

全国考研数学真题第一书

高教版



历年考研数学 (数学二) 真题解析及复习思路

考研命题研究组

购书就送60元

新华出版社

历年考研数学真题解析及复习思路

(数学二)

考研命题研究组

限期还书卡

图书在版编目(CIP)数据

历年考研数学真题解析及复习思路(数学二)/考研命题研究组编写.

—北京:新华出版社,2005.4

ISBN 7-5011-7043-6

I. 历...

II. 考...

III. 高等数学—研究生—入学考试—解题

IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 026683 号

总策划 张剑锋

责任编辑 刘洁

封面设计 祝东平 李继斌

历年考研数学真题解析及复习思路(数学二)

考研命题研究组

出版发行:新华出版社

地址:北京市石景山区京原路8号

邮编:100043

经销:新华书店

印刷:煤炭工业出版社印刷厂

开本:787×1092毫米1/16

印张:13.25

版次:2005年5月第1版

印次:2005年5月第1次印刷

新华出版社网址:www.xhcbss.126.com

高教考研人网址:www.kaoyanren.com

世纪高教书店:010-82627540

邮购部:010-62534421

门市部:010-82627540

字数:250千字

ISBN 7-5011-7043-6

定价:20.00元

版权所有

侵权必究

印装差错

负责调换

电话:010-82628139

前 言

《历年数学真题解析及复习思路(数学二)》是考研命题研究系列丛书中的一本,该系列丛书是由曾多年参加研究生考试大纲修订和命题的专家,为便于参加2006年研究生入学考试的广大莘莘学子对考试大纲规定的考试内容和考试要求进行全面、准确地理解而精心设计之作。该系列丛书内容精心设计,预见性极强,既体现了考生复习的阶段性特征,同时又鲜明地突出了考生能力结构提升的层次性。

(一)本书在结构框架和试题编排方面,其主要特点如下:

在第一部分,我们汇编了1987~2005年的全部数学试题,这些试题凝聚了近20年来参加命题的专家、教授的集体智慧,是一份十分宝贵的资料。这些试题既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力的测试要求,又充分地体现了命题专家和教授们进行数学命题的基本指导思想和基本原则,而且还能全面地展现试卷的结构、题型的特点。

在第二部分,我们对1987~2005年的全部数学试题根据《数学考试大纲(数学二)》的考查要求按照学科进行了科学地编排,并对试题进行了详细地解析。在编排顺序上,我们把相同或相近知识点列在一块进行解析,这样做除了便于进行比较分析外,更重要的是提供给考生一个重要的信息,即:相同或相近的知识点,相隔多少年会重新进行命题以及考查的知识点和题型的变化情况,以增强考生对命题基本规律的感性认识。如2005年数学一的第(8)小题与1999年数学一的第二大题的第(1)小题;2005年数学一的第(4)小题与1993年数学一的第四大题;2004年数学一的第(3)小题与1993年数学一的第一大题的第(3)小题;2004年数学一的第(5)小题与2003年数学二的第一大题的第(6)小题;2004年数学一的第(20)题与2002年数学三第九大题;……

关于试题重复命题的问题,需要说明的是,不仅在当年的理工科数学一和数学二之间使用相同试题,而且相隔多年后,一些理工科试题也被用作经济类试题。因此,经济类考生在分析历年试题时,可适当做一些理工类试题。

(二)本书在试题解析方面,其主要特点如下:

(1)依据《数学考试大纲》的章节,按试题考查的知识点分章,并对一些跨章节的、综合性较强的试题进行了科学的编排和处理。同时在每一章节加写了内容提要,对本章考查的大纲知识点进行了提纲挈领的分析。

(2)对每一道试题我们都进行了详细地分析和注释,并给出了命题和解题思路。在“分析”部分,主要分析试题的解题思路和解题方法,以期加强对考生的数学思维能力的培养,提高考生的破题能力;在“解析”部分则对试题进行详细的解析,给出了试题的解题步骤和详细答案,同时,为进一步拓宽考生的思维视野,我们在解析时尽可能地给出了多种解题思路或方法,以便使考生能够举一反三,触类旁通;在“注释”部分则针对历年考生在答卷中的典型错误进行了分析,同时对试题命制的思路、同类试题的解题方法、所考查知识点进行了归纳和总结;在“复习思路”部分,我们对考查的知识点进行了进一步的归纳和总结,并对该知识点的命题特点和趋势进行了分析。

(三)本书适合的报考专业:

(1)工学门类的纺织科学与工程、轻工技术与工程、农业工程、林业工程、食品科学与工程一级学科中所有的二级学科、专业。

(2)工学门类的材料科学与工程、化学工程与技术、地质资源与地质工程、矿业工程、石油与天然气工程、环境科学与工程一级学科中对数学要求较低的二级学科、专业。

(四)如何使用本书,我们的建议:

(1)建议考生参照《数学考试大纲(数学二)》的考查知识点,结合教材《高等数学》(高教同济五版)、《线性代数》(高教同济四版)进行第一轮复习。为了使复习具有针对性,考生可在这一阶段结合教材的复习进度使用本书,从本书的第二部分开始阅读。这一阶段的阅读主要是使考生明了教材的内容与考试试题的吻合度。这时候,考生首先要自己思考题目,如果不会可参考“分析”再做,如果还是不会再看答案,最后再认真地思考本题,参照“注”对题目进行归纳和总结,不能就题做题,要通过考题发现一些规律性的东西,这样才能取得最好的效果。

(2)在完成第一轮复习后,考生需要尝试做一些套题。每一年的试题就知识点而言,既具有分散性,同时又具有综合性。做套题的目的就是要使考生熟悉考研试题并进行自我检测。考生在做题时不要着急看答案,一定要把整个一套试题做完后再看。在看答案时,要将自己的解题思路与本书的分析进行对比,找差距,找不足。

(3)在复习的第三阶段使用本书,主要结合《数学考试大纲》知识点,重点分析历年试题的命题情况,从中发现和总结知识点命题的特点和规律。这一阶段,要认真阅读本书的试题“注释”部分和“复习思路”部分。通过使用本书,考生会看到每一部分都考过什么内容,如何考查,考试的重点和热点是什么,以便在复习时真正做到心中有数,有的放矢。对历年真题,我们建议大家最少要做2—3遍,做到看到题目就会解答的程度。

由于时间仓促和其他方面的原因,本书难免有不足之处,敬请广大读者和专家同行批评指正,以便再版时更臻于完善。

最后,预祝广大考生考研成功!

考研命题研究组

2005年5月

目 录

1987—2005 年考研数学试题汇编

2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	1
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	4
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	7
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	10
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	13
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	16
1999 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	19
1998 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	22
1997 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	25
1996 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	27
1995 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	29
1994 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	31
1993 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	33
1992 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	35
1991 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	37
1990 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	39
1989 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	41
1988 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	43
1987 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题	45

历年真题解析及复习思路

PART I 微积分

第一章 函数、极限、连续	49
第二章 一元函数微分学	71
第三章 一元函数积分学	111
第四章 多元函数微积分学	149
第五章 常微分方程	155

PART II 线性代数

第一章 行列式	178
---------------	-----

第二章	矩阵.....	180
第三章	向量.....	189
第四章	线性方程组.....	195
第五章	特征值与特征向量.....	204

2005 年全国硕士研究生入学统一考试 数学二试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(1) 设 $y = (1 + \sin x)^x$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \underline{0}$. P78

(2) 曲线 $y = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为 $y = \underline{x}$. P101

(3) $\int_0^1 \frac{x dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \underline{\quad\quad\quad}$. P123

(4) 微分方程 $xy' + 2y = x \ln x$ 满足 $y(1) = -\frac{1}{9}$ 的解为 $y = \underline{\quad\quad\quad}$. P158

(5) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\alpha(x) = kx^2$ 与 $\beta(x) = \sqrt{1+x\arcsin x} - \sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小, 则 $k = \underline{\quad\quad\quad}$. P66

(6) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量, 记矩阵

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3).$$

如果 $|A| = 1$, 那么 $|B| = \underline{\quad\quad\quad}$. P178

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内 P75

(A) 处处可导.

(B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点.

(D) 至少有三个不可导点. 【 】

(8) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, “ $M \Leftrightarrow N$ ”表示“ M 的充分必要条件是 N ”, 则必有

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数. P112

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数. 【 】

(9) 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = \ln(1+t) \end{cases}$ 确定, 则曲线 $y = y(x)$ 在 $x = 3$ 处的法线与 x 轴交点的横坐标是 P87

(A) $\frac{1}{8} \ln 2 + 3$. (B) $-\frac{1}{8} \ln 2 + 3$. (C) $-81 \ln 2 + 3$. (D) $81 \ln 2 + 3$. 【 】

- (10) 设区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, $f(x)$ 为 D 上的正值连续函数, a, b 为常数, 则 $\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma =$ P152

(A) $ab\pi$. (B) $\frac{ab}{2}\pi$. (C) $(a+b)\pi$. (D) $\frac{(a+b)}{2}\pi$. 【 】

- (11) 设函数 $u(x, y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t) dt$, 其中函数 φ 具有二阶导数, ψ 具有一阶导数, 则必有 P149

(A) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (B) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
(C) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (D) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. 【 】

- (12) 设函数 $f(x) = \frac{1}{e^{x-1} - 1}$, 则 P69

(A) $x = 0, x = 1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点.
(B) $x = 0, x = 1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点.
(C) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, $x = 1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.
(D) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, $x = 1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点. 【 】

- (13) 设 λ_1, λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值, 对应的特征向量分别为 α_1, α_2 , 则 $\alpha_1 A(\alpha_1 + \alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是 P193

(A) $\lambda_1 \neq 0$. (B) $\lambda_2 = 0$. (C) $\lambda_1 = 0$. (D) $\lambda_2 \neq 0$. 【 】

- (14) 设 A 为 $n(n \geq 2)$ 阶可逆矩阵, 交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B, A^*, B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵, 则 P182

(A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^* .
(B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^* .
(C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$.
(D) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$. 【 】

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

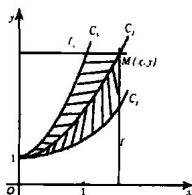
- (15)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f(0) \neq 0$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (x-t)f(t)dt}{x \int_0^x (x-t)dt}$. P130

- (16)(本题满分 11 分)

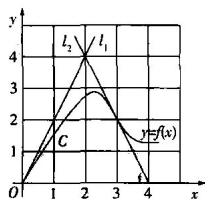
如图, C_1 和 C_2 分别是 $y = \frac{1}{2}(1 + e^x)$ 和 $y = e^x$ 的图象, 过点 $(0, 1)$

的曲线 C_3 是一单调增函数的图象, 过 C_2 上任一点 $M(x, y)$ 分别作垂直于 x 轴和 y 轴的直线 l_x 和 l_y , 记 C_1, C_2 与 l_x 所围图形的面积为 $S_1(x)$; C_2, C_3 与 l_y 所围图形的面积为 $S_2(y)$. 如果总有 $S_1(x) = S_2(y)$, 求曲线 C_3 的方程 $x = \varphi(y)$. P147



(17) (本题满分 11 分)

如图, 曲线 C 的方程为 $y = f(x)$, 点 $(3, 2)$ 是它的一个拐点, 直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点 $(0, 0)$ 与 $(3, 2)$ 处的切线, 其交点为 $(2, 4)$. 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数, 计算定积分 $\int_0^3 (x^2 + x) f''(x) dx$.



P124

(18) (本题满分 12 分)

用变量代换 $x = \cos t$ ($0 < t < \pi$) 化简微分方程 $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0$, 并求其满足 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = 2$ 的特解.

P167

(19) (本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 证明:

P92

(I) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$;

(II) 存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0, 1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta) = 1$.

(20) (本题满分 10 分)

已知函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = 2x dx - 2y dy$, 并且 $f(1, 1) = 2$. 求 $f(x, y)$ 在椭圆域 $D = \{(x, y) | x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$ 上的最大值和最小值.

P151

(21) (本题满分 9 分)

计算二重积分 $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

P153

(22) (本题满分 9 分)

确定常数 a , 使向量组 $\alpha_1 = (1, 1, a)^T, \alpha_2 = (1, a, 1)^T, \alpha_3 = (a, 1, 1)^T$ 可由向量组 $\beta_1 = (1, 1, a)^T, \beta_2 = (-2, a, 4)^T, \beta_3 = (-2, a, a)^T$ 线性表示, 但向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 不能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

P191

(23) (本题满分 9 分)

已知 3 阶矩阵 A 的第一行是 (a, b, c) , a, b, c 不全为零, 矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{bmatrix}$ (k 为常数), 且

$AB = O$, 求线性方程组 $Ax = 0$ 的通解.

P197

2004 年全国硕士研究生入学统一考试 数学二试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(1) 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)x}{nx^2+1}$, 则 $f(x)$ 的间断点为 $x =$ _____.

P69

(2) 设函数 $y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}$ 确定, 则曲线 $y = y(x)$ 向上凸的 x 取值范围为 _____.

P82

(3) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} =$ _____.

P137

(4) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z = e^{2x-3z} + 2y$ 确定, 则 $3 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

P149

(5) 微分方程 $(y+x^3)dx - 2xdy = 0$ 满足 $y|_{x=1} = \frac{6}{5}$ 的特解为 _____.

P158

(6) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵 B 满足 $ABA^* = 2BA^* + E$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, E 是

单位矩阵, 则 $|B| =$ _____.

P186

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(7) 把 $x \rightarrow 0^-$ 时的无穷小量 $\alpha = \int_0^x \cos t^2 dt$, $\beta = \int_0^x \tan \sqrt{t} dt$, $\gamma = \int_0^x \sin t^3 dt$ 排列起来,使排在后面的是前一个高阶无穷小,则正确的排列次序是

P65

(A) α, β, γ . (B) α, γ, β . (C) β, α, γ . (D) β, γ, α .

【 】

(8) 设 $f(x) = |x(1-x)|$, 则

P105

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(B) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(C) $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

【 】

(9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2}$ 等于

P55

(A) $\int_1^2 \ln^2 x dx$.

(B) $2 \int_1^2 \ln^2 x dx$.

(C) $2 \int_1^2 \ln(1+x) dx$.

(D) $\int_1^2 \ln^2(1+x) dx$.

【 】

(10) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得

P75

(A) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调增加.

(B) $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 内单调减少.

(C) 对任意的 $x \in (0, \delta)$ 有 $f(x) > f(0)$.

(D) 对任意的 $x \in (-\delta, 0)$ 有 $f(x) > f(0)$.

(11) 微分方程 $y'' + y = x^2 + 1 + \sin x$ 的特解形式可设为

(A) $y^* = ax^2 + bx + c + x(Asinx + Bcosx)$.

(B) $y^* = x(ax^2 + bx + c + Asinx + Bcosx)$.

(C) $y^* = ax^2 + bx + c + Asinx$.

(D) $y^* = ax^2 + bx + c + Acosx$.

(12) 设函数 $f(u)$ 连续, 区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2y\}$, 则 $\iint_D f(xy) dx dy$ 等于

(A) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(xy) dy$.

(B) $2 \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(xy) dy$.

(C) $\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2 \sin\theta \cos\theta) dr$.

(D) $\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r^2 \sin\theta \cos\theta) r dr$.

(13) 设 A 是 3 阶方阵, 将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B , 再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C , 则满足 $AQ = C$ 的可逆矩阵 Q 为

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(14) 设 A, B 为满足 $AB = O$ 的任意两个非零矩阵, 则必有

(A) A 的列向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.

(B) A 的列向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.

(C) A 的行向量组线性相关, B 的行向量组线性相关.

(D) A 的行向量组线性相关, B 的列向量组线性相关.

三、解答题(本题共 9 小题, 满分 94 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right]$.

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 在区间 $[0, 2]$ 上, $f(x) = x(x^2 - 4)$, 若对任意的 x 都满足 $f(x) = kf(x+2)$, 其中 k 为常数.

(I) 写出 $f(x)$ 在 $[-2, 0]$ 上的表达式; (II) 问 k 为何值时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

(17) (本题满分 11 分)

设 $f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt$.

(I) 证明 $f(x)$ 是以 π 为周期的周期函数;

(II) 求 $f(x)$ 的值域.

(18) (本题满分 12 分)

曲线 $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 与直线 $x = 0, x = t (t > 0)$ 及 $y = 0$ 围成一曲边梯形. 该曲边梯形绕 x 轴旋转一周得一旋转体, 其体积为 $V(t)$, 侧面积为 $S(t)$, 在 $x = t$ 处的底面积为 $F(t)$.

P147

(I) 求 $\frac{S(t)}{V(t)}$ 的值;

(II) 计算极限 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{F(t)}$.

(19) (本题满分 12 分)

设 $e < a < b < e^2$, 证明 $\ln^2 b - \ln^2 a > \frac{4}{e^2}(b - a)$.

P97

(20) (本题满分 11 分)

某种飞机在机场降落时, 为了减少滑行距离, 在触地的瞬间, 飞机尾部张开减速伞, 以增大阻力, 使飞机迅速减速并停下.

现有一质量为 9000 kg 的飞机, 着陆时的水平速度为 700 km/h. 经测试, 减速伞打开后, 飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比 (比例系数为 $k = 6.0 \times 10^5$). 问从着陆点算起, 飞机滑行的最长距离是多少?

P172

注 kg 表示千克, km/h 表示千米 / 小时.

(21) (本题满分 12 分)

设 $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$, 其中 f 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

P149

(22) (本题满分 9 分)

设有齐次线性方程组

P196

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + (3+a)x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + (4+a)x_4 = 0 \end{cases}$$

试问 a 取何值时, 该方程组有非零解, 并求出其通解.

(23) (本题满分 9 分)

P205

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 A 是否可相似对角化.

2003 年全国硕士研究生入学统一考试 数学二试题

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 把答案填在题中横线上.)

(1) 若 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $x \sin x$ 是等价无穷小, 则 $a =$ _____.

P65

(2) 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $xy + 2\ln x = y'$ 所确定, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程是 _____.

P86

(3) $y = 2^x$ 的麦劳林公式中 x^n 项的系数是 _____.

P94

(4) 设曲线的极坐标方程为 $\rho = e^{a\theta}$ ($a > 0$), 则该曲线上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积为 _____.

P138

(5) 设 α 为 3 维列向量, α^T 是 α 的转置, 若 $\alpha\alpha^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $\alpha^T\alpha =$ _____.

P180

(6) 设三阶方阵 A, B 满足 $A^2B - A - B = E$, 其中 E 为三阶单位矩阵, 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则

$|B| =$ _____.

P180

二、选择题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有

P55

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立.

(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 不存在.

(D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 不存在.

【 】

(2) 设 $a_n = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{1}{n}} x^{n-1} \sqrt{1+x^n} dx$, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$ 等于

P123

(A) $(1+e)^{\frac{1}{2}} + 1$.

(B) $(1+e^{-1})^{\frac{1}{2}} - 1$.

(C) $(1+e^{-1})^{\frac{1}{2}} + 1$.

(D) $(1+e)^{\frac{1}{2}} - 1$.

【 】

(3) 已知 $y = \frac{x}{\ln x}$ 是微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \varphi(\frac{x}{y})$ 的解, 则 $\varphi(\frac{x}{y})$ 的表达式为

P155

(A) $-\frac{y^2}{x^2}$.

(B) $\frac{y^2}{x^2}$.

(C) $-\frac{x^2}{y^2}$.

(D) $\frac{x^2}{y^2}$.

【 】

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图所示, 则 $f(x)$ 有

P105

(A) 一个极小值点和两个极大值点.

- (B) 两个极小值点和一个极大值点.
 (C) 两个极小值点和两个极大值点.
 (D) 三个极小值点和一个极大值点.

(5) 设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx$, 则

- (A) $I_1 > I_2 > 1$.
 (B) $1 > I_1 > I_2$.
 (C) $I_2 > I_1 > 1$.
 (D) $1 > I_2 > I_1$.

(6) 设向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性表示, 则

- (A) 当 $r < s$ 时, 向量组 II 必线性相关.
 (B) 当 $r > s$ 时, 向量组 II 必线性相关.
 (C) 当 $r < s$ 时, 向量组 I 必线性相关.
 (D) 当 $r > s$ 时, 向量组 I 必线性相关.

三、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x}, & x < 0, \\ 6, & x = 0, \\ \frac{e^x + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}}, & x > 0, \end{cases}$ 问 a 为何值时, $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续; a 为何

值时 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点?

四、(本题满分 9 分)

设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 1 + 2t^2 \\ y = \int_1^{1-2\ln t} \frac{e^u}{u} du \end{cases} (t > 1)$ 所确定, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=9}$.

五、(本题满分 9 分)

计算不定积分 $\int \frac{x e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx$.

六、(本题满分 12 分)

设函数 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $y' \neq 0, x = x(y)$ 是 $y = y(x)$ 的反函数.

(1) 试将 $x = x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2 x}{dy^2} + (y + \sin x) \left(\frac{dx}{dy}\right)^3 = 0$ 变换为 $y = y(x)$ 满足的微分方程;

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$ 的解.

七、(本题满分 12 分)

讨论曲线 $y = 4 \ln x + k$ 与 $y = 4x + \ln^4 x$ 的交点个数.

八、(本题满分 12 分)

设位于第一象限的曲线 $y = f(x)$ 过点 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, 其上任一点 $P(x, y)$ 处的法线与 y 轴的交点为 Q , 且线段 PQ 被 x 轴平分.

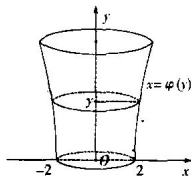
(1) 求曲线 $y = f(x)$ 的方程;

(2) 已知曲线 $y = \sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上的弧长为 l , 试用 l 表示曲线 $y = f(x)$ 的弧长 s .

九、(本题满分 10 分)

P174

有一平底容器, 其内侧壁是由曲线 $x = \varphi(y)$ ($y \geq 0$) 绕 y 轴旋转而成的旋转面 (如图), 容器的底面圆的半径为 $2m$, 根据设计要求, 当以 $3m^3/\min$ 的速率向容器内注入液体时, 液面的面积将以 $\pi m^2/\min$ 的速率均匀扩大 (假设注入液体前, 容器内无液体).



(1) 根据 t 时刻液面的面积, 写出 t 与 $\varphi(y)$ 之间的关系式;

(2) 求曲线 $x = \varphi(y)$ 的方程.

(注: m 表示长度单位米, $\min$ 表示时间单位分.)

十、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $f'(x) > 0$. 若极限

$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在, 证明:

P91

(1) 在 (a, b) 内 $f(x) > 0$;

(2) 在 (a, b) 内存在点 ξ , 使

$$\frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{2\xi}{f(\xi)};$$

(3) 在 (a, b) 内存在与 (2) 中 ξ 相异的点 η , 使

$$f'(\eta)(b^2 - a^2) = \frac{2\xi}{\xi - a} \int_a^b f(x) dx.$$

十一、(本题满分 10 分)

若矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & a \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ 相似于对角矩阵 Λ , 试确定常数 a 的值并求可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP = \Lambda$.

P204

十二、(本题满分 8 分)

P202

已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1: ax + 2by + 3c = 0,$$

$$l_2: bx + 2cy + 3a = 0,$$

$$l_3: cx + 2ay + 3b = 0.$$

试证这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a + b + c = 0$.

2002 年全国硕士研究生入学统一考试 数学二试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分. 把答案填在题中横线上.)

(1) 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{ax}}{2}, & x > 0, \\ \arcsin \frac{x}{2}, & x \leq 0, \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 a _____.

P68

(2) 位于曲线 $y = xe^{-x} (0 \leq x < +\infty)$ 下方, x 轴上方的无界图形的面积是 _____.

P136

(3) 微分方程 $yy'' + y'^2 = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$ 的特解是 _____.

P160

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}} \right] =$ _____.

P54

(5) 矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ 的非零特征值是 _____.

P204

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1) 设函数 $f(u)$ 可导, $y = f(x^2)$ 当自变量 x 在 $x = -1$ 处取得增量 $\Delta x = -0.1$ 时, 相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1, 则 $f'(1) =$ _____.

P74

(A) -1. (B) 0.1.

(C) 1. (D) 0.5.

【 】

(2) 设函数 $f(x)$ 连续, 则下列函数中, 必为偶函数的是

P129

(A) $\int_0^x f(t^2) dt.$ (B) $\int_0^x f^2(t) dt.$

(C) $\int_0^x t[f(t) - f(-t)] dt.$ (D) $\int_0^x t[f(t) + f(-t)] dt.$

【 】

(3) 设 $y = y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y'' + py' + qy = e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0) = y'(0) = 0$ 的特解, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限

P61

(A) 不存在. (B) 等于 1.

(C) 等于 2. (D) 等于 3.

【 】

(4) 设函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界且可导, 则

P90

(A) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

(B) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

(C) 当 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$.