



新世纪高等学校教材

大学公共课系列教材

高等数学 C 上册 (适合文科专业)

GAODENG SHUXUE C

北京师范大学数学科学学院 主 编

刘京莉 编 著



北京师范大学出版集团

BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP

北京师范大学出版社

新世纪高等学校教材

大学公共课系列教材

(适合文科专业)

高等数学 C 上册

GAODENG SHUXUE C

北京师范大学数学科学学院 主 编

刘京莉 编 著



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP) 数据

高等数学 C (上册) / 刘京莉编著. —北京: 北京师范大学出版社, 2009.5
(新世纪高等学校教材)
ISBN 978-7-303-09925-2

I. 高… II. 刘… III. 高等数学—高等学校—教材
IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 070915 号

营销中心电话 010-58802181 58808006
北师大出版社高等教育分社网 <http://gaojiao.bnup.com.cn>
电子邮箱 beishida168@126.com

出版发行: 北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街 19 号
邮政编码: 100875

印 刷: 唐山市润丰印务有限公司
经 销: 全国新华书店
开 本: 170 mm × 230 mm
印 张: 12.5
字 数: 210 千字
版 次: 2009 年 5 月第 1 版
印 次: 2009 年 5 月第 1 次印刷
定 价: 20.00 元

策划编辑: 岳昌庆 王松浦 责任编辑: 岳昌庆 方 亮
美术编辑: 高 霞 装帧设计: 高 霞
责任校对: 李 菡 责任印制: 李 丽

版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话: 010-58800697

北京读者服务部电话: 010-58808104

外埠邮购电话: 010-58808083

本书如有印装质量问题, 请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话: 010-58800825

前言

1915 年,北京师范大学的前身——北京高等师范学校成立数理部,1922 年成立数学系,2004 年成立北京师范大学数学科学学院.经过 90 多年的风风雨雨,数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验.将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的.

1958 年以前,我校主要在物理系和化学系开设高等数学课,1958 年开始,由于扩大招生和进行教学改革的需要,于 1959 年开始成立公共数学教研室.针对各系专业课对数学的要求,进行课程内容的改革和教学进度的调整,并要求讲课教师树立对外系专业课“服务”的教学思想.当时,物理系和天文系开设 4 学期的高等数学课,内容有解析几何、高等代数、一元和多元微积分及场论;化学系开设 3 学期的高等数学课,主要内容是一元微积分;生物系和地理系开设 2 学期的简明微积分.

1981 年 3 月后,我校除中文系、历史系和外语系外,其余的系都开设高等数学课.因此,高等数学教学任务日渐增加.1999 年高校扩大招生规模后,我校每年有约 2 300 名本科生学习高等数学.从 1999 年秋季开始,在学校教务处的大力支持下,按照不同专业分层次进行教学的原则,我系制定并统一安排全校非数学专业大学数学教学改革工作,根据各专业对数学知识和数学能力的要求,分为大学数学 A(3 学期,周 6 学时),B(2 学期,周 6 学时),C(2 学期,平均周 4.5 学时),D(1 学期,周 4 学时)四个层次.各专业根据需要选择本专业数学课的教学内容.在 20 世纪 80 年代,部分教师充分利用在外系讲课的便利条件,合作进行科学研究,或撰写高等数学教学研究

论文,或编写教材.编写的教材有物理类用的《高等数学》,化学、生物学和地理学用的《高等数学》,生物系用的《生物统计》.2005年5月,由北京师范大学数学科学学院李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部王松浦主任进行了沟通和协商,由李仲来教授任主编,准备对北京师范大学出版社出版的5部数学教材修订后再版,再用几年时间,出版大学数学A,B,C课程三个层次的系列教材(考虑到2009年全国硕士研究生入学统一考试的数学教学大纲中将数学三、数学四合并为新数学三,我们也相应地将大学数学C、大学数学D合并为新大学数学C).

经过多年的教学实践,高等数学的教学内容已经比较固定,国内外教材已经有多种版本,对物理和工科类联系实际的教材比较好,对其他方向联系实际的教材还需要大力加强.在这种情况下,本套系列教材力图在与专业的结合上写出特色.当然,这对作者提出了比较高的要求.我们希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者提出宝贵的修改意见,使其不断改进和完善.

本套教材可供高等院校非数学专业本/专科生、函授生和在职中学教师等使用和参考.

北京师范大学数学科学学院

2008-10-16

作者的话

本书是依据北京师范大学非数学专业文科高等数学课程的教学大纲编写的,内容包括微积分、线性代数和概率统计三部分.微积分含极限、一元微分和积分;线性代数简介含有行列式、矩阵与线性方程组解的判定及解法;概率统计初步含有概率的定义、计算、随机变量的概率分布及数字特征;样本的变异性、参数估计和假设检验思想介绍.内容以数学知识为载体,合理运用推理与归纳,让学生体验数学的思维方式和精髓;通过知识背景的导入和典型例题的分析,理解解决数学问题的方法,了解在现实世界中从数学视野认识事物,解决问题的数学应用价值.

数学符号是含义高度概括、表达形式高度浓缩的抽象的科学语言.它运用于数学概念、运算、公式、命题、推理和逻辑关系等整个数学过程中,使数学思维更加准确、概括、简明、直观和易于揭示数学对象的本质.数学符号已经被物理和科学技术的领域广泛采用,近年来在社会科学研究中,也可以看到数学符号的身影.本书注重数学符号语言的标准化,使用的所有数学符号是经作者仔细查阅众多资料慎重选用的,相关资料有国际标准 ISO 6862—1996《信息和文献.编制目录信息交换用数学编码字符集》、中华人民共和国国家标准 GB 3102.11—93《物理科学和技术中使用的数学符号》、日本国家标准 JIS Z 8201—1981《数学符号》、德国国家标准 DIN1302—1999《通用数学符号和概念》等,作者希望从数学符号入手,使读者能够掌握国际通用的数学符号语言.

本书内容将数学知识与人文社会科学案例有机地结合,使读者认识到数学在社会科学研究中的作用,培养大学生用数学

思维判断一般问题结论的合理性以及将一般问题数学化的能力;开阔文科学生的理性思维视野,养成运用数学工具解决实际问题的意识,提高大学生的综合素质.本书选择的案例充分考虑到教育、人文社会科学等方面人才的培养目标,体现文科专业进行社会科学研究时对数学的工具性要求,列举了大量客观世界中的实例,通过运用数学解决问题的过程,认识客观事物的本质,掌握理性思维的方式方法,增长运用数学工具解决问题的能力,感受彰显人类数学智慧的乐趣.本书是作者多年教学和实践的总结,可作为大学文科院系高等数学课程教材,也可供各级数学教师进修以及人文社会科学工作者参考.

最后,对北京师范大学数学科学院李仲来教授多次的指导和建议;对北京师范大学出版社的大力支持表示衷心的感谢.由于作者水平有限,书中的错误及不妥之处在所难免,敬请读者指正.

作者 刘京莉

2009-01-12

目 录

绪论 /1

第一篇 微积分 /9

第 1 章 极限思想与极限计算 /11

1.1 函数的极限	11
1.1.1 极限的概念	11
1.1.2 无穷大与无穷小	15
1.1.3 极限的运算法则	16
1.1.4 两个重要极限	18
1.2 连续函数的极限和性质	22
1.2.1 连续与间断	22
1.2.2 计算连续函数的极限	23
1.2.3 闭区间上连续函数的性质	25
第 1 章习题	26

第 2 章 从微分的视角看事物细微的变化 /28

2.1 导数的概念与运算	28
2.1.1 导数的概念	28
2.1.2 导数的运算	33
2.1.3 反函数和复合函数的导数	34
2.1.4 导数的基本公式和法则	36
2.2 微分与导数的应用	38
2.2.1 微分	38
2.2.2 洛必达法则	41
2.2.3 导数的应用	43

2.2.4 高阶导数	45
第 2 章习题	48

第 3 章 积分/50

3.1 不定积分	50
3.1.1 不定积分的概念	50
3.1.2 不定积分的基本公式和法则	51
3.1.3 第一换元积分法和分部积分法	53
3.2 定积分	57
3.2.1 定积分的概念	57
3.2.2 定积分的性质	61
3.2.3 将部分累积至整体的行动——定积分的计算	62
3.2.4 定积分的应用	66
第 3 章习题	69

第二篇 线性代数简介/71

第 4 章 行列式/73

4.1 行列式的概念	73
4.1.1 二阶和三阶行列式	73
4.1.2 n 阶行列式	75
4.2 行列式的性质与计算	76
4.2.1 行列式的性质	76
4.2.2 行列式的计算	79
4.3 克莱姆法则	82
第 4 章习题	85

第 5 章 矩阵/88

5.1 矩阵的概念与计算	88
5.1.1 矩阵的概念	88
5.1.2 矩阵运算和转置	90
5.1.3 矩阵的初等行变换	94
5.1.4 矩阵的秩	95

5.2 逆矩阵及其应用	97
5.2.1 逆矩阵的概念	97
5.2.2 用初等行变换法求逆矩阵	98
5.2.3 矩阵的应用	99
第5章习题	103
第6章 寻找平衡的支点——解线性方程组/105	
6.1 线性方程组的解的讨论	106
6.1.1 消元法解线性方程组	106
6.1.2 用矩阵变换判定及解线性方程组	111
6.2 线性代数的应用	113
6.2.1 营养配餐	113
6.2.2 网络流	113
6.2.3 人口流动	115
第6章习题	117
第三篇 概率统计初步/119	
第7章 用数值判断机会/121	
7.1 随机事件及其概率	121
7.1.1 随机事件的概念和运算	121
7.1.2 概率的定义和性质	123
7.1.3 概率的计算	128
7.1.4 二项概率公式	133
7.2 随机变量的概率分布	134
7.2.1 随机变量	134
7.2.2 离散型随机变量的概率分布	135
7.2.3 连续型随机变量和正态分布	138
7.3 随机变量的数字特征	147
7.3.1 数学期望	147
7.3.2 方差	150
第7章习题	153

第 8 章 用数据分析得出结论 /157

8.1 样本的变异性	157
8.1.1 总体与样本统计量	157
8.1.2 抽样分布	159
8.1.3 中心极限定理	160
8.2 参数估计	168
8.2.1 参数的点估计量求法	168
8.2.2 参数的区间估计	169
8.3 假设检验	172
8.3.1 假设检验的基本思想	172
8.3.2 正态总体期望 μ 的假设检验	173
第 8 章习题	175

部分习题参考答案与提示 /177

附录 常用统计分布表 /185

附表 1 泊松分布概率值表	185
附表 2 标准正态分布函数值表	188

主要参考文献 /190

绪 论

《高等数学 C》(上册)是针对文科学生的实际需要、知识结构和思维特点选取和设计的,全书以微积分、线性代数、统计概率为主要内容,并以数学的语言来呈现;知识的展开过程蕴含了数学研究问题的思维方式;数学应用为人们开辟了理性解决问题的视野.在学习过程中,我们要学会概括每一部分知识的意义作用,明确它在整个知识体系中的地位,如微分研究事物细微的变化;积分是将部分累积至整体的行动;解线性方程组是建立平衡并寻找平衡的支点的过程;学习概率是利用数值判断机会等,同时也为今后能有意识地、自如地运用数学工具打下基础.因此,我们在学习知识的过程中也要关注数学语言、数学方法和数学应用.

1 数学语言

数学语言作为一种表达科学思想的通用语言和数学思维的最佳载体,包含着多方面的内容;其中较为突出的是文字语言、符号语言及图形语言,其特点是准确、严密、简明.各种形态的数学语言各有其优越性,如概念定义严密,揭示本质属性;术语引入科学、自然,体系完整规范;符号指意简明,书写方便,且集中表达数学内容;表达式将关系融于形式之中,有助运算,便于思考;图形表现直观,有助记忆,有助思维,有益于问题解决.

以符号语言为例,中华人民共和国国家标准 GB 3102.11—93《物理科学和技术中使用的数学符号》是参照采用国际标准 ISO 31—11:1992《量和单位 第十一部分:物理科学和技术中使用的数学标志与符号》制定的,对数学符号、意义、备注及示例做了明确的规定,内容包括几何符号如 ∞ ;集合论符号如 $\in$, $\cup$, $\cap$;数理逻辑符号 $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$;杂类符号如 def, max, min;运算符号如 $\sum_{i=1}^n a_i$;函数符号如 $f(x)$, $\frac{df}{dx}$;三角函数和双曲函数符号如 $\arcsin x$;复数符号如 $\operatorname{Re} Z$, $\operatorname{Im} Z$;矩阵符号如 $\det A$;坐标系符号 x, y, z ;矢量和张量符号如 $\boldsymbol{a}$ 等.下表介绍本书中用到的一些数学符号.

表 0.1.1 数学符号及示例

符号	意 义	示 例
$\Rightarrow$	推断	$p \Rightarrow q$ 即若 p 则 q . 有时也可用 $\rightarrow$
$\Leftrightarrow$	等价	$p \Leftrightarrow q$ 即 $p \Rightarrow q$ 且 $q \Rightarrow p$. 有时也用 $\leftrightarrow$
$\forall$	一切、任何、每个	$\forall x \geq 0$ 表示“一切非负的 x ”
$\exists$	存在着、至少有一个	$\exists n \in \mathbb{N}$ 表示“在非负整数集合 $\mathbb{N}$ 中存在着数 n ”
$\underline{\text{def}}$	$a \underline{\text{def}} b$ 按定义 a 等于 b 或 a 以 b 为定义	$p \underline{\text{def}} mv$, 式中 p 为动量, m 为质量, v 为速度
$\text{sgn } a$	a 的符号函数	$\text{sgn } a \underline{\text{def}} \begin{cases} 1, & \text{当 } a > 0 \\ 0, & \text{当 } a = 0 \\ -1, & \text{当 } a < 0 \end{cases}$
$n!$	n 的阶乘	$n \geq 1$ 时, $n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$; $n=0$ 时, $n! = 1$
C_n^m	组合数	$C_n^m = \frac{n!}{m! (n-m)!}$
$\sum_{i=1}^n a_i$	$a_1 + a_2 + \cdots + a_n$	$\sum_{i=1}^{+\infty} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$
$\prod_{i=1}^n a_i$	$a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n$	$\prod_{i=1}^{+\infty} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n \cdot \cdots$
$o(g(x))$	$f(x) = o(g(x))$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$	当 x 趋于 a 时, $f(x)$ 较 $g(x)$ 更快地趋于 0
Δx	x 的增量或改变量	$\Delta x = x - x_0$
$\{ \}$	满足某条件的集合	a 的 h 邻域 $N_h(a) = \{x x-a < h\}$, 其中 h 为邻域半径 a 的空心 h 邻域 $N_h(\bar{a}) = \{x 0 < x-a < h\}$ a 的右 h 邻域 $N_h^+(a) = \{x a \leq x < a+h\}$ a 的左 h 邻域 $N_h^-(a) = \{x a-h < x \leq a\}$ a 的空心右 h 邻域 $N_h^+(\bar{a}) = \{x a < x < a+h\}$ a 的空心左 h 邻域 $N_h^-(\bar{a}) = \{x a-h < x < a\}$ 不必指明邻域半径时, 记号中可省略 h . 如: 用 $N(a), N(\bar{a})$ 表示 a 的邻域和 a 的空心邻域.

数学语言是一种高度抽象的人工符号系统,要驾驭它的途径很多,运用普通语言描述概念的意义和解释定理所揭示的本质属性,使抽象的数学语言在我们熟悉的语言环境中找到借鉴,从而达到对数学语言的深刻理解. 如“标准差”既有标准(均值)又有偏差的含义,标准差是数据分布中每个数值与均值的偏差平方

的平均数,标准差越大,数值分布越分散,则数值之间的相互差异越大,因此可以作为度量数据分散程度的单位尺度.而标准差的符号语言

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

简洁、明确,但表现形式比较抽象.借助于普通语言的解释功能可以辅助数学语言的学习.

在数学语言内部,熟练地掌握各种形式语言的用法,灵活地对它们进行各种等价转换,有助于深刻地理解数学的意义.如图形语言是一种视觉语言,通过图形给出某些条件,其特点是直观,便于观察与联想,观察题设图形的形状、范围,联想相关的数量或方程.很多数学家都是借助于直观图进行思维的.由于直观形象具有整体性的特征,因此往往成为对于对象或问题直觉的把握的重要渊源.教材中使用了各种语言形式呈现内容,如连续函数的中间值定理,任取 $\eta \in [f(a), f(b)]$,在连续函数 $y=f(x)$ 图形上做出直线 $y=\eta$,都可以发现至少有一个交点等,充分利用了几何图形的直观优势.

“数学化”将普通语言译为数学符号语言,它是利用数学知识解决实际问题的必要步骤.数学符号和规则从现实世界得到其意义,又在更大的范围内作用于现实.

2 数学方法

思维总是按照一定的模式进行的,数学更具有自己特殊的思维模式,这就是数学方法.它的一个重要途径是通过典型例子的分析引导出具有普遍意义的思想方法或模式.在各个数学分支中都有具体的数学思想方法,如微积分的极限方法就是利用一个变量连续地逼近某一个确定的量,而且逼近的程度小于任何给定的方法解决问题.曲线割线的斜率连续地逼近切线的斜率即导数;变量小矩形面积之和连续地逼近曲边梯形的面积即定积分,都是运用了极限方法.

有的数学方法如化归方法具有普遍意义.“化归方法”是指数学家们把待解决的问题,通过某种转化过程,归结到一类已经能解决或者比较容易解决的问题中,最终获得原问题解答的一种手段和方法.数学家们往往不是正面地攻克问题,而是不断地将它变形,直至把它转化为已经得到的问题.在这里我们以复合函数为例说明.

设 $y=f(u)(u \in U), u=g(x)(x \in X, u \in U_1)$, 若 $U_1 \subset U$, 则称 $y=f[g(x)]$ ($x \in X$) 为 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数, 其中 u 称为中间变量.

我们在中学已经熟练地掌握了基本初等函数的定义、图形、性质和运算法则,微积分中的导数公式、积分公式也是有关基本初等函数的.而微积分中最常见的函数是复合函数,如果我们能抓住复合函数自变量与因变量之间的函数至少有一个中间变量过渡的特点,就可以将复合函数的问题转化为基本初等函数的问题.

例如 分析 $y=\log_{0.5}(x^2+4x+4)$ 在哪个区间内是增函数?

我们在中学已经非常熟悉基本初等函数的单调性,设中间变量 $u=x^2+4x+4$, 因为 $u=x^2+4x+4=(x+2)^2$, 在 $(-\infty, -2)$ 是减函数; 在 $(-2, +\infty)$ 是增函数, 且 $u>0$, 而 $y=\log_{0.5} u$ 在 $(0, +\infty)$ 是减函数, 且 $u=u(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域相同, 所以 $y=\log_{0.5}(x^2+4x+4)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上是增函数.

练习 引入中间变量, 指出下列函数是哪几个基本初等函数的复合函数.

$$(1) y=2^{x^2}, \quad (2) y=a^{\cos x}, \quad (3) y=\arcsin \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

3 数学应用

在自然科学、工程技术和社会科学 的许多领域中,数学作为研究问题、解决问题的工具发挥着重要的作用.人们早 已经把数学看作科学的工具和语言.在教材中我们拟通过解决一些实际问题,使大家 不仅能获得理解、精通数学以外问题的能力,扩大知识面和视野,还可以培养观察力、想象力,学习掌握解决问题的数学方法,特别能运用现代化信息交流方式,借助更宽阔的网络世界找到合适的专家来帮助自己攻克难题.在当今时代,计算机的应用深刻地改变了人类的生活方式,用数学软件解决相关问题成为一种非常有效的方法.

例 1 现要用 $100\text{ cm}\times 50\text{ cm}$ 的板料裁剪出规格分别为 $40\text{ cm}\times 40\text{ cm}$ 与 $50\text{ cm}\times 20\text{ cm}$ 的零件,前者需要 25 件,后者需要 30 件.问如何裁剪,才能最省料?

解 先设计几个裁剪方案.

方案 1,如下图,在 $100\text{ cm}\times 50\text{ cm}$ 的板料上可裁剪出两块 $40\text{ cm}\times 40\text{ cm}$ 的零件和一块 $50\text{ cm}\times 20\text{ cm}$ 的零件(图中分别用 A,B 表示).

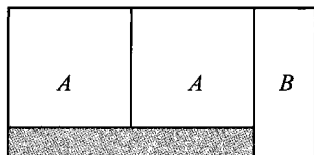


图 0.3.1

同样,求出方案 2

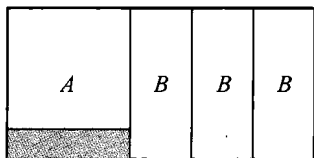


图 0.3.2

方案 3

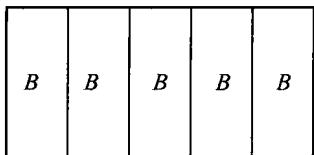


图 0.3.3

显然,若只用其中一个方案,都不是最省料的方法.最佳方法应是三个方案的优化组合.设方案 i 使用原材料 x_i 件($i=1,2,3$),共用原材料 f 件,则根据题意,可用如下数学式子表示

$$\begin{aligned} \min f &= x_1 + x_2 + x_3, \\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 25, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 30, \\ x_i \geq 0 \text{ 的整数}(i=1,2,3). \end{cases} \end{aligned}$$

最优解有四个:

x_1	12	11	10	9
x_2	1	3	5	7
x_3	3	2	1	0

f 的最小值为 16. 这是一个整数线性规划模型.

数学模型是指通过抽象和简化,使用数学语言对实际现象的一个近似的刻画,以便于人们更深刻地认识所研究的对象.具体表现为由若干字母、数字及含有特定意义的符号、不等式、逻辑式、序关系、图表、图形和框图构成的数学结构,其中函数和方程就是最常见形式,我们看两个指数模型的例子.

例 2 人口指数增长模型.

表 0.3.1 2003~2007 年中国的人口数量(单位:万人)(来源:中国统计年鉴)

年	2003	2004	2005	2006	2007
人口数量	129 227	129 988	130 756	131 448	132 129

如果将每一年的人口数除以上一年的人口数,那么我们近似得到

$$\begin{aligned} \frac{2004 \text{ 年人口数}}{2003 \text{ 年人口数}} &= \frac{129\,988}{129\,227} = 1.005\,89, & \frac{2005 \text{ 年人口数}}{2004 \text{ 年人口数}} &= \frac{130\,756}{129\,988} = 1.005\,91, \\ \frac{2006 \text{ 年人口数}}{2005 \text{ 年人口数}} &= \frac{131\,448}{130\,756} = 1.005\,29, & \frac{2007 \text{ 年人口数}}{2006 \text{ 年人口数}} &= \frac{132\,129}{131\,448} = 1.005\,18. \end{aligned}$$

从计算得到 2003~2007 年间每年人口增长比例非常接近,在 1.005 57 左右.表明这几年每年人口总数都增长了大约 0.557%,如果对其他年份做类似计算,那么人口就呈指数增长.

当 $t=0$ 时,人口 $=129\,227=129\,227(1.005\,57)^0$;