ 3-1 基本概念和计算公式	(65)
§ 3-2 结构自振特性的程序设计	(70)
§ 3-3 解自振特性的源程序及使用说明	(74)
第四章 计算机图形处理基础	(95)
§ 4-1 图形的矩阵变换	(95)
§ 4-2 图形的窗口、裁剪和视图区	(102)
§ 4-3 曲线的拟合	(105)
§ 4-4 立体图形的消隐技术	(116)
第五章 有限元计算的前期处理	(123)
§ 5-1 平面有限元网格的自动剖分	(123)
§ 5-2 平面有限元网格的图形处理	(165)
§ 5-3 空间有限元网格的自动剖分	(171)
§ 5-4 空间有限元网格的图形处理	(179)
§ 5-5 有限元网格结点编号优化	(189)
第六章 有限元计算的后期处理	(193)
§ 6-1 成果整理中的各种曲线分布图	(193)
§ 6-2 平面有限元网格中的等值线图	(201)
§ 6-3 空间任意剖面上的等值线图	(219)
§ 6-4 一个完整的计算实例	(225)
参考文献	(238)

第一章 绪 论

§ 1-1 引 言

有限元法为用计算机解决多种不同的工程问题提供了统一的分析方法。目前微型计算机在我国已相当普遍，但实际状况表明，无论是学习过有限元法的大学生或研究生、还是用有限元法分析过工程实际问题的工程师，他们在实现有限元法的算法（即程序设计）或对程序作某些修改时却会遇到困难；另一方面，为了提高有限元计算前网格剖分、单元和结点信息的填写及计算成果的整理归纳等的工作效率和正确性，还必须具备配套的前后处理软件。本书的目的就是从以上两方面提高读者的技能。前三章主要介绍有限元法的算法特点及设计思想并针对弹性力学的静力问题和动力问题，提供两个典型的平面 8 结点等参数单元分块求解的完整源程序。结合在微型机上程序设计特点，给出了有限元程序的整体模块结构设计思路，同时还对每个程序段（模块）进行了详细解释。便于读者了解其功能与接口条件。

本书的后三章主要介绍在有限元计算中如何进行前后处理的基本理论与技术，旨在提高有限元分析的质量和效率。本书还提供了与前述两个平面程序配套的前后图形处理的源程序和说明，具体内容包括有限元网格自动生成、网格结点编号的优化、结构位移及应力等值线的绘制和各种量值的曲线图形，等等。本书还对三维问题的图形处理技术作了一定深度的介绍，如空间网格中任意剖面的等值线绘制和空间网格的高效消隐技术等。

为了对程序的执行过程有一个更清楚的了解，通常使用流程图作为分析程序的辅助手段。流程图是对计算方案的形象描述，比较直观。它以一框表示框内要做的事，以箭头表示执行流向。图 1-1 为流程图中常用的一些框图样。

- (a) 叙述框 表示一般处理功能。
- (b) 判断框 表示在几个可选择的路径中，判断选取某个路径。
- (c) 循环框 表示在初值至终值间进行循环。
- (d) 输入/出框 表示对信息的处理。
- (e) 起止框 表示流程的开始或结束。
- (f) 圆圈 表示流程外某个地方出口点或入口点。
- (g) 箭头 表示流程的路径和方向。

用计算机进行数值的工作流程图见图 1-2。编写有限元法的程序也必须遵循这些过程，但有限元程序有它自身的一些特点：

1. 有限元程序一般要求解几百阶，甚至成千上万阶的线性代数方程组，结构整体劲度矩阵 $[K]$ 的阶数很高。若采用二维数组存储 $[K]$ ，往往无法在微机上实现。以后会知道， $[K]$ 是按一维变带宽存储的。当 $[K]$ 的阶数很高时，需存储的元素只占满阵元素的一小部分。这样对形成整体劲度矩阵 $[K]$ 与求解线性代数方程组等子程序（模块）的编写增加了难度。

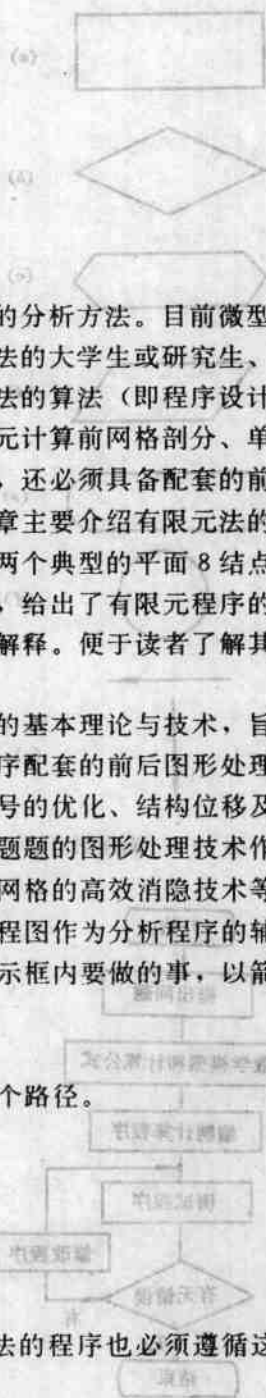




图 1-1 流程图符号

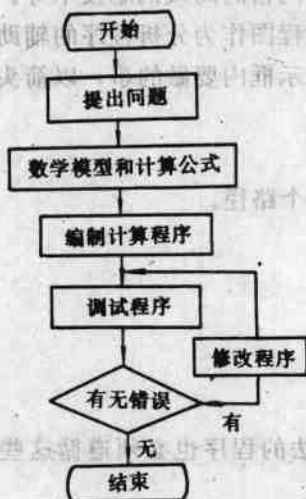


图 1-2 流程图

2. 用有限元法分析实际问题时,一般须求解大型线性代数方程组,如何提高计算效率是一个重要问题。如本书中采用多种工况并列求解是提高效率的一个有效措施,因为 $[K]$ 的分解一般需占全部计算时间的 80% 左右(线性问题);对高次等参数单元采用单元分析,即形成单元劲度矩阵的同时产生单元荷载列阵,也能提高计算效率,当然还有其它措施。

在微型机上编制有限元程序,除对微机的操作系统编译软件要有所了解外,还要考虑如何有效地使用计算机内存资源,以提高计算效率。在本书所提供的两个程序中都设置了一个大容量数组 A,根据计算规模,动态分配一些常用数组的最大容量,使更多的内存容量让给整体劲度矩阵,再采用有限元网格结点编号优化和分块求解技术等,使得一般大型问题也能在微机上运行。

由于种种原因,在使用有限元程序时往往需要根据实际问题进行修改与完善,如增加某些单元类型;扩大功能,等等。因此,编写程序时要考虑到便于修改,这实际上是如何组织好每个模块和模块中的哑元、公共块的设置等问题,要在实践中不断提高。

限于篇幅,本书只提供有限元法的平面程序和配套的前后处理程序。但它们的设计思想具有一般性,可以推广或直接应用到三维问题或其它领域。如对第二章中的大型线性代数方程组的分块解法子程序和第三章中特征值方程的分块解法子程序等,读者都可直接进行移植。

§ 1-2 有限元分析的一般步骤

本书只考虑以结点位移为基本未知量的弹性力学问题的有限元位移法,其分析步骤可概括如下。

一、离散化

离散化就是用有限多个一定大小的单元在有限个结点上相互连接的离散结构模型替代原连续结构。平面问题中常用的单元如图 1-3。显然,离散后的模型与原结构存在差异,两者自由度不同,离散结构只是有限个自由度的体系。但这种差异是可以缩小的,最简单的办法是加密网格。一般求局部应力就采用局部加密网格。

离散结构的基本未知量是所有可动结点的结点位移值。以后用 $\{\delta_i\}$ 表示第 i 结点的结点位移列阵,用 $\{\delta\}^e$ 表示单元结点的位移列阵,用 $\{\delta\}$ 表示整个结构的未知结点位移列阵。

对作用在离散体上的实际荷载(集中力、分布体力及分布面力)进行单元分析时,应

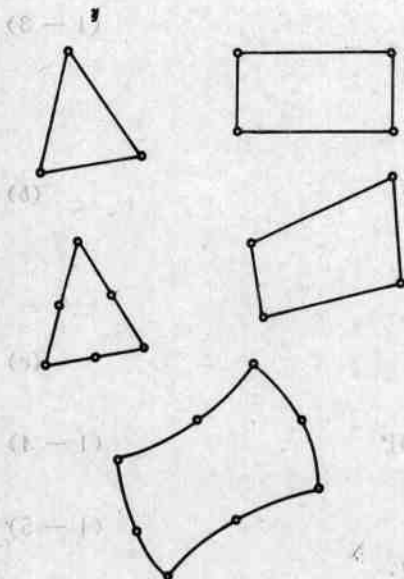


图 1-3 单元类型

$$\begin{array}{ccccc}
 \{\delta_i\} & \{\delta\}^e & \{R_i\} & \{r\}^e & \{F\}^e \\
 \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_8 \\ v_8 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_8 \\ y_8 \end{Bmatrix} & \begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ \vdots \\ U_8 \\ V_8 \end{Bmatrix}
 \end{array}$$

在离散结构中，通常是已知物体的形状和大小（由各个结点的坐标值及各个单元的结点组成），物体的材料常数（即每个单元 E, μ 等），物体所受的外力（即 $\{R\}$ ）以及物体所受的约束情况（即位移边界条件）等，而需要求解的基本量是每个结点的未知位移值，即 $\{\delta\}$ 。根据位移 $\{\delta\}$ 可进一步求出每个单元的应力分量。

二、单元分析

有限元法中的单元分析就是由单元结点位移列阵 $\{\delta\}^e$ 确定单元中的位移分量列阵 $\{f\}$ 、应变分量列阵 $\{e\}$ 、应力分量列阵 $\{\sigma\}$ 以及结点力列阵 $\{F\}^e$ 。平面问题的 $\{f\}$ 、 $\{e\}$ 、 $\{\sigma\}$ 分别为 $[u, v]^T$ 、 $[\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}]^T$ 、 $[\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T$ 。

首先建立单元位移模式的表达式：

$$\{f\} = [N]\{\delta\}^e \quad (1-1)$$

其中 $[N]$ 是形函数矩阵，反映单元中的位移形状。

接着，将式 (1-1) 代入几何方程

$$\{e\} = [\partial]\{f\} \quad (a)$$

即可求得

$$\{e\} = [\partial][N]\{\delta\}^e = [B]\{\delta\}^e \quad (1-2)$$

其中

按静力等效原则移置到单元的结点上，用有限元计算时以结点荷载表示，用 $\{R_i\}$ 表示第 i 个结点的结点荷载列阵，用 $\{r\}^e$ 表示单元的结点荷载列阵，用 $\{R\}$ 表示整体结构的结点荷载列阵， $\{R\}$ 由 $\{r\}^e$ 集合而成。

由于单元所受的荷载都已被移置到结点上，所以每个单元只受有结点对它作用的所谓结点力，单元的结点力阵用 $\{F\}^e$ 表示。对于平面问题的 8 结点等参数单元（见图 1-4），它们的 $\{\delta\}^e$ 、 $\{\delta\}^e$ 、 $\{R_i\}$ 、 $\{r\}^e$ 、 $\{F\}^e$ 表示如下：

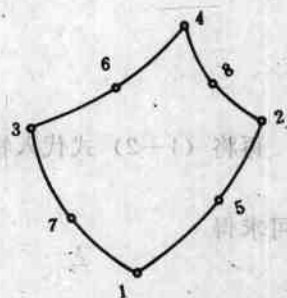


图 1-4 平面 8 结点单元

称为应变转换矩阵; $[B]$ 是个微分算子矩阵, 平面问题中

称为应变转换矩阵; $[B]$ 是个微分算子矩阵, 平面问题中

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (1-3)$$

再将 (1-2) 式代入物理方程

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}$$

即可求得

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta\}^e = [S]\{\delta\}^e \quad (1-4)$$

其中

$$[S] = [D][B]$$

称为应力转换矩阵; $[D]$ 是弹性矩阵, 在平面应力问题中,

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (1-5a)$$

在平面应变问题中,

$$[D] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \quad (1-5b)$$

(1-5b) 式亦可用剪切弹性模量 G 和拉密系数

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$$

来表示。注意到:

$$\lambda + 2G = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}; \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

(1-5b) 式可化为

$$[D] = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & 0 \\ D_2 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

其中

$$D_1 = \lambda + 2G = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}, \quad D_2 = \lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)},$$

$$D_3 = G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

为了能由 $\{\delta\}^e$ 确定 $\{F\}^e$, 须利用虚功方程。从离散体中割离出任一单元, 只受结点力

作用, 因此, 由虚功原理可得

$$(\{\delta^*\})^T \{F\}^e = \iint_{\Omega} \{\epsilon^*\}^T \{\sigma\} t dx dy \quad (e)$$

其中 $\{\delta^*\}$ 是单元结点的虚位移, $\{\epsilon^*\}$ 是单元中的虚应变, t 是单元厚度。由 (1-2) 式可得 $\{\epsilon^*\} = [B] \{\delta^*\}$, 代入 (e) 式, 得

$$(\{\delta^*\})^T \{F\}^e = (\{\delta^*\})^T \iint_{\Omega} [B]^T \{\sigma\} t dx dy$$

由于虚位移是任意的, 故有

$$\{F\}^e = \iint_{\Omega} [B]^T \{\sigma\} t dx dy \quad (f)$$

再将 (1-4) 式代入 (f) 式, 有

$$\{F\}^e = [k]^e \{\delta\}^e \quad (1-8)$$

其中

$$[k]^e = \iint_{\Omega} [B]^T [D] [B] t dx dy \quad (1-9)$$

$[k]^e$ 称为单元劲度矩阵, 它是单元结点力和单元结点位移之间的转换矩阵。

三、结构的整体分析

有限元法中结构整体分析的首要任务就是建立以结构的结点位移列阵 $\{\delta\}$ 为未知量的整体结点平衡方程组

$$[K] \{\delta\} = \{R\} \quad (1-10)$$

其中 $[K]$ 是结构整体劲度矩阵, $\{R\}$ 是结构整体结点荷载列阵。

对离散后的结构应用最小势能原理。设离散结构共有 NE 个单元, 在实际平衡状态下单元的形变势能为 U^e , 外力势能为 V^e , 总势能是 U^s , 则离散结构的总势能 U 为

$$U = \sum_{e=1}^{NE} U^e = \sum_{e=1}^{NE} U^e + \sum_{e=1}^{NE} V^e \quad (g)$$

其中

$$\begin{cases} U^e = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \{\epsilon\}^T \{\sigma\} t dx dy \\ V^e = -(\{f\}^T \{P\} + \iint_{\Omega} \{f\}^T \{p\} t dx dy + \int_s \{f\}^T \{\bar{p}\} t ds) \end{cases} \quad (h)$$

上式的 $\{P\}$ 、 $\{p\}$ 和 $\{\bar{p}\}$ 分别是作用在单元上的集中力列阵、分布体力列阵和分布面力列阵, s 是指作用着面力的单元边线。

将 (1-1)、(1-2) 和 (1-4) 三式代入 (h) 式, 即可将 U^e 、 V^e 用 $\{\delta\}^e$ 表示为

$$\begin{cases} U^e = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (\{\delta\}^e)^T [B]^T [D] [B] \{\delta\}^e t dx dy = \frac{1}{2} (\{\delta\}^e)^T [k]^e \{\delta\}^e \\ V^e = -(\{\delta\}^e)^T [N]^T \{P\} + \iint_{\Omega} [N]^T \{p\} t dx dy + \int_s [N]^T \{\bar{p}\} t ds \\ = -(\{\delta\}^e)^T \{r\}^e \end{cases} \quad (i)$$

其中

$$\{r\}^e = [N]^T \{P\} + \iint_{\Omega} [N]^T \{p\} dx dy + \int_s [N]^T \{p\} ds \quad (1-11)$$

这是计算单元等效结点荷载列阵的公式。

为了满足矩阵相加法则, 将 (k) 式中的 U^e 、 V^e 用 $\{\delta\}$ 来表示, 须将 $\{\delta\}^e$ 及 $\{r\}^e$ 的行数扩大到与 $\{\delta\}$ 及 $\{R\}$ 的行数相同; 再将单元劲度矩阵 $[k]^e$ 的阶数扩大到与整体劲度矩阵 $[K]$ 的阶数一样, 但它们仅在所考察单元的结点对应位置的行与列上有非零元素而在其它行与列上的元素均为零。若将扩大了 $[k]^e$ 记为 $[K]^e$, $\{r\}^e$ 记为 $\{R\}^e$, 则 (i) 式成为

$$\begin{cases} U^e = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K]^e \{\delta\} \\ V^e = - \{\delta\}^T \{R\}^e \end{cases} \quad (j)$$

将式 (j) 代入式 (g), 得

$$U_P = \sum_{e=1}^{NE} \frac{1}{2} \{\delta\}^T [K]^e \{\delta\} - \sum_{e=1}^{NE} \{\delta\}^T \{R\}^e \quad (k)$$

根据最小势能原理

$$\frac{\partial U_P}{\partial \{\delta\}} = 0 \quad (l)$$

将式 (k) 代入式 (l), 得

$$\sum_{e=1}^{NE} [K]^e \{\delta\} = \sum_{e=1}^{NE} \{R\}^e \quad (m)$$

将式 (m) 与式 (1-10) 比较有

$$[K] = \sum_{e=1}^{NE} [K]^e \quad (1-12)$$

$$\{R\} = \sum_{e=1}^{NE} \{R\}^e \quad (1-13)$$

上述两式表明, 结构整体劲度矩阵 $[K]$ 与整体结点荷载列阵 $\{R\}$ 是由组成结构的所有单元劲度矩阵与单元结点荷载列阵叠加得到的。

上述有限元分析步骤原则上都可以编制有关的计算机应用软件来完成, 一般执行结构的离散化与计算成果整理的程序称为有限元的前后处理软件, 执行其它各步骤的程序则称为有限元分析软件。为了便于读者学习, 本书将在下列各章中分别进行介绍, 但在有限元分析软件中都留有前后处理的接口。

§ 1-3 大型稀疏线性方程组的分块解法

有限元法的支配方程:

$$[K] \{\delta\} = \{R\} \quad (1-14)$$

一般是个大型的稀疏线性代数方程组, 它的解法可分两大类: 迭代法与直接法。迭代法所需要的存储量较少, 程序的编制亦易, 但计算时间事先较难预估, 在某些情况下还可能不收敛; 直接法运算时间较短, 事先可以估算计算时间, 一般均可得到精度较高的解答, 还能一次求解多种工况, 但需要的存储量较大, 编制程序有一定难度。本书采用克劳特 (Crout) 直接解法, 它包括三个过程: 分解、前代和回代。

一、克劳特 (Crout) 解法

由于 $[K]$ 的对称正定性, 它总可以唯一地分解为下三角矩阵 $[L]$ 和主元素为 1 的上三角矩阵 $[U]$ 的乘积, 即

$$[K]_{n \times n} = [L]_{n \times n} [U]_{n \times n} \quad (1-14)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & & & & \\ k_{21} & k_{22} & & & \\ \dots & \dots & \dots & & \\ k_{j1} & k_{j2} & \dots & k_{jj} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{i1} & k_{i2} & \dots & k_{ij} & \dots & k_{ii} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nj} & \dots & k_{ni} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{对称} \quad (a)$$

$$[L] = \begin{bmatrix} l_{11} & & & & \\ l_{12} & l_{22} & & & \\ \dots & \dots & \dots & & \\ l_{j1} & l_{j2} & \dots & l_{jj} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{i1} & l_{i2} & \dots & l_{ij} & \dots & l_{ii} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nj} & \dots & l_{ni} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad (b)$$

$$[U] = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1j} & \dots & u_{1i} & \dots & u_{1n} \\ & 1 & \dots & u_{2j} & \dots & u_{2i} & \dots & u_{2n} \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & 1 & \dots & u_{ji} & \dots & u_{jn} \\ & & & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & 1 & \dots & u_{in} \\ & & & & & & 1 & \dots \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (c)$$

$[L]$ 与 $[U]$ 中的元素有如下关系

$$u_{pi} = l_{ip}/l_{ii}, \quad (i = 1, 2, \dots, n; p = 1, 2, \dots, i-1) \quad (d)$$

即 $[U]$ 中第 i 列第 1 行至 $i-1$ 行各元素分别等于 $[L]$ 中第 i 行第 1 列至第 $i-1$ 列各个元素除以各列的主元素 l_{ii} 。由 (d) 式可知 $[L]$ 及 $[U]$ 两个矩阵中独立元素的个数与 (a) 式中对称矩阵 $[K]$ 中独立元素的个数相同, 都是 $n(n+1)/2$ 个。

根据矩阵相乘和两矩阵相等的法则, 由 (1-14) 式, 可得

$$k_{ij} = \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip} u_{pj} + l_{ij} \times 1, \quad (i \geq j)$$

$$k_{ii} = \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip} u_{pi} + l_{ii} \times 1, \quad (i = j)$$

上述两式可改写为

$$l_{ij} = k_{ij} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip} u_{pj}, \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, i-1) \quad (e)$$

$$l_{ii} = k_{ii} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip} u_{pi}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (f)$$

若将(d)式代入(f)式,得

$$l_{ii} = k_{ii} - \sum_{p=1}^{i-1} u_{pi} u_{pi} l_{pp}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (g)$$

当上式中求和符号 $\sum$ 的上限小于下限时,其和式为零(下同)。

将式(1-14)代入支配方程(1-10),得

$$[L][U]\{\delta\} = \{R\} \quad (h)$$

令

$$[U]\{\delta\} = \{g\} \quad (1-15)$$

则

$$[L]\{g\} = \{R\} \quad (1-16)$$

将式(1-16)展开

$$\begin{bmatrix} l_{11} & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & & \\ \dots & \dots & & & \\ l_{i1} & l_{i2} & \dots & l_{ii} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{ni} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_i \\ \vdots \\ g_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{Bmatrix}$$

由上式自上而下求得中间变量 $\{g\}$ 中任一元素 g_i 的公式为

$$g_i = (R_i - \sum_{p=1}^{i-1} u_{pi} l_{pp} g_p) / l_{ii} \quad (i)$$

令 $l_{ii} g_i = f_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 则(i)式可改写为

$$f_i = R_i - \sum_{p=1}^{i-1} u_{pi} f_p, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (j)$$

$$g_i = f_i / l_{ii} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (k)$$

将式(1-15)展开

$$\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1i} & \dots & u_{1n} \\ & 1 & \dots & u_{2i} & \dots & u_{2n} \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & 1 & \dots & u_{ni} \\ & & & & 0 & \dots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_i \\ \vdots \\ \delta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_i \\ \vdots \\ g_n \end{Bmatrix} \quad (l)$$

从上式可明显看出,可从第 n 个开始自下而上求得 δ_i ,即

$$\delta_i = g_i - \sum_{p=i+1}^n u_{ip} \delta_p, \quad (i = n, n-1, \dots, 1) \quad (m)$$

纵观上述一组公式,求解(1-10)式可归纳为三步:首先由(d)、(e)、(g)三式进行 $[K]$ 的分解;再由(j)、(k)两式自上而下求得中间变量 $\{g\}$ 与 $\{f\}$,称为前代;最后由(m)式自下而上求得结点位移列阵 $\{\delta\}$ 的元素,称为回代。下面着重讨论在计算机中如何

存贮和实现这些计算公式。

(一) $[K]$ 分解后的带状保持不变

由于 $[K]$ 是对称矩阵, 并且按一定规则编结点号时, 其非零元素呈带状分布在主对角线两侧, 见图 1-5。由分解公式 (e) 可知, 带缘外零元素分解后得到的 l (或 u) 元素仍为零。这可取任一行来验证。如以 $[K]$ 的第 j 行为例, 设带外有 $m-1$ 个零元素, 即 $k_{jm} \neq 0$, 而 $k_{j1} = k_{j2} = \dots = k_{j,m-1} = 0$, 由 (e) 式得

$$l_{j1} = k_{j1} = 0$$

$$l_{j2} = k_{j2} - \sum_{p=1}^1 l_{jp} u_{pj} = k_{j2} - l_{j1} u_{1j} = 0$$

依次类推可求得 $l_{j3} = l_{j4} = \dots = l_{j,m-1} = 0$,

再由 (d) 式得 $u_{1j} = u_{2j} = \dots = u_{m-1,j} = 0$ 。由此说明上述结论是正确的。读者可验证带状内的零元素, 在 $[K]$ 分解为 $[L]$ 后不一定保持为零。

再由上述结论得到推论: 带缘上的非零元素 k_{jm} , 在分解成 l 元素时, 其值不变, 即 $l_{jm} = k_{jm}$ 。

(二) 共享存贮单元

仔细分析 (e)、(d) 两式, 就不难看出 $[K]$ 中任一个 k_{ij} (k_{ii}) 仅在计算 l_{ij} (l_{ii}) 时要用到, 因此, 分解后的新元素 l_{ij} (l_{ii}) 仍可存贮在 k_{ij} (k_{ii}) 位置上, 而无需开辟新的存贮单元。由 (d) 式同理可得 $[U]$ 的副元素与 $[L]$ 的副元素可共享存贮单元。再从 (j)、(k)、(l) 式中可知 $\{R\}$ 、 $\{g\}$ 、 $\{f\}$ 、 $\{d\}$ 可共享同一列阵的存贮单元。

再进一步分析 (e)、(g) 两式。从 (e) 式可求得第 i 行的 $[L]$ 副元素, 但求该行的主元素 l_{ii} 时, 又要将该行的 i 副元素通过 (d) 式使其变为对应的 u 元素, 即 $u_p = l_{ip}/l_{pp}$ 。另一方面在前代、回代公式 (i)、(j)、(m) 中也只要 $[L]$ 的主元素 l_{ii} 及 $[U]$ 的副元素。根据以上情况在 $[K]$ 分解后只需保留 $[U]$ 的副元素和 $[L]$ 的主元素, 而 $[U]$ 是上三角矩阵, 现在要存贮到对应于 $[L]$ 的副元素位置上, 即 u_p ($i > p$) 存在 l_{ip} 的位置上, 故在编写程序时, 必须将所有公式中 u 元素的行、列下标进行对换。下面提供的一套公式是程序中实际应用的公式:

$$(e) \text{ 式成为: } l_{ij} = k_{ij} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip} u_{pj}, \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, i-1) \quad (1-17)$$

$$(d) \text{ 式成为: } u_{ip} = l_{ip}/l_{pp}, \quad (i = 1, 2, \dots, n; p = 1, 2, \dots, i-1) \quad (1-18)$$

$$(g) \text{ 式成为: } l_{ii} = k_{ii} - \sum_{p=1}^{i-1} u_{ip} u_{ip} l_{pp}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-19)$$

$$(j) \text{ 式成为: } f_i = R_i - \sum_{p=1}^{i-1} u_{ip} f_p, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-20)$$

$$(k) \text{ 式成为: } g_i = f_i/l_{ii}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1-21)$$

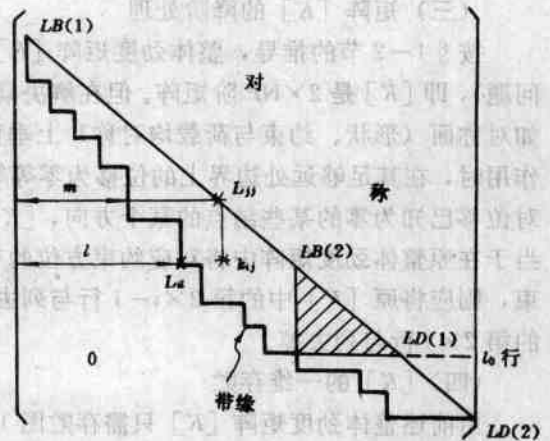


图 1-5 $[K]$ 矩阵带状分布形式

$$(1) \text{ 式成为: } \delta_i = g_i - \sum_{p=i+1}^n u_p \delta_p \quad (i = n, n-1, \dots, 1) \quad (1-22)$$

(三) 矩阵 $[K]$ 的降阶处理

按 § 1-2 节的推导, 整体劲度矩阵 $[K]$ 的阶数应是总的结点数 (NP) 的二倍 (平面问题), 即 $[K]$ 是 $2 \times NP$ 阶矩阵。但在解决具体问题时往往会出现部分边界上的位移为零。如对称面 (形状、约束与荷载均对称) 上垂直于对称面方向的位移为零; 局部区域有荷载作用时, 在其足够远处边界上的位移为零等等。这样, 在建立 (1-10) 方程时可以不考虑对位移已知为零的某些结点的某个方向, $[K]$ 的实际阶数是结构的总自由度数 N , 这就相当于在原整体劲度矩阵中将对应约束方位的有关行、列都去掉。例如第 i 结点的 x 方向受约束, 则应将原 $[K]$ 中的第 $2 \times i - 1$ 行与列去掉; 又如 j 结点 y 方向受约束, 则将 $[K]$ 中的第 $2 \times j$ 行与列去掉。

(四) $[K]$ 的一维存贮

由前述整体劲度矩阵 $[K]$ 只需存贮图 1-5 中下三角带状内的元素, 显然不能采用通常二维数组的存贮办法, 而可采用一维数组的存贮方式。在程序中以 $SK(*)$ 表示该一维数组, 在图 1-5 带状内的元素将按行的次序排列在 $SK(*)$ 之中。

在具体计算时, 必须确定 $[K]_{x,x}$ 中任一元素 k_{ij} ($i > j$) 存贮在 $SK(*)$ 中的位置。若我们已经建立了 $[K]$ 的主元素 k_{ii} ($i = 1, 2, \dots, n$) 存贮在 $SK(*)$ 中位置的指示向量 $MA(*)$, 即 $MA(I)$ 的值表示 k_{ii} 主元素存贮在 $SK(*)$ 中的位置是 $SK(MA(I))$ 。例如, $MA(1) = 105$ 则 k_{11} 的值应存贮在 $SK(105) = k_{11}$ 。对任一元素 k_{ij} 对应的存贮位置为 $SK(MA(I) - (I - J))$, 其中 $MA(I) - (I - J)$ 表示在主元素 k_{ii} 前面第 $I - J$ 个元素的位置上。

(五) 正确使用计算公式

由于 $[K]$ 矩阵在带状外的大量零元素是不存贮的, 根据公式 (1-17) 至 (1-22) 编制程序时, 要注意到公式中求和符号 Σ 的上下限的取值, 如 (1-17)、(1-19) 和 (1-20) 中 Σ 下限 p 的取值都不能从 1 开始。对 (1-19) 与 (1-20) 式必须从第 i 行的第一个非零元素的列号 l 开始, 这可以由下式求得

即 p 从 l 至 $i-1$ 求和。对 (1-17) 式的计算, p 可从第 i 行的第一个非零元素的列号 l 和第 j 行第一个非零元素的列号 m 中较大值开始, 即 $p_{\text{下限}} = \max(l, m)$, 见图 1-5。

更严格地说, 由于带缘上的 k_{ij} 与 k_{ji} 是相等的, 所以 p 的下限值还能在以上值的基础上加 1, 书中的程序就是这样处理的。如何高效、正确地编制 (1-22) 式的程序段, 详见 § 2-7 节。

(六) 分块求解技术

由 $[K]$ 的非零元素呈带状分布及 crout 解法的特点, 为大型稀疏线性方程组 (1-10) 提供了分块求解的有利条件。若 $[K]$ 中要存贮的元素数量很大, 在微机的有效内存中存贮不下, 则可采用分块求解技术。

设程序中给 $SK(*)$ 的容量只有 10 万, 而整体劲度矩阵 $[K]$ 按变带宽存贮需要 12 万, 则在 $SK(*)$ 中最多只能存贮 $[K]$ 的前 L_0 数行, 即满足: $MA(L_0) \leq 100000$, $MA(L_0 + 1) > 100000$, 见图 1-5, 图中分别以 $LB(I)$, $LD(I)$ 记第 I 块的起始行号与结束行号。

这样我们可以先在第一块的 $SK(*)$ 中形成自由度数不大于 L_0 的刚度系数 k_{ij} , 然后再按公式 (1-17) 至 (1-21) 式进行分解和前代得到 $g_1, g_2, \dots, g_{10}$, 为了保证下一块的刚度系数能进行分解, 必须要将图 1-5 中影线部分的 l, u 元素保留下来, 首先将影线部分元素顺序移置到 $SK(*)$ 的首部, 接着将 $SK(*)$ 中其余部分的存储单元充零, 准备形成下一块的新元素 k_{ij} , 再进行分解、前代。按此类推直至将解得全部的 g_i 。然后, 再对第二块、第一块执行 (1-22) 式, 可将全部的 $\{\delta\}$ 解出。

左公算书前元单数参等点第 8. 1-5 2

左数变荷坐, 左数等分, 一

代原代左公算书前元单数参等点第 8. 1-5 2 图于板

$$(1-5) \quad \sum_{i=1}^n f_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n g_i = 0$$

或列

$$(2-5) \quad \sum_{i=1}^n f_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n g_i = 0$$

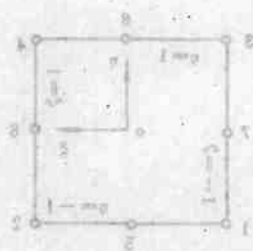
量代时坐和数就第 8. 1-5 2 图于板 (8, ..., 5, 1=1) 中其
代示素 8, 2 第坐满就第 8. 1-5 2 图于板

$$(1, 2, 3, 1=1) \quad (1 - 0.8 + 2.2)(0.8 + 1)(2.2 + 1) \frac{1}{1} = 12$$

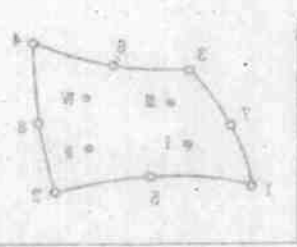
$$(2-5) \quad (0.8 = 1) \quad (0.8 + 1)(2.2 + 1) \frac{1}{2} = 12$$

$$(8, 7=4) \quad (2.2 + 1)(0.8 + 1) \frac{1}{2} = 12$$

量代时坐和数就第 8. 1-5 2 图于板 (8, ..., 5, 1=1) 中其



(a)



(b)

(1-5 2 图于板)