高校经典教材同步辅导丛书

配套高教版·谢处方　饶克谨编

九章丛书

电磁场与电磁波

（第四版）

同步辅导及习题全解

主编　王谋　孟浩

· 知识点窍　· 逻辑推理　· 习题全解

· 全真考题　· 名师执笔　· 题型归类

1.4

新版

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

高校经典教材同步辅导丛书

电磁场与电磁波（第四版）同步辅导及习题全解

主 编 王 谋 孟 浩

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内容提要

本书是高等教育出版社出版的谢处方和饶克谨编写的《电磁场与电磁波》(第四版)教材的配套辅导书。

本书共 8 章，具体内容包括：矢量分析、电磁场的基本规律、静态电磁场及其边值问题的解、时变电磁场、均匀平面波在无界空间中的传播、均匀平面波的反射与透射、导行电磁波、电磁辐射。全书由基本要求、内容提要及课后习题全解等部分组成，旨在帮助读者掌握知识要点，学会分析问题和解决问题的方法技巧，并且提高学习能力及应试能力。

本书可作为高等院校物理化学课程的同步辅导使用，也可作为研究生入学考试的复习资料，同时可供本专业教师及学生参考。

图书在版编目（CIP）数据

电磁场与电磁波（第四版）同步辅导及习题全解 / 王谋，孟浩主编. —北京：中国水利水电出版社，2009
（高校经典教材同步辅导丛书）
ISBN 978-7-5084-6677-4

Ⅰ. 电… Ⅱ. ①王…②孟… Ⅲ. ①电磁场—高等学校—教学参考资料②电磁波—高等学校—教学参考资料
Ⅳ. O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 124777 号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：吴　萍　封面设计：李　佳

书　名	高校经典教材同步辅导丛书 电磁场与电磁波（第四版）同步辅导及习题全解
作　者	主　编　王　谋　孟　浩
出版发行	中国水利水电出版社（北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座　100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：（010）68367658（营销中心）、82562819（万水）
经　售	全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　版	北京万水电子信息有限公司
印　刷	北京市梦宇印务有限公司
规　格	170mm×227mm　16 开本　12 印张　265 千字
版　次	2009 年 7 月第 1 版　2009 年 7 月第 1 次印刷
印　数	0001—6000 册
定　价	16.00 元

凡购买我社图书，如有缺页、倒页、脱页的，本社营销中心负责调换

版权所有・侵权必究

编　委（排名不分先后）

程丽园	李国哲	陈有志	苏昭平
郑利伟	罗彦辉	邢艳伟	范家畅
孙立群	李云龙	刘　岩	崔永君
高泽全	于克夫	尹泉生	林国栋
黄　河	李思琦	刘　闯	侯朝阳

前言

电磁场与电磁波是高等学校工科电子信息类专业的一门技术基础课。谢处方、饶克谨教授编著，杨显清、王园、赵家升教授修订的《电磁场与电磁波》(第四版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材，被国内许多高等院校采用。为了帮助读者更好地学好这门课程，掌据更多知识，我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《电磁场与电磁波(第四版)同步辅导及习题全解》。

电磁场与电磁波课程理论性强、概念抽象、所需的数学知识较多，给学生学习带来很大困难，尤其是课后习题，往往难于下手。本辅导书以教材内容为依据，对教材的主要内容进行了归纳，对每章的知识点提出了基本要求，并将重点、难点提炼出来，形成内容提要版块。本书结合每章知识，列举了一些典型例题，并进行了深入分析。对每章的课后习题，除了给出详细的解答，本书还有如下特点：

◎ 知识点窍：运用公式、定理及定义来点明知识点。

◎ 逻辑推理：阐述习题的解题过程。

◎ 解题过程：概念清晰、步骤完善、数据准确、附图齐全。

"知识点窍"和"逻辑推理"是本书的精华所在，是由多位著名教授根据学生在解题过程中存在的问题，进行分析而研究出来的一种新型的、拓展思路的解题方法。"知识点窍"提纲挈领地抓住了题目的核心知识，让学生清楚地了解出题者的意图，而"逻辑推理"则注重引导学生思维，旨在培养学生科学的思维方法，即掌据答题的思维技巧。在此基础上提供了详细的"解题过程"，使学生熟悉整个答题过程。

本书在编写过程中参考了高等教育出版社出版的赵家升等主编的《电磁场与电磁波教学指导书》(第三版)，在此深表感谢。

由于编者水平有限和时间仓促，书中不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编者

2009 年 6 月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目录

第 1 章

矢量分析

1.1 基本要求

1. 理解标量场与矢量场的概念.
2. 掌握矢量场的散度和旋度、标量场的梯度计算公式和方法.
3. 掌握和应用散度定理和斯托克斯定理.
4. 理解亥姆霍兹定理的重要意义.

1.2 内容提要

1. 标量场与矢量场

(1)若所研究的物理量为一标量,则该物理量所确定的场为标量场. 如温度场、密度场等. 用一个标量函数来表示该场为:

$$u = u(x, y, z)$$

(2)若所研究的物理量为一矢量,则该物理量所确定的场为矢量场. 如力场、电场等. 用一个矢量函数来表示该场为:

$$\boldsymbol{F} = F(x, y, z)$$

2. 矢量场的散度

矢量场的散度$\nabla \cdot \boldsymbol{F}$是个标量,在直角坐标系、圆柱坐标系及球坐标系中的计算式分别为:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r)+\frac{1}{r\sin\theta\partial\theta}(\sin\theta F_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial\phi}$$

3. 矢量场的旋度

矢量场的旋度$\nabla\times\boldsymbol{F}$是个矢量，在直角坐标系、圆柱坐标系及球坐标系中分别表示为：

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\phi & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_\rho & \rho F_\varphi & F_z\end{vmatrix}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi}\\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta F_\varphi\end{vmatrix}$$

4. 标量场的方向导数与梯度

在直角坐标系中方向导数的计算公式为

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

式中$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$是方向$\boldsymbol{l}$的方向余弦.

标量场的梯度∇u是一个矢量，在直角坐标中，梯度的表达式为

$$\nabla u=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial u}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial u}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial u}{\partial z}$$

在柱坐标、球坐标中旋度表达式为：

$$\nabla u=\boldsymbol{e}_r\frac{\partial u}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\nabla u=\boldsymbol{e}_r\frac{\partial u}{\partial r}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}_\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}$$

梯度矢量有一个重要的性质，即它的旋度恒等于零.

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\ u)=\nabla\times\nabla u=0$$

5. 散度定理和斯托克斯定理

矢量分析中的一个重要定理是

$$\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}V=\oint_S\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

上式称为散度定理(或高斯定理).

另一个重要定理就是斯托克斯定理,即

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \nabla x\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

其中 S 为回路 C 所包围的面积.

6. 亥姆霍兹定理

在有限区域 V 内,任一矢量场由它的散度、旋度和边界条件惟一地确定,且可表示为:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = -\nabla u(\boldsymbol{r}) + \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

其中,$u(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' - \frac{1}{4\pi}\oint_s \frac{\boldsymbol{e}'_n \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}S'$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\nabla' \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V' - \frac{1}{4\pi}\oint_s \frac{\boldsymbol{e}'_n \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}S'$$

7. 格林定理

格林第一恒等式:$\int_V (\varphi\nabla^2\psi + \nabla\varphi \cdot \nabla\psi)\mathrm{d}V = \oint_S \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\mathrm{d}S$

格林第二恒等式:$\int_V (\varphi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\varphi)\mathrm{d}V = \oint_S \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$

1.3　习题全解

1.1　给定 3 个矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 如下:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y 2 - \boldsymbol{e}_z 3$$
$$\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{e}_y 4 + \boldsymbol{e}_z$$
$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{e}_x 5 - \boldsymbol{e}_z 2$$

求:(1)$\boldsymbol{e}_A$;(2)$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$;(3)$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$;(4)$\theta_{AB}$;(5)$\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量;(6)$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$;(7)$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$和$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$;(8)$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$.

【解题过程】

(1)$\boldsymbol{e}_A = \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y 2 - \boldsymbol{e}_z 3}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}} = \boldsymbol{e}_x\frac{1}{\sqrt{14}} + \boldsymbol{e}_y\frac{2}{\sqrt{14}} - \boldsymbol{e}_z\frac{3}{\sqrt{14}}$

(2)$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}| = |(\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y 2-\boldsymbol{e}_z 3)-(-\boldsymbol{e}_y 4+\boldsymbol{e}_z)| = |\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y 6-\boldsymbol{e}_z 4| = \sqrt{53}$

(3)$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y 2-\boldsymbol{e}_z 3)\cdot(-\boldsymbol{e}_y 4+\boldsymbol{e}_z) = -11$

(4)由 $\cos\theta_{AB} = \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|} = \frac{-11}{\sqrt{14}\times\sqrt{17}} = -\frac{11}{\sqrt{238}}$,得

$$\theta_{AB}=\arccos\left(-\frac{11}{\sqrt{238}}\right)=135.5^{\circ}$$

(5)$\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量也就是矢量 $\boldsymbol{A}$ 在矢量 $\boldsymbol{B}$ 上的射影，

所以
$$A_B=|\boldsymbol{A}|\cos\theta_{AB}=\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|}=-\frac{11}{\sqrt{17}}$$

(6)$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 1 & 2 & -3\\ 5 & 0 & -2\end{vmatrix}=-\boldsymbol{e}_x4-\boldsymbol{e}_y13-\boldsymbol{e}_z10$

(7)由 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$得：

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & -4 & 1\\ 5 & 0 & -2\end{vmatrix}=-42$$

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=-42$$

(8)其中$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}=(5e_x-2e_z)\cdot(e_x+2e_y-3e_z)=11$

$\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}=(5e_x-2e_t)(-4e_y+e_z)=-2$

$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}=11(-4e_y+e_z)+2(e_x+2e_y-3e_z)=2e_x-40e_y+5e_z$

$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=11(-4e_y+e_z)+11(5e_x-2e_z)=55e_x-44e_y-11e_z$

1.2 三角形的 3 个顶点为 $P_1(0,1,-2)$、$P_2(4,1,-3)$和 $P_3(6,2,5)$.

(1)判断$\triangle P_1P_2P_3$ 是否为一直角三角形.

(2)求三角形的面积.

【知识点窍】 直角三角形的性质，即两直角边的矢量点乘积为 0.

【逻辑推理】 根据 3 个顶点得到三角形 3 条边的矢量描述，然后分别运用点乘计算结果.

【解题过程】

(1)设 R_1 为原点到点 P_1 的矢量，R_2 为原点到点 P_2 的矢量，R_3 为原点到点 P_3 的矢量，故有

$$\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z2\quad \boldsymbol{R}_2=\boldsymbol{e}_x4+\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z3\quad \boldsymbol{R}_3=\boldsymbol{e}_x6+\boldsymbol{e}_y2+\boldsymbol{e}_z5$$

$$\boldsymbol{R}_{12}=\boldsymbol{R}_2-\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{e}_x4-\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{R}_{23}=\boldsymbol{R}_3-\boldsymbol{R}_2=\boldsymbol{e}_x2+\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z8$$

$$\boldsymbol{R}_{13}=\boldsymbol{R}_3-\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{e}_x6+\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z7$$

所以 $\boldsymbol{R}_{12}\cdot\boldsymbol{R}_{23}=0$

即$\boldsymbol{R}_{12}$ 与$\boldsymbol{R}_{23}$ 垂直，故 $\triangle P_1P_2P_3$ 为直角三角形.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

(2)$S_{\triangle P_1P_2P_3} = \dfrac{1}{2}|\boldsymbol{R}_{12} \times \boldsymbol{R}_{23}| = \dfrac{1}{2}|R_{12}||R_{23}| = 17.13$

1.3　求 $P'(-3,1,4)$ 点到 $P(2,-2,3)$ 点的距离矢量 $\boldsymbol{R}$ 及 $\boldsymbol{R}$ 的方向.

【知识点窍】　距离矢量的定义及矢量方向的定义,即若 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}'$ 为两点矢量,则$\boldsymbol{P}'$ 到 $\boldsymbol{P}$ 的距离矢量为:$\boldsymbol{P'P} = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}'$

【解题过程】$\boldsymbol{R}_{P'} = -\boldsymbol{e}_x3 + \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z4, \boldsymbol{R}_P = \boldsymbol{e}_x2 - \boldsymbol{e}_y2 + \boldsymbol{e}_z3$

$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_P - \boldsymbol{R}_{P'} = \boldsymbol{e}_x5 - \boldsymbol{e}_y3 - \boldsymbol{e}_z$

方向余弦为

$$\cos\theta_x = \frac{R_x}{|R|} = \frac{5}{\sqrt{35}} \quad \theta_x = 32.31^\circ$$

$$\cos\theta_y = \frac{R_y}{|R|} = -\frac{3}{\sqrt{35}} \quad \theta_y = 120.47^\circ$$

$$\cos\theta_z = -\frac{R_z}{|R|} = -\frac{1}{\sqrt{35}} \quad \theta_z = 99.73^\circ$$

1.4　给定两矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x2+\boldsymbol{e}_y3-\boldsymbol{e}_z4$ 和 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x4-\boldsymbol{e}_y5+\boldsymbol{e}_z6$,求它们间的夹角和 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量.

【知识点窍】　$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|A||B|\cos\theta$,$\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量为:$\boldsymbol{A}\cdot\dfrac{\boldsymbol{B}}{|B|}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_B$

【解题过程】设 θ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 间的夹角,有

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}=\frac{2\times4-15-24}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}\sqrt{16+5^2+6^2}}$$

$$=\frac{-31}{\sqrt{29}\sqrt{77}}=-\frac{31}{\sqrt{2233}}$$

$$\theta=131^\circ$$

$\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{B}$ 上的分量

$$A_B = |\boldsymbol{A}|\cos\theta = \frac{-31}{\sqrt{77}} = -3.532$$

1.5　给定两矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x2+\boldsymbol{e}_y3-\boldsymbol{e}_z4$ 和 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{e}_x6-\boldsymbol{e}_y4+\boldsymbol{e}_z$,求 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 在 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z$ 上的分量.

【解题过程】$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ 2 & 3 & -4 \\ -6 & -4 & 1 \end{vmatrix}=-\boldsymbol{e}_x13+\boldsymbol{e}_y22+\boldsymbol{e}_z10$

$\boldsymbol{C}$ 的单位矢量为:$\boldsymbol{a}_C=\dfrac{\boldsymbol{C}}{|\boldsymbol{C}|}=\dfrac{\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z}{|\boldsymbol{C}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)$

所以 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 在 $\boldsymbol{C}$ 上的分量为：

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_C=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{a}_C=(-\boldsymbol{e}_x13+\boldsymbol{e}_y22+\boldsymbol{e}_z10)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z)=-14.43$$

1.6　证明：如果 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

【知识点窍】巧用性质：$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$

【证明】　由 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$，则有 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})$，即

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}$$

由于 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$，于是得到

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}$$

故　$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$$

1.7　如果给定一未知矢量与一已知矢量的标量积和矢量积，那么便可以确定该未知矢量. 设 $\boldsymbol{A}$ 为一已知矢量，$p=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}$ 而 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{X}$，$p$ 和 $\boldsymbol{P}$ 已知，试求 $\boldsymbol{X}$.

【知识点窍】$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$

【解题过程】由 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{X}$，有

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{X})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X})\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=p\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}$$

故得　$$\boldsymbol{X}=\frac{p\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{P}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}$$

1.8　在圆柱坐标中，一点的位置由 $\left(4,\frac{2\pi}{3},3\right)$ 定出，求该点在(1)直角坐标中的坐标；(2)球坐标中的坐标.

【知识点窍】3 种常见坐标系的变换.

【解题过程】

(1)在直角坐标系中 $\begin{cases}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\\ z=z\end{cases}$

$$x=4\cos(2\pi/3)=-2,y=4\sin(2\pi/3)=2\sqrt{3},z=3$$

故该点的直角坐标为$(-2,2\sqrt{3},3)$.

(2)在球坐标中

$$r=\sqrt{\rho^2+z^2},\theta=\arctan\frac{\rho}{z},\varphi=\varphi$$

$$r=\sqrt{4^2+3^2}=5,\theta=\arctan(4/3)=53.1^\circ,\varphi=2\pi/3=120^\circ$$

故该点的球坐标为$(5,53.1^\circ,120^\circ)$.

1.9　用球坐标表示的场 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_r\dfrac{25}{r^2}$，

(1)求在直角坐标系中点$(-3,4,-5)$处的 $|\boldsymbol{E}|$ 和 E_x.

(2)求 $\boldsymbol{E}$ 在直角坐标中点(−3,4,−5)处与矢量 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x2-\boldsymbol{e}_y2+\boldsymbol{e}_z$ 构成的夹角.

【解题过程】

(1)在直角坐标中点(−3,4,−5)处,$r^2=(-3)^2+4^2+(-5)^2=50$,故

$$|\boldsymbol{E}|=\left|\boldsymbol{e}_r\frac{25}{r^2}\right|=\frac{1}{2},\cos\theta_{rx}=\frac{x}{r}=\frac{-3}{\sqrt{50}}=\frac{-3}{5\sqrt{2}}$$

$$E_x=\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{E}=|\boldsymbol{E}|\cos\theta_{rx}=\frac{1}{2}\times\frac{-3}{5\sqrt{2}}=-\frac{3\sqrt{2}}{20}$$

(2)在直角坐标中点(−3,4,−5)处,$\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{e}_x3+\boldsymbol{e}_y4-\boldsymbol{e}_z5$,

又$\boldsymbol{e}_r=\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$,所以 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_r\dfrac{25}{r^2}=\dfrac{25\boldsymbol{r}}{r^3}=\dfrac{-\boldsymbol{e}_x3+\boldsymbol{e}_y4-\boldsymbol{e}_z5}{10\sqrt{2}}$

故 $\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 构成的夹角为

$$\theta_{EB}=\arccos\left(\frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{E}|\cdot|\boldsymbol{B}|}\right)=\arccos\left[-\frac{19/(10\sqrt{2})}{3/2}\right]=153.6^\circ$$

1.10 球坐标中两个点(r_1,θ_1,φ_1)和(r_2,θ_2,φ_2)定出两个位置矢量 $\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$.证明 $\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$ 间夹角的余弦为

$$\cos\gamma=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)$$

提示:$\cos\gamma=\dfrac{\boldsymbol{R}_1\cdot\boldsymbol{R}_2}{\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2}$,在直角坐标中计算 $\boldsymbol{R}_1\cdot\boldsymbol{R}_2$.

【解题过程】在直角坐标系中

$$\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{e}_xr_1\sin\theta_1\cos\varphi_1+\boldsymbol{e}_yr_1\sin\theta_1\sin\varphi_1+\boldsymbol{e}_zr_1\cos\theta_1$$
$$\boldsymbol{R}_2=\boldsymbol{e}_xr_2\sin\theta_2\cos\varphi_2+\boldsymbol{e}_yr_2\sin\theta_2\sin\varphi_2+\boldsymbol{e}_zr_2\cos\theta_2$$

得到

$$\begin{aligned}\cos\gamma=\frac{\boldsymbol{R}_1\cdot\boldsymbol{R}_2}{|\boldsymbol{R}_1||\boldsymbol{R}_2|}&=\sin\theta_1\cos\varphi_1\sin\theta_2\cos\varphi_2+\sin\theta_1\sin\varphi_1\sin\theta_2\sin\varphi_2+\cos\theta_1\cos\theta_2\\&=\sin\theta_1\sin\theta_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+\cos\theta_1\cos\theta_2\\&=\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+\cos\theta_1\cos\theta_2\end{aligned}$$

1.11 已知标量函数 $u=x^2yz$ 的梯度及 μ 在点(2,3,1)处沿指定方向 $\boldsymbol{e}_l=\boldsymbol{e}_x\dfrac{3}{\sqrt{50}}+\boldsymbol{e}_y\dfrac{4}{\sqrt{50}}+\boldsymbol{e}_z\dfrac{5}{\sqrt{50}}$的方向导数值.

【解题过程】
$$\begin{aligned}\nabla u&=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}(x^2yz)+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}(x^2yz)+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}(x^2yz)\\&=\boldsymbol{e}_x2xyz+\boldsymbol{e}_yx^2z+\boldsymbol{e}_zx^2y\end{aligned}$$

由方向导数的定义可知 u 在方向 $\boldsymbol{e}_l=\boldsymbol{e}_x\dfrac{3}{\sqrt{50}}+\boldsymbol{e}_y\dfrac{4}{\sqrt{50}}+\boldsymbol{e}_z\dfrac{5}{\sqrt{50}}$的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\nabla u\cdot \boldsymbol{e}_l=\frac{6xyz}{\sqrt{50}}+\frac{4x^2z}{\sqrt{50}}+\frac{5x^2y}{\sqrt{50}}$$

点(2,3,1)处沿 $\boldsymbol{e}_l$ 的方向导数值为

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{36}{\sqrt{50}}+\frac{16}{\sqrt{50}}+\frac{60}{\sqrt{50}}=\frac{112}{\sqrt{50}}$$

1.12 已知标量函数 $u=x^2+2y^2+3z^2+3x-2y-6z$.(1)求 ∇u;(2)在哪些点上 ∇u 等于0?

【解题过程】

(1) $\nabla_u=(2x+3)\boldsymbol{e}_x+(4y-2)\boldsymbol{e}_y+(6z-6)\boldsymbol{e}_z$

(2)要使 $\nabla u=0$,则 $x=-\frac{3}{2}$,$y=\frac{1}{2}$,$z=1$,即在点 $\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2},1\right)$ 上 $\nabla u=0$.

1.13 方程 $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ 给出一椭球族.求椭球表面上任意点的单位法向矢量.

【知识点窍】法向矢量即该点在各个坐标上的变化趋势,也即曲线的梯度,单位法向矢量即 $\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$.

【解题过程】 $\nabla u=\boldsymbol{e}_x\frac{2x}{a^2}+\boldsymbol{e}_y\frac{2y}{b^2}+\boldsymbol{e}_z\frac{2z}{c^2}=2\left(\boldsymbol{e}_x\frac{x}{a^2}+\boldsymbol{e}_y\frac{y}{b^2}+\boldsymbol{e}_z\frac{z}{c^2}\right)$

$$|\nabla u|=2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}$$

因为梯度方向沿函数等值面的法向,故椭球表面上任意点的单位法向矢量为

$$\begin{aligned}n_0&=\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\\&=\boldsymbol{e}_x\frac{x}{a^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}+\boldsymbol{e}_y\frac{y}{b^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}+\boldsymbol{e}_z\frac{z}{c^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}\\&=\left(\boldsymbol{e}_x\frac{x}{a^2}+\boldsymbol{e}_y\frac{x}{b^2}+\boldsymbol{e}_z\frac{z}{c^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

1.14 利用直角坐标,证明:

$$\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$$

【解题过程】 $u\nabla v=u\frac{\partial v}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+u\frac{\partial v}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+u\frac{\partial v}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$

$$v\nabla u=v\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x+v\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{e}_y+v\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

$\because u\nabla v+v\nabla u=\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\boldsymbol{e}_x+\left(u\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_y+\left(u\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_z=\nabla(uv)$

$\therefore \nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$

1.15 一球面 S 的半径为 5，球心在原点上，计算：$\oint_S (\boldsymbol{e}_r 3\sin\theta)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 的值.

【知识点窍】球坐标系中的面元矢量.

【解题过程】 $\mathrm{d}S_r = r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \quad \mathrm{d}S_\theta = r\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \quad \mathrm{d}S_\varphi = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{e}_r\mathrm{d}S_r + \boldsymbol{e}_\theta\mathrm{d}S_\theta + \boldsymbol{e}_\varphi\mathrm{d}S_\varphi$$

所以 $\oint \boldsymbol{e}_r 3\sin\theta\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int 3\sin\theta\mathrm{d}S_r = \int 3r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 3\times 5^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 75\pi^2$

1.16 已知矢量 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_x(x^2+axz)+\boldsymbol{e}_y(xy^2+by)+\boldsymbol{e}_x(z-z^2+czx-2xyz)$，试确定常数 a、b、c 使 $\boldsymbol{E}$ 为无源场.

【解题过程】若 $\boldsymbol{E}$ 为无源场，则 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 2x+az+2xy+b+1-2z+cx-2xy=0$$

则 $\quad a=2, b=-1, c=-2.$

1.17 在由 $\rho=5$，$z=0$ 和 $z=4$ 围成的圆柱形区域，对矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_\rho\rho^2+\boldsymbol{e}_z 2z$ 验证散度定理.

【解题过程】在圆柱坐标中　因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_\rho\rho^2+\boldsymbol{e}_z 2z$

所以 $$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\rho^2)+\frac{\partial}{\partial z}(2z) = 3\rho+2$$

所以 $$\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V = \int_0^4\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^5(3\rho+2)\rho\mathrm{d}\rho = 1200\pi$$

又 $$\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_S(\boldsymbol{e}_\rho\rho^2+\boldsymbol{e}_z 2z)\cdot(\boldsymbol{e}_\rho\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z+\boldsymbol{e}_\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z+\boldsymbol{e}_z\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$

$$\int_0^4\int_0^{2\pi}5^2\times 5\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z+\int_0^5\int_0^{2\pi}2\times 4\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = 1200\pi$$

故有 $$\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V = 1\,200\pi = \oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

因此散度定理成立.

1.18 求(1)矢量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x x^2+\boldsymbol{e}_y(xy)^2+\boldsymbol{e}_z 24x^2y^2z^3$ 的散度；(2)求 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 对中心在原点的一个单位立方体的积分；(3)求 $\boldsymbol{A}$ 对此立方体表面的积分，验证散度定理.

【解题过程】

(1) $$\nabla\cdot A = \left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left[\boldsymbol{e}_x x^2+\boldsymbol{e}_y(xy)^2+\boldsymbol{e}_z 24x^2y^2z^3\right]$$
$$= 2x+x^2 2y+72x^2y^2z^2$$

(2) $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 对中心在原点的一个单位立方体的积分为

$$\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V = \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}(2x+2x^2y+72x^2y^2z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{24}$$

(3) $\boldsymbol{A}$ 对此立方体表面的积分：由积分公式有 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{e}_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\boldsymbol{e}_y\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，得

$$\oint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z +$$

$$\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2} x^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}z - \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2} x^2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}z +$$

$$\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2} 24x^2y^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2} 24x^2y^2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{24}$$

故有 $\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{A}\mathrm{d}V = \frac{1}{24} = \oint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$

1.19 计算矢量 $\boldsymbol{r}$ 对一个球心在原点半径为 a 的球表面的积分，并求 $\nabla \cdot \boldsymbol{r}$ 对球体积的积分.

【解题过程】 $\oint_S \boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_S \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e}_r \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi} a a^2 \sin\theta\mathrm{d}\theta = 4\pi a^3$

又在球坐标中，$\nabla \cdot \boldsymbol{r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 r) = 3$，所以

$$\int_v \nabla \cdot \boldsymbol{r}\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} 3r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 4\pi a^3$$

1.20 在球坐标系中，已知矢量 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_r a + \boldsymbol{e}_\theta b + \boldsymbol{e}_\varphi c$，其中 a、b 和 c 均为常数.(1)问矢量 $\boldsymbol{A}$ 是否为常矢量；(2)求 $\nabla \cdot \boldsymbol{A}$ 和 $\nabla \times \boldsymbol{A}$.

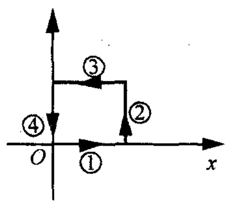
【解题过程】

(1) $\boldsymbol{A}$ 不是常矢量，因 $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi$ 都是随空间坐标变化的.

(2) $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} = \frac{2a}{r} + \frac{b}{r}\mathrm{ctg}\theta$

(3) $$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & \boldsymbol{e}_\varphi r\sin\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix} = \boldsymbol{e}_r\frac{c}{r}\mathrm{ctg}\theta - \boldsymbol{e}_\theta\frac{c}{r} - \boldsymbol{e}_\varphi\frac{b}{r}$$

1.21 求矢量 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_x x + \boldsymbol{e}_y x^2 + \boldsymbol{e}_z y^2 z$ 沿 xy 平面上的一个边长为 2 的正方形回路的线积分，此正方形的两边分别与 x 轴和 y 轴相重合. 再求 $\nabla \times \boldsymbol{A}$ 对此回路所包围的表面积分，验证斯托克斯定理.



题 1.21 图

【解题过程】 由题 1.21 图所示把曲线分成①②③④四部分，则有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{e}_x\mathrm{d}x + \boldsymbol{e}_y\mathrm{d}y + \boldsymbol{e}_z\mathrm{d}z$$

所以 $$\oint \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint(\boldsymbol{e}_x x + \boldsymbol{e}_y x^2 + \boldsymbol{e}_z y^2 z) \cdot (\boldsymbol{e}_x\mathrm{d}x + \boldsymbol{e}_y\mathrm{d}y + \boldsymbol{e}_z\mathrm{d}z)$$

$$= \int_{①} x\mathrm{d}x + \int_{②} 2^2\mathrm{d}y + \int_{③}(-x)\mathrm{d}x + \int_{④} 0\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^2 x\mathrm{d}x - \int_0^2 x\mathrm{d}x + \int_0^2 2^2\mathrm{d}y - \int_0^2 0\mathrm{d}y = 8$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com