



高考解密

一轮考点与基础过关

“春雨奖学计划”指定用书



数学(文)

必修+选修
配国标江苏版

总主编 严 军 本册主编 张志朝

江苏
专用

中国少年儿童新闻出版总社
中国少年儿童出版社



高考解密

一轮考点与基础过关

“春雨奖学计划”指定用书

江苏
专用

数学(文)

必修+选修
配国标江苏版

总主编 严 军
本册主编 张志朝
副主编 徐 伟 许云峰
撰稿 张 雷 孙东升

中国少年儿童新闻出版总社
中国少年儿童出版社

PDG

图书在版编目(CIP)数据

高考解密. 一轮考点与基础过关. 数学/严军主编;

—北京:中国少年儿童出版社,2009.2

ISBN 978-7-5007-9164-5

I. 高… II. 严… III. 数学课—高中—升学参
考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 020052 号

新课标·高考解密

编委会

总主编: 严 军

编 委: 羊 刚 盛庆丰 孙冬强 李正宣 张志朝
张富山 郭光宝 孟 芳 陈 海 卢惠林
陈跃生 金祥林 江旭峰 侯先华 卜志刚
钱厚林 黄冠华 戴申卫

2010·新课标

高考解密

一轮考点与基础过关

数学(必修+选修)

出版发行: 中国少年儿童新闻出版总社

中国少年儿童出版社

出 版 人: 李学谦

执行出版人: 赵恒峰

总 主 编: 严 军

主 编: 张志朝

责任编辑: 陈效师

责任校对: 丁荣锋 朱广灿 胡尚权 张 丽

地 址: 北京市东四十二条 21 号

电 话: 010-64132053

E-mail: dakaiming@sina.com

印刷: 南京通达彩印有限公司

开本: 880×1230 1/16

2009 年 2 月北京第 1 版

字数: 700 千字

ISBN 978-7-5007-9164-5/G·6549

装帧设计: 石 芳

美术编辑: 周建明

责任印务: 李建国

邮政编码: 100708

传 真: 010-64132053

经销: 新华书店

印张: 25.75

2009 年 2 月江苏第 1 次印刷

印数: 7000 册

定价: 72.00 元

图书若有印装问题,请随时向印务部退换。

版权所有,侵权必究。

09-0202

春雨奖学金计划

(高中组)

一、“春雨奖学金计划”系江苏春雨教育集团设立，分高考、中考、中学竞赛三组，由春雨教育考试院负责具体运作。2009年9月~2010年8月为第六年度。

二、奖项设置

凡自2009年4月起使用“春雨教育”策划、严军总主编的《高考解密》《教材全析》《1课3练》《单元双测》《实验班提优训练》《高考3测》《最新十年高考试题分类解析》《新考纲高考模拟试卷》等丛书中的任一分册，并在2010年高考中获得以下成绩者，分别可获得春雨一、二、三高等高考奖学金：

1. 全省(市·区)总分第一(含文、理科)：高考一等奖学金，奖金5000元；
2. 全省(市·区)总分第二(含文、理科)：高考二等奖学金，奖金4000元；
3. 被清华大学、北京大学(不含二级学院)录取：高考三等奖学金，奖金2000元；
4. 班级集体使用上述图书且被北大、清华录取的人数超过3名的，取总分前3名颁发三等奖学金；
5. 向高考一等奖学金获得者的指导老师颁发2000元的“春雨园丁奖”；多学科使用的，奖班主任。

三、申报办法

1. 符合以上条件者须在接到《录取通知书》后及时向春雨教育考试院提交以下材料：

- (1) 书面申请；
- (2) 本人本年度使用的上述图书(1套、1册或多册均可；使用率80%以上)；
- (3) 学习经验介绍一篇；
- (4) 《录取通知书》复印件；

2. 申报截止时间：2010年8月20日。

四、审核与其他

1. 奖学金申报人须写清姓名、性别、年龄、学校、班级、通讯地址、邮编、联系电话、各科得分及总分。
2. 春雨教育考试院将在9月20日前对申请者进行必要的认定与测评，10月20日前对核实无误、测评合格者颁发证书、奖学金。逾期或材料不全、提交图书不实的，均不予受理。

3. 申报地址：南京市鼓楼邮局172信箱江苏春雨教育集团春雨教育考试院(P.C.210008)，联系人：夏老师。

详情可登陆“春雨教育网”或拨025—68801900查询。

4. 本计划解释权归江苏春雨教育集团所有。

“春雨奖学金计划”龙虎榜(2005-2009)



姚青 2005年考入清华大学

寄语：要勤备他书，勤读，只有这样才能发现你的主观方向在哪里。



孙磊 2005年考入清华大学

寄语：“春雨”充分地滋润了我，也希望“春雨”可以滋润更多渴望成长的“学苗”。



袁小蕾 2005年考入清华大学主妇科学系

寄语：对基础知识的深入理解，会让你从容面对各种题型。



牛天健 2005年考入北京大学地球与空间科学系

寄语：春雨教育是永知的帮手，学习的助推器，成功的铺路石。



焦璐 2006年考入北京大学法学专业

寄语：高中要刻苦，大学要努力，只有努力才能成功，只有努力才能成功。



王明君 2006年考入北京大学医学部基础医学专业

寄语：《高中数学》为我上了一堂生动的课，受益匪浅，谢谢春雨教育。



文旭 2006年考入北京大学基础医学专业

寄语：学习压力，全力以赴，无怨无悔。



艾晓东 2007年考入清华大学自动化系

寄语：一轮复习，是对知识的回顾，也是让知识融会贯通的过程，提高解题能力。



卢洁晨 2007年考入清华大学材料科学与工程系

寄语：复习是巩固，是查漏补缺，也是让知识融会贯通的过程，提高解题能力。



李尚遥 2007年考入北京大学信息科学技术系

寄语：通过扎实的掌握基础知识，加之丰富的练习，会让你对知识融会贯通，提高解题能力。



宋上 2008年考入北京大学法学专业

寄语：知识，学习，努力，是成功的唯一途径，只有努力才能成功。



孙昊 2008年考入北京大学工程物理系

寄语：有人喜欢把书读得烂熟于心，我不这样认为。



安定坤 2008年考入清华大学医学部

寄语：高中是人生中最重要的阶段，也是为大学做准备。



应宁康 2008年考入清华大学工业工程系

寄语：高中是人生中最重要的阶段，也是为大学做准备。



岳舒 2008年考入清华大学机械系

寄语：学习要精，一道好题可以让你达到举一反三的效果。



褒奖优秀学子 激励接棒考生

2004~2009“春雨奖学金计划”回顾



1. 四年来,“春雨奖学金计划”四度颁奖,奖励学子150余人,颁发奖金近百万元,在南京、马鞍山、福州、合肥、北京、南昌等地举办十余场学子见面公益活动



2. 2002年,江苏省高考状元张璇在福州与中学生、家长交流学习经验



3. 2005年7月24日,首批“春雨奖学金计划”获奖学子相聚南京,畅谈成功经验,分享高分秘诀



4. 2006年5月27日,在新华书店北京王府井店,17位2005年考入清华、北大的“春雨奖学金计划”获奖学子与500多位学生、家长互动交流



5. 2006年8月22日,“高考优秀学子见面会”成功举办,独特的形式,丰富的流程,实用的内容,引发现场家长强烈共鸣



6. 在南京大行宫堂举办的2006年度“春雨奖学金计划”颁奖仪式



7. 严军总主编与获奖学子交流春雨教辅的使用体会



8. 严军总主编、春雨教育科学研究院的高级研究员和获奖学子亲切合影



9. 2007年8月下旬,“春雨奖学金计划”在南京、安徽马鞍山等地举办了学子见面会。图为2007年度获奖学子之一的李尚通



10. 2008年10月26日,16名优秀学子荣获“2008年度春雨奖学金”。图为考入清华大学医学部的安懿婷

用春雨教辅 进北大清华

春雨购书热线: 025-68801777 68801778
或登录“春雨教育网”(www.cyjy.com)

无知无畏

1796年3月30日，在德国格丁根大学校园里，一位18岁的青年学生吃完晚饭后，照例做导师每天布置给他的3道数学题。这个学生很有数学天赋，导师对他寄予了厚望，因此，在他完成固定作业之外，还会多给他布置几道较难的题。一般情况下，这个学生会在这3个小时内，把所有作业完成。

这一天，他像往常一样，不到3个小时，就把固定作业做完了。可是，在多布置的题中，最后一题写在一张小纸条上，要求用圆规和一把没有刻度的直尺，画出正十七边形。学生也没有特别在意，只是埋头做题。几个小时过去了，却找不到解答方法。他想：也许是导师看到我每次做题都很顺利，就故意给我增加了一些难度吧。越是困难，他越想把这道题攻克。他拿着圆规和直尺，一边画一边想着各种可能的思路，一直持续到天亮。最后，这道题终于被解开了。

学生拿着自己的作业，来到导师办公室。他内疚地对导师说：“您给我布置的最后一道题，我做了整整一个通宵才解答出来。对不起，我辜负了您对我的期望。”导师接过他的作业一看，惊呆了，问道：“这是你昨天晚上做出来的？”“是啊。可是我很笨，竟然花了整整一个晚上的时间。”

导师让学生坐下，取出圆规和直尺，让他当面在纸上再画一个正十七边形。学生很快就画了出来。这时，导师激动地说：“你知道吗？你解开了一个有两千多年历



史的数学悬案。这道题，阿基米德没有做出，牛顿没有解出。你竟然在一个晚上就把它解答出来了！你真是个天才。我也正在研究这道题目，昨天给你留题时，我一不小心把写这道题目的小纸条夹在了给你布置的作业里。”

很多年后，这个学生回忆起那件事情时，总是说：“如果有人告诉我那是一道两千年没有解开的题目，我不可能在一个晚上把它解决。”这个学生就是数学王子高斯。

“一切的现在都孕育着未来
未来的一切都生长于它的昨天
希望，并且为它奋斗
请将这一切放在你的肩上……”



我们的目标是： 过考点稳扎稳打

致读者

亲爱的同学：

这是一柄神奇的金钥匙，为你打开通向桂冠的大门；

这是一座心灵的桥梁，连接着你高远的志向、你的梦想和你书海搏击的身姿。

在你即将进入高考一轮复习之际，《高考解密》带着春雨名师的体温，带着春雨人殷殷的嘱托与期盼，悄然来到你的身边。

依据最新《考试大纲》，诠释《课程标准》的最新理念，统摄各学科的全部考点，将重点、难点、疑点和易错点一网打尽，全方位的精细讲解与分层级的梯度练习无缝对接——《高考解密》事半功倍的奇妙功效将让你在使用途中渐次感知。

新 高 考 新 目 标

根据《考试说明》，以必修、选修教材为线索，对每个考点进行详细阐述。针对一个或多个考点可能出现的考查形式、题型、难易系数，给出复习建议。

知识再现

梳理

逐一梳理各必考知识点、能力点，“自主填空”着意激发学生参与热情，形成教学互动。

基础

自测

结合必考知识点、能力点，以常考题型，分层设题的模式，检测知识梳理效果。

重、难、疑点

聚焦

聚焦各单元重、难、疑点与易错点，着意方法的传授与思路的导引。

模块整合一

集合、简易逻辑、推理与证明

必修1(第一章)
选修2-1(第一章)
选修2-2(第二章)

第一节 集合及其运算

新 高 考 新 目 标

掌握集合的表示法，理解集合的运算。

细说考点	命题猜想
1. 集合的含义与表示 (1)了解集合的含义、元素与集合的“属于”关系。 (2)能用自然语言、图形语言、集合语言(列举法或描述法)描述不同的具体问题。 2. 集合间的基本关系 (1)理解集合之间包含与相等的含义，能识别给定集合的子集。 (2)在具体情境中，了解全集与空集的含义。	1. 本节以集合为载体考查函数、不等式、方程、三角函数和曲线等有关知识。 2. 以考查集合的运算为主，同时考查集合的性质及集合与元素、集合之间的关系，同时应注意对“Venn图”的考查。 3. 以选择、填空题为主，与其他知识结合的大题也会出现。

知识再现

集合的含义、元素的特征、集合的表示法。

- 集合中的元素有三个明显的特征：(1)_____；(2)_____；(3)_____。
- 元素与集合的关系有_____和_____两种。
- 集合与集合之间有以下三种关系：
 - (1)子集(包含与被包含)定义： $A \subseteq B$ 如果任意 $x \in A$ ，那么 $x \in B$ 。
 - (2)真子集定义： $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$ ，且 B 中至少有一个元素 x ，规定：空集是任何一个非空集合的真子集；
 - (3)相等：_____ $\Leftrightarrow A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 。

基础

集合的含义、元素的特征、集合的表示法。

- (2007·全国1)设 $a, b \in \mathbb{R}$ ，集合 $\{1, a + bi, b\} = \{0, \frac{b}{a}, b\}$ ，则 $b - a =$ _____。
- (2007·江西)若集合 $M = \{0, 1, 2\}$ ， $N = \{(x, y) | x - 2y + 1 = 0\}$ ，

≥ 0 且 $x - 2y - 1 < 0, x, y \in M\}$ ，则 N 中元素的个数为_____。

- (2008·全国3)设 $M = \{m \in \mathbb{Z} | -3 < m < 2\}$ ， $N = \{n \in \mathbb{Z} | -1 \leq n \leq 3\}$ ，则 $M \cap N$ 等于()。
 - $\{0, 1\}$
 - $\{-1, 0, 1\}$
 - $\{0, 1, 2\}$
 - $\{-1, 0, 1, 2\}$

重、难、疑点

集合的含义、元素的特征、集合的表示法。

- 应区别 $\{a, b\}$ 与 $\{a, \{b\}\}$ 中的元素， $\{a, \{b, c\}\}$ 是含有一个元素 $\{b, c\}$ 的非空集合， $\{a, \{a, b\}\}$ 是含有一个元素 $\{a, b\}$ 的非空集合。
- 设集合 $M = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ，则 M 的子集有 $2^8 = 256$ 个，真子集有 255 个，非空子集有 255 个，非空真子集有 254 个。

解答集合问题，必须准确理解集合的有关概念，对于用描述法给出的集合 $\{x | x \in P\}$ ，要紧紧抓住紧接前面的代表元素，以及它所具有的性质 P ，例如 $A = \{x | y = 2 - x^2, \mathbb{R}\}$ 而 $B = \{x | y = 2 - x^2, x \in \mathbb{R}\}$ 。

基础分一分不丢

最新考情的归纳与提炼、精巧的结构体例、新颖的背景材料、丰富的题型、分级设题的训练模式、2009年各课改高考省市名校的最新模拟题、高考命题最新动向的精准预测……《高考解密》几乎汇聚了高考一轮复习精品用书的全部元素与精华。

也许，你是“春雨教育”图书的老朋友；也许，你是春雨人的新相识，选择了曾成功打造了教辅图书多个著名品牌的春雨人，选择了曾托举数千学子成功跨入清华、北大之门的“春雨教育”品牌图书，你就选择了快乐的学习历程，选择了胜利的桂冠，选择了梦想的成功！

关注“春雨奖学金计划”吧。如果你成功了，别忘了让我们分享你的经验和喜悦。我们盼望你成为“龙虎榜”中的一员，盼望你的照片和你的学习感悟成为激励下一届同学的生动资料。

你搏击的路上，有《高考解密》一路相伴，那是春雨人在为你的拼搏加油，那是春雨人在为你的成功喝彩。

模块整合一 集合、简易逻辑、推理与证明

热点考向

考点一 集合的概念

【例1】化简下列集合：
 $E = \{x | y = x + 1, 0 \leq x \leq 2, y \in \mathbb{N}\}$
 $F = \{(x, y) | y = x + 1, 0 \leq x \leq 2, y \in \mathbb{N}\}$

【解析】本题是集合与函数、方程的综合应用。
 【解】 $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ 。
 【评注】 E 和 F 是两类不同的集合， E 是数集， F 是点集，两者的区别关键是代表元不同。

【变式·训练】设集合 $A = \{x | y = x + 1, 0 \leq x \leq 2, y \in \mathbb{N}\}$, $B = \{(2^x, y) | y = x + 1, x \in A\}$, 则 $B =$ _____。

考点二 集合运算

【例2】(2007·广东地区高三数学第一次月考) 设全集 $U = \{x | x \text{ 是不大于9的正整数}\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, 则图中阴影部分表示的集合为 ()。

A. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ B. $\{7, 8\}$
 C. $\{7, 8, 9\}$ D. $\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

【解析】本题重点考查用图形表示集合，能识别出阴影部分表示的集合为 $\complement_U(A \cup B)$ 是解题的关键。
 【解】C。

【变式·训练】设集合 $A = \{x | x^2 + 4x + 6 = 0, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x | x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的值。

知识网络

```

        推理与证明
        ├── 推理
        │   ├── 归纳推理
        │   ├── 类比推理
        │   └── 演绎推理
        │       ├── 三段论
        │       └── 综合法
        └── 证明
            ├── 直接证明
            └── 间接证明
                ├── 反证法
                └── 反设法
    
```

专题方法

一、数形结合思想在解题中的应用

【例1】已知集合 $A = \{x | 2x - 1 \geq x + 1\}$, $B = \{x | 2m - x < 0\}$, 若 $A \cup B = A$, 求实数 m 的取值范围。

【解析】先求集合 A , 由函数 $y = (2x - 1)$ 与 $y = x + 1$ 的图象, 如图, 不等式 $(2x - 1) \geq x + 1$ 的解集为 $\{x | x \geq 0 \text{ 或 } x > 2\}$ 。

又 $B = \{x | x < 2m\}$,
 $\therefore A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$,
 将集合 A, B 在数轴上表示出来, 如图。

要使 $B \subseteq A$, 即 B 中元素都在集合 A 对应的图形区域内, 则 $2m \geq 2$, 所以 $m \geq 1$ 为所求。

注: 数形结合思想是数形对应与相互转化思想方法的体现, 它使得抽象的数量关系与直观的几何图形建立了联系, 图示法是集合的表示方法之一, 集合的包含关系与运算关系可以借助于Venn图、数轴上的点的集合、平面直角坐标系中的快速来反映。

热点考向

对各考点精心设计“典例剖析”与“变式·拓展”，让学生即学即用，举一反三。

知识网络

网络或图表式再现每个知识模块的重点和衍生关系，帮助学生将书读薄。

专题方法

对高考常用的数学解题思想、方法作条目式分类提炼并展示高考热点，整合解题思路与方法，解析、点评鞭辟入里。

变式训练·达标测试·质量评估

贴近生活的背景材料、新颖丰富的题型、分层设题的模式、课改省市的最新模拟题，引领学生能力梯度提升。



江苏春雨教育集团

春雨教育科学研究院诚聘 考试信息员

江苏春雨教育集团为适应各省高考自主命题和新课标改革的要求,加大对高考、中考题的研究力度,密切与全国各地一线优秀教师的联系,以推动春雨图书精品化、名牌化、地方化进程,现在全国范围内面向教育系统特聘教育考试信息员。

一、招聘对象

1. 各省、市(州)、县(区)高中、初中、小学骨干教师,高中、初三、六年级教师优先。
2. 各省、市(州)、县(区)教研室教研员,考试中心研究员。

二、工作内容

1. 向研究院提供全国各省、市(州),高三质量调研、统考、联考与一、二、三模考试卷(全科,含答案),若被采用,可获得100—400元报酬。
2. 高考结束5天内向研究院提供高考全真试卷(全科,含答案),若被采用,可获得100—400元报酬。
3. 提供原创“自命题”和“改编题”(含解析及答案),一经采用,每道题可获20—100元报酬。
4. 中考结束10天内向研究所提供中考各地市或省试卷(全科,含答案),若被采用,可获得200—300元报酬;中考各地市命题的省份,能在中考结束15天内将各地市开考各学科中考试卷(含答案)收集齐全,并促成该省各学科《中考试卷汇编》及时出版的,一次性奖励4000元。
5. 学期末时将本校小学初中、高中名校单元测试、月考、期中、期末卷收集齐全并在下学期开学前寄至研究所,一经采用,可获得2000—5000元报酬。
6. 配合研究院在本校设立春雨图书实验班。

春雨教育科学研究院诚聘 作者

如果您想编写、出版配套您所在地市学校所用教材的练习册、单元测试卷和模拟试卷
如果您(或单位)想编写您所在省或地市(自主命题)的中考、高考辅导用书和复习模拟试卷
如果您(或单位)有教学研究成果或内部辅导材料希望正式出版
如果您有论文想发表、书稿想出版
如果您想参与教辅用书的编写

请填写以下表格

姓 名		性 别		年 龄	
学 历		职 称		电 话	
供职学校				年 级	
通讯地址				邮 编	
主要业绩与愿望					

春雨教育

让您美好的愿望成为现实!

联系我们: 通 联: 南京市鼓楼邮局172信箱

邮 编: 210008

联 系 人: 束老师

E-mail: shxj007@126.com

江苏春雨教育集团教育科学研究院: 南京市中山北路88号17楼。 咨询电话: 025-68801833、68801822

Contents 目录

模块整合一 集合、简易逻辑、推理与证明

- 第一节 集合及其运算/1
- 第二节 命题及其关系、常用逻辑用语/3
- 第三节 推理与证明/8
- 复习质量评估卷一/15

模块整合二 函数的概念及其基本初等函数 I

- 第一节 函数的概念及图象/17
- 第二节 函数的单调性、奇偶性/23
- 第三节 指、对数函数/27
- 第四节 幂函数/30
- 第五节 二次函数/32
- 第六节 函数与方程/35
- 第七节 函数模型及应用/38
- 复习质量评估卷二/44

模块整合三 导数及其应用

- 第一节 导数及其应用/46
- 第二节 导数在研究函数问题中的应用/49
- 第三节 导数的综合应用/52
- 复习质量评估卷三/56

模块整合四 不等式

- 第一节 不等关系及不等式的性质/58
- 第二节 一元二次不等式/60
- 第三节 二元一次不等式(组)与简单的线性规划问题/62
- 第四节 基本不等式/65

- 第五节 不等式的应用/67
- 复习质量评估卷四/71

模块整合五 数列

- 第一节 数列的概念/73
- 第二节 等差数列/75
- 第三节 等比数列/77
- 第四节 等差、等比数列的综合应用/79
- 第五节 数列的通项与求和/82
- 第六节 数列的综合应用/84
- 复习质量评估卷五/89

模块整合六 三角函数与解三角形

- 第一节 三角函数的概念/91
- 第二节 同角三角函数关系与诱导公式/93
- 第三节 三角函数的图象/95
- 第四节 三角函数的性质/98
- 第五节 两角和与差的三角函数/100
- 第六节 正弦定理、余弦定理以及解斜三角形/102
- 复习质量评估卷六/107

模块整合七 平面向量与复数

- 第一节 平面向量的概念与运算/109
- 第二节 平面向量的数量积/112
- 第三节 平面向量的应用/114
- 第四节 复数的概念与运算/116
- 第五节 复数的几何意义/118
- 复习质量评估卷七/123



模块整合八 平面解析几何

- 第一节 直线的方程/125
 - 第二节 两条直线的平行与垂直/127
 - 第三节 直线方程的应用/129
 - 第四节 圆的方程/131
 - 第五节 直线与圆的位置关系/133
 - 第六节 椭圆/134
 - 第七节 双曲线/137
 - 第八节 抛物线/139
 - 第九节 直线与圆锥曲线/141
 - 第十节 圆锥曲线中的最值、定值问题/143
 - 第十一节 综合应用问题/145
- 复习质量评估卷八/151

模块整合九 立体几何

- 第一节 空间几何体、平面的基本性质/153
 - 第二节 空间两条直线的位置关系/155
 - 第三节 平行/157
 - 第四节 垂直/158
 - 第五节 空间几何体的表面积、体积/160
 - 第六节 综合应用题/162
- 复习质量评估卷九/167

模块整合十 算法初步

- 第一节 算法的含义与流程图/169
 - 第二节 基本算法语句/171
- 复习质量评估卷十/176

模块整合十一 统计与统计案例

- 第一节 抽样方法/178
 - 第二节 总体分布、总体特征数的估计及线性回归方程/181
 - 第三节 统计案例/184
- 复习质量评估卷十一/188

模块整合十二 概率

- 第一节 随机事件及其概率/190
 - 第二节 古典概型与几何概型/192
- 复习质量评估卷十二/195

参考答案与解析(活页)

第一节 集合及其运算

新 高考 新 目标

登既往而知未来，你就可成竹在胸啦！

细说考点	命题猜想
1. 集合的含义与表示 (1)了解集合的含义、元素与集合的“属于”关系。 (2)能用自然语言、图形语言、集合语言(列举法或描述法)描述不同的具体问题。 2. 集合间的基本关系 (1)理解集合之间包含与相等的含义，能识别给定集合的子集。 (2)在具体情境中，了解全集与空集的含义。 3. 集合的基本运算 (1)理解两个集合的并集与交集的含义，会求两个简单集合的并集与交集。 (2)理解在给定集合中一个子集的补集的含义，会求给定子集的补集。 (3)能使用韦恩图(Venn图)表达集合的关系及运算。 (4)了解补集思想，学会从问题的反面研究问题。	1. 本节以集合为载体考查函数、不等式、方程、三角函数和曲线等有关知识。 2. 以考查集合的运算为主，同时考查集合的性质及集合与元素、集合之间的关系，同时应注意对“Venn图”的考查。 3. 以填空题为主，与其他知识结合的大题也会出现。 4. 本节是高中数学的起始章节，对函数的学习至关重要，是高考必考内容，一般在填空题的起始位置，属于低档题、送分题。

知识再现

圣人云：温故而知新，可以为师矣。

- 集合中的元素有三个明显的特征：(1) _____；
(2) _____；(3) _____。
- 元素与集合的关系有 _____ 和 _____ 两种。
- 集合与集合之间有以下三种关系：
 (1)子集(包含与被包含)定义： $A \subseteq B \Leftrightarrow$ 如果任意 $x \in A$ ，那么 _____；
 (2)真子集定义： $A \subsetneq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ ，且 B 中至少有一个元素 _____ (规定：空集是任何一个非空集合的真子集)；
 (3)相等：_____ $\Leftrightarrow A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$ 。
- 集合的运算涉及交、并、补集。
 (1)交集定义： $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ ；

- (2)并集定义： $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ ；
- (3)补集定义：设 U 为全集， $A \subseteq U$ ，
叫做集合 A 在 U 中的补集，记为 $\complement_U A$ ，即 $\complement_U A = \{x | x \in U \text{ 且 } x \notin A\}$ ；
- (4)基本性质：
 ① $A \cap A = A$ ；② $A \cup A = A$ ；
 ③ $A \cap \complement_U A = \emptyset$ ；④ $A \cup \complement_U A = U$ ；
 ⑤ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ；
 ⑥ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ；
 ⑦ $A \cap \emptyset = \emptyset$ ；⑧ $A \cup \emptyset = A$ ；
 ⑨ $\complement_U (\complement_U A) = A$ ；
 ⑩ $\complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B)$ ；
 ⑪ $\complement_U (A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$ 。
- (5)一个集合有 n 个元素，则该集合共有 _____ 个子集。

基础

不夯实基础，难建成高楼

1. (2007·全国Ⅰ) 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 集合 $\{1, a+b, a\} = \{0, \frac{b}{a}, b\}$, 则 $b-a =$ _____.
2. (2007·江西) 若集合 $M = \{0, 1, 2\}$, $N = \{(x, y) | x-2y+1 \geq 0 \text{ 且 } x-2y-1 \leq 0, x, y \in M\}$, 则 N 中元素的个数为 _____.
3. (2008·全国Ⅱ) 设 $M = \{m \in \mathbf{Z} | -3 < m < 2\}$, $N = \{n \in \mathbf{Z} | -1 \leq n \leq 3\}$, 则 $M \cap N =$ _____.
4. (2008·北京) 若全集 $U = \mathbf{R}$, $A = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | x < -1 \text{ 或 } x > 4\}$, 则 $A \cap (\complement_U B) =$ _____.
5. (2008·天津) 设集合 $U = \{x \in \mathbf{N} | 0 < x \leq 8\}$, $S = \{1, 2, 4, 5\}$, $T = \{3, 5, 7\}$, 则 $S \cap (\complement_U T) =$ _____.

重、难、疑点

激活智慧，步入融会贯通佳境

1. 应区别 $0, \emptyset, \{0\}$, 其中 0 是 $\{0\}$ 中的元素, $0 \in \{0\}$; $\{0\}$ 是含有一个元素 0 的非空集合; $\emptyset \notin \{0\}$.
 2. 设集合 $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, 则 M 的子集有 2^n 个, 真子集有 $2^n - 1$ 个, 非空子集有 $2^n - 1$ 个, 非空真子集有 $2^n - 2$ 个.
 3. 解答集合问题, 必须准确理解集合的有关概念, 对于用描述法给出的集合 $\{x | x \in P\}$, 要紧紧抓住竖线前面的代表元素 x 以及它所具有的性质 P , 例如: $A = \{x | y = 2^x\} \subset \mathbf{R}$, 而 $B = \{y | y = 2^x\} = \{y | y > 0\}$.
 4. 集合间的关系常用 Venn 图表示.
 5. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A, A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
 6. 含参数的集合问题可以用集合的互异性来处理, 有时需要用到分类讨论、数形结合的思想, 还要提防“空集”这一陷阱.
- 如: $A = \{x | x^2 - 8x + 15 = 0\}$, $B = \{x | ax - 1 = 0\}$, 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的值. 某同学只求出了 $a = \frac{1}{3}$ 或 $\frac{1}{5}$, 还有一个值他没有求出来, 你知道是多少吗?
7. 对于集合问题, 首先要确定它是属于哪一类集合(数集、点集或某类图形的集合), 然后再确定处理此类问题的解法.
 8. 集合问题多与函数、方程、不等式有关, 要注意各类知识的融会贯通.

热点考向

举一反三，参悟玄机之妙法

考点1 集合的概念

【典例剖析1】 化简下列集合:

$$E = \{x | y = x + 1, 0 \leq y \leq 2, y \in \mathbf{N}\} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$F = \{(x, y) | y = x + 1, 0 \leq y \leq 2, y \in \mathbf{N}\} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【剖析】 本题是集合与函数、方程的综合应用.

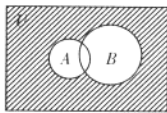
【解答】 $E = \{-1, 0, 1\}$, $F = \{(-1, 0), (0, 1), (1, 2)\}$.

【特别提醒】 E 和 F 是两类不同的集合. E 是数集, F 是点集, 两者的区别关键是代表元不同.

【变式·拓展1】 设集合 $A = \{x | y = x + 1, 0 \leq y \leq 2, y \in \mathbf{N}\}$, $B = \{(2^x, y) | y = x + 1, x \in A\}$, 则 $B =$ _____.

考点2 集合的运算

【典例剖析2】 (2007·广东地区高三数学第一次月考) 设全集 $U = \{x | x$ 是不大于9的正整数 $\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, 则图中阴影部分表示的集合为 _____.



【剖析】 本题重点考查用图形表示集合, 能识别出阴影部分表示的集合为 $\complement_U(A \cup B)$ 是解题的关键.

【解答】 $\{7, 8, 9\}$.

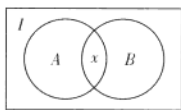
【变式·拓展2】 (2008~2009·徐州调研) 已知集合 $A = \{x | x = 2n - 1, n \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | x^2 - 4x < 0\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

考点3 集合在实际生活中的应用

【典例剖析3】 向50名学生调查对A、B两事件的态度, 赞成A的人数是全体人数的五分之三, 赞成B的人数比赞成A的多3人, 其余的人对A、B都不赞成, 另外, 对A、B都不赞成的学生比对A、B都赞成的学生的三分之一还多1人. 问: 对A、B都赞成的学生和都不赞成的学生各有多少人?

【剖析】 画出韦恩图, 借助图形列出等式.

【解答】 赞成A的人数为 $50 \times \frac{3}{5} = 30$, 赞成B的人数为 $30 + 3 = 33$.



如图, 记50名学生组成的集合为 I , 赞成A的学生全体为集合 A , 赞成B的学生全体为集合 B . 设对A、B都赞成的人数为 x , 则由题意知对A、B都不赞成的人数为 $(\frac{x}{3} + 1)$, 赞成B而不赞成A的人数为 $(33 - x)$, 于是可得方程 $(30 - x) + (33 - x) + x + (\frac{x}{3} + 1) = 50$, 解得 $x = 21$.

$\frac{x}{3} + 1 = 8$, 所以对A、B都赞成的学生有21人, 对A、B都不赞成的学生有8人.

【特别提醒】 (1) 借助韦恩图得出的结论 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 具有一般性; (2) 本结论可推广到三个集合的情况: $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

【变式·拓展3】 某班有学生60人, 其中数学爱好者有40人, 英语爱好者有35人, 这两科都不爱好的有5人, 则这两科都爱好的学生有多少人?

考点4 集合的运算与解析几何的联系

【典例剖析4】 已知集合 $A = \{y | y^2 - (a^2 + a + 1)y + a(a^2 + 1) \leq 0\}$, $B = \{y | y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}, 0 \leq x \leq 3\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 求实数 a 的取值范围.

【剖析】 A 是不等式的解集, B 是函数的值域, 结合 $A \cap B = \emptyset$ 和数轴的直观性, 可求实数 a 的取值范围.

【解答】 $A = \{y | y^2 - (a^2 + a + 1)y + a(a^2 + 1) \leq 0\} = \{y | (y - a)[y - (a^2 + 1)] \leq 0\}$.

$$\therefore a^2 + 1 > a,$$

$$\therefore A = [a, a^2 + 1].$$

$$B = \left\{ y \mid y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{5}{2}, 0 \leq x \leq 3 \right\} = [2, 4].$$

又 $A \cap B = \emptyset$,

$\therefore a^2 + 1 < 2$ 或 $a > 4$, 解得 $-1 < a < 1$ 或 $a > 4$.

【变式·拓展4】已知集合 $A = \{x \mid x^2 + (2+p)x + 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$, 若 $A \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$, 求实数 p 的取值范围.

考点5 集合的深层次理解

【典例剖析5】(2008·福建卷(文))设 P 是一个数集, 且至少含有两个数, 若对任意 $a, b \in \mathbb{R}$, 都有 $a+b, a-b, ab, \frac{a}{b} \in P$ (除数 $b \neq 0$), 则称 P 是一个数域. 例如有理数集 $\mathbb{Q}$ 是数域; 数集 $F = \{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ 也是数域. 有下列命题: ①整数集是数域; ②若有理数集 $\mathbb{Q} \subseteq M$, 则数集 M 必为数域; ③数域必为无限集; ④存在无穷多个数域. 其中正确的命题的序

号是_____. (把你认为正确的命题的序号都填上)

【剖析】首先要读懂“数域”概念, 其次要对四种形式逐个验证(或举反例).

【解答】③④.

【特别提醒】注重对集合深层次理解的训练.

【变式·拓展5】(2008·福建卷(理))设 P 是一个数集, 且至少含有两个数, 若对任意 $a, b \in P$, 都有 $a+b, a-b, ab, \frac{a}{b} \in P$ (除数 $b \neq 0$), 则称 P 是一个数域. 例如有理数集 $\mathbb{Q}$ 是数域, 有下列命题: ①数域必含有 0, 1 两个数; ②整数集是数域; ③若有理数集 $\mathbb{Q} \subseteq M$, 则数集 M 为数域; ④数域必为无限集. 其中正确的命题的序号是_____. (把你认为正确的命题的序号都填上)

第二节 命题及其关系、常用逻辑用语

新高考新目标

虽然往而未来, 你就可成竹在胸啦!

细说考点	命题猜想
- 了解命题及其逆命题、否命题与逆否命题的含义. - 理解命题的等价性. - 理解必要条件、充分条件与充要条件的意义, 会分析四种命题的相互关系. - 了解逻辑联结词“或”“且”“非”的含义. - 理解全称量词与存在量词的意义. - 能正确地对含有一个量词的命题进行否定. - 理解、掌握反证法的原理.	- 以考查充要条件的判断为重点, 兼顾考查命题的四种形式及命题的等价性; 考查命题转换、逻辑推理能力和分析、解决问题的能力. - 多以填空题的形式出现. - 也以充要条件为载体, 考查其他数学知识, 主要以代数证明、几何证明为主. - 以考查推理能力为重点, 一般不会单独命题, 经常跟其他知识结合在一起, 在知识的交汇点处命题. - 全称量词与存在量词作为新增内容, 很有可能在填空题中出现. - 注意反证法在证明: ①唯一性问题; ②存在性问题; ③“至多”或“至少”性问题中的应用.

知识再梳理

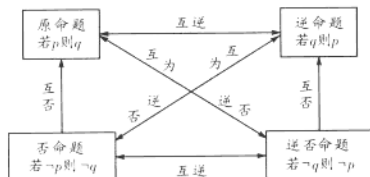
圣人云: 温故而知新, 可以为师矣.

1. 能够判断_____的语句叫做命题, 命题有“若 p 则 q ”的形式, 其中 p 是命题的_____, q 是命题的_____.

2. 四种命题.

(1) 四种命题:

一般地, 用 p 和 q 分别表示原命题的条件和结论, 用 $\neg p$ 和 $\neg q$ 分别表示 p 和 q 的否定, 于是四种命题的形式为



原命题: _____;

逆命题: _____;

否命题: _____;

逆否命题: _____.

(2) 四种命题的关系:

两个命题互为逆否命题, 它们有相同的_____性;

两个命题为互逆命题或互否命题, 它们的_____性没有关系.

3. 反证法.

欲证“若 p 则 q ”为真命题, 从_____即“_____”出发, 经过正确的逻辑推理导出矛盾, 从而“_____”为假, 即原命题为真, 这样的方法称为反证法.

4. 如果已知 $p \Rightarrow q$, 那么 p 是 q 的_____条件, q 是 p 的_____条件.

5. 如果既有 $p \Rightarrow q$, 又有 $q \Rightarrow p$, 记作 $p \Leftrightarrow q$, 那么 p 是 q 的_____条件, 简称充要条件.

6. 如果 $p \Rightarrow q, q \not\Rightarrow p$, 那么 p 是 q 的_____条件, q 是 p 的_____条件.

- 从集合观点看,建立命题 p, q 相应的集合, $p: A = \{x | p(x) \text{ 成立}\}$, $q: B = \{x | q(x) \text{ 成立}\}$, 那么:
(1) 若 $A \subseteq B$, 则 p 是 q 的 _____ 条件; 若 $A \not\subseteq B$, 则 p 是 q 的 _____ 条件.
(2) 若 $A = B$, 则 p 是 q 的 _____ 条件; 若 $A \subsetneq B$ 且 $B \subsetneq A$, 则 p 是 q 的 _____ 条件.
- p 或 q 就是用逻辑联结词 _____ 把命题 p 和 q 联结起来得到的新命题; p 且 q 就是用逻辑联结词 _____ 把命题 p 和 q 联结起来得到的新命题; 非 p 就是对命题 p 进行 _____ 而得到的新命题, 用的是逻辑联结词 _____.
- “所有”“任意”“每一个”等表示全体的量词在逻辑中称为 _____, 通常用符号“_____”表示“对任意 x ”; “有一个”“有些”“存在一个”等表示部分的量词在逻辑中称为 _____, 通常用符号“_____”表示“存在 x ”.
- 含有全称量词的命题称为 _____, 含有存在量词的命题称为 _____.
- 全称命题的一般形式可表示为 _____, 存在性命题的一般形式可表示为 _____, 其中 _____ 为给定的集合, _____ 是一个关于 x 的命题.
- 要判定一个存在性命题为真, 只要在给定的集合中, 找到一个元素 x , 使命题 $P(x)$ 为 _____; 否则命题为 _____.
- 要判定一个全称命题为真, 必须对给定集合的每一个元素 x , 使命题 $P(x)$ _____; 但要判定一个全称命题为假, 只要在给定的集合内找出一个 x_0 , 使 $P(x_0)$ 为假.
- 含有一个量词的命题的否定: 一般地, “ $\forall x \in M, P(x)$ ”的否定为“_____”, “ $\exists x \in M, P(x)$ ”的否定为“_____”.

基础

夯实基础, 构建高楼

- (2008·江西) “ $|x| = |y|$ ”是“ $x = y$ ”的 _____ 条件.
- (2008·安徽) “ $a < 0$ ”是“方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 至少有一个负根”的 _____ 条件.
- (2007·重庆) 命题: “若 $x^2 < 1$, 则 $-1 < x < 1$ ”的逆否命题是 _____.
- (2007·宁夏) 若命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, \sin x \leq 1$, 则命题 p 的否命题是 _____.
- (2008·湖北) 若集合 $P = \{1, 2, 3, 4\}$, $Q = \{x | 0 < x < 5, x \in \mathbf{R}\}$.
① $x \in P$ 是 $x \in Q$ 的充分条件, 不是 $x \in Q$ 的必要条件;
② $x \in P$ 不是 $x \in Q$ 的充分条件, 是 $x \in Q$ 的必要条件;
③ $x \in P$ 既是 $x \in Q$ 的充分条件, 又是 $x \in Q$ 的必要条件;
④ $x \in P$ 既不是 $x \in Q$ 的充分条件, 又不是 $x \in Q$ 的必要条件.
其中正确说法的序号是 _____.

重、难、疑点

激活智慧, 步入融会贯通境界

一、命题及其关系

重点:

- 一个语句是命题要具备: ①是陈述句; ②可以判断真假.
- “否命题”与“命题的否定”不是同一概念. “否命题”是

对命题的条件与结论同时进行否定; 而“命题的否定”只是否定命题的结论.

常见的否定词见下表:

正面词语	等于	大于($>$)	小于($<$)	是	都是	任意的
否定词语	不等于	不大于($\leq$)	不小于($\geq$)	不是	不都是	某个

正面词语	所有的	任意两个	至多有一个	至少有一个	至多有 n 个
否定词语	某些	某两个	至少有两个	一个也没有	至少有 $n+1$ 个

3. 当一个命题的真假难以判断时, 可考虑判断其等价命题(逆否命题).

4. 在证明一个形如“若 p 则 q ”的命题为真时, 要由条件 p 通过严密的逻辑推理得到结论 q , 而确定一个形如“若 p 则 q ”的命题为假时, 一般可只举一个反例来说明命题为假.

5. 反证法体现了数学的转化思想, 常用于以下问题的证明: ①唯一性问题; ②否定性问题; ③“至多”或“至少”问题.

难点:

1. 处理充分必要条件时, 首先要分清条件与结论, 然后才能进行推理和判断. 此类问题一般有两种设问方式: 一是问“ A 是 B 的……条件”, 此时要分清 A 是条件, B 是结论; 二是问“ A 成立的……条件是 B ”, 此时要分清 B 是条件, A 是结论.

2. 从集合的角度考查充分、必要条件, 不仅为判定此类问题提供了一种解题途径, 而且能开阔视野, 深化对“集合”及“充要条件”这两个重要概念的理解.

3. 等价变换是判断充分、必要条件的重要手段之一, 特别是否定性的命题, 常通过它的等价命题, 即逆否命题来考查条件与结论的充分、必要关系. 如“ $A \Rightarrow B$ ”与“ $\neg B \Rightarrow \neg A$ ”是等价的, 有时借助于韦恩图更直观.

4. 确定条件为非充分或非必要时, 常用构造反例的方法来说明.

二、常用逻辑用语

重点:

对含逻辑联结词的命题判断真假时, 构成“或”命题的两部分都为假时才为假, 否则为真; 构成“且”命题的两部分都为真时才为真, 否则为假; 构成的“非”命题, 若原命题为真, 则“非”命题为假, 否则为真.

难点:

1. 全称命题和存在性命题真假性的判定方法.

要判定一个全称命题, 必须对限定集合 M 中的每一个 x 验证 $P(x)$ 成立, 一般用代数推理的方法加以证明; 要判定一个全称命题为假, 只须举出一个反例即可. 要判定一个存在性命题为真, 只要在限定集合 M 中能找到一个 x_0 , 使 $P(x_0)$ 成立即可; 否则, 这一存在性命题为假.

2. 含有一个量词的命题的否定.

否定全称命题时, 将全称量词变为存在量词, 再否定它的结论, 即全称命题的否定是存在性命题.

否定存在性命题时,将存在量词变为全称量词,再否定它的结论,即存在性命题的否定是全称命题。

热点考向 引导

第一反证,参悟玄机之大法

考点1 命题的构成

【典例剖析1】下列语句中是命题的有_____。

- ①空集是任何集合的子集;
- ② $x^2-3x-4=0$;
- ③ $3x-2>0$;
- ④把门关上;
- ⑤垂直于同一条直线的两条直线必平行吗?
- ⑥自然数是偶数。

【剖析】判断一个语句是不是命题,就是要看它是否符合“是陈述句”和“可以判断真假”这两个条件。

【解答】②③是开语句,不是命题;④是祈使句,不是命题;⑤是疑问句,不是命题,只有①⑥是命题。

【特别提醒】(1)一般说来,疑问句、祈使句、感叹句都不是命题。

(2)在数学或其他科学技术中,还有一类陈述句也经常出现,如“每一个不小于6的偶数都是两个奇素数之和(哥德巴赫猜想)”等,虽然目前还不能确定这些语句的真假,但是随着科学技术的发展,总能确定它们的真假,这一类猜想仍算为命题。

【变式·拓展1】下列语句中是命题的有_____。

- ①地球是太阳的一颗行星;
- ② $0 \in \mathbb{N}$;
- ③老年人可以组成一个集合;
- ④ $|x+a|$;
- ⑤ $x>3$ 。

考点2 四种命题关系

【典例剖析2】给出下列四个命题:

- ①“若 $xy=1$,则 x,y 互为倒数”的逆命题;
- ②“相似三角形的周长相等”的否命题;
- ③“若 $m \leq -1$,则方程 $x^2-2mx+m^2+m=0$ 有实根”的逆否命题;
- ④“ $A \cup B=B$,则 $B \subseteq A$ ”的逆否命题。

其中是真命题的是_____。

【剖析】原命题是真(或假) $\Leftrightarrow$ 原命题的逆否命题是真(或假),原命题的逆命题是真(或假) $\Leftrightarrow$ 原命题的否命题是真(或假)。

【解答】①③。

【特别提醒】因为在改写某一命题的否命题或逆否命题时易错,所以在判断这一类命题的真假时,通常通过判断该命题的逆命题或该命题的真假性来回答,如②③④的判断。

【变式·拓展2】下列四个命题:

- ①“在 $\triangle ABC$ 中,若 $\sin A > \sin B$,则 $A > B$ ”的否命题;
 - ②“ x,y 是整数,若 $x+y \neq 7$,则 $x \neq 3$ 且 $y \neq 4$ ”的否命题;
 - ③“若 $x > 1, y > 2$,则 $x+y > 3$ ”的逆否命题;
 - ④“若 $A \cap B=A$,则 $A \subseteq B$ ”的逆否命题。
- 其中是真命题的是_____。

考点3 反证法

【典例剖析3】已知 a, b, c 是互不相等的非零实数,求证:三个方程 $ax^2+2bx+c=0, bx^2+2cx+a=0, cx^2+2ax+b=0$ 中至少有一个方程有两个相异实根。

【解答】假设三个方程都没有两个相异实根,则 $\Delta_1 = 4b^2 - 4ac \leq 0, \Delta_2 = 4c^2 - 4ab \leq 0, \Delta_3 = 4a^2 - 4bc \leq 0$,三式相加有 $a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2 \leq 0$,

$$\text{即 } (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \leq 0, \quad ①$$

由题意 a, b, c 互不相等,

$\therefore$ ①式不能成立。

$\therefore$ 假设不成立,即三个方程中至少有一个方程有两个相异实根。

【特别提醒】在正面难以证明的情况下,常采用反证法(正难则反)。通常对于“至多”或“至少”的命题采用逆向思维方法:先反设,求出相应集合,再求此集合的补集。此处理方法流畅、简便,避免了繁杂的讨论。

【变式·拓展3】若三条抛物线 $y=x^2+4ax-4a+3, y=x^2+(a-1)x+a^2, y=x^2+2ax-2a$ 中至少有一条与 x 轴有交点,求 a 的取值范围。

考点4 充分必要条件的判断

【典例剖析4】①“ $x>1$ ”是“ $x>0$ ”的_____条件;

②“ $x>1$ ”是“ $x>a$ ”的充分不必要条件,则 a 的取值范围是_____;

③请写出一个能够成为“ $x>1$ ”的充分不必要条件的表达式_____。

【剖析】首先要弄清楚所求问题中的逻辑顺序,是“ $A \Rightarrow B$ ”还是“ $B \Rightarrow A$ ”?其次 $A \Rightarrow B \Leftrightarrow A$ 是 B 的充分条件 $\Leftrightarrow B$ 是 A 的必要条件; $A \nRightarrow B \Leftrightarrow A$ 不是 B 的充分条件 $\Leftrightarrow B$ 不是 A 的必要条件。

【解答】①充分不必要;② $a < 1$;③ $x > 2$ (不唯一,只需符合 $x > a(a > 1)$ 均可以)。

【特别提醒】一定要明白逻辑顺序。

【变式·拓展4】已知 $p: \begin{cases} x \\ x+2 \geq 0, \\ x-10 \leq 0 \end{cases}$, $q: \{x | 1-m \leq x \leq 1+m, m > 0\}$ 。若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件,求实数 m 的取值范围。

考点5 根据充分、必要条件求变量范围

【典例剖析5】已知 $p: \left| 1 - \frac{x-1}{3} \right| \leq 2, q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0(m > 0)$ 。若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件,求实数 m 的取值范围。

【剖析】由 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件知, $\neg p \Rightarrow \neg q$ 但 $\neg q \nRightarrow \neg p$,可得 $q \Rightarrow p, p \nRightarrow q$,故有两种解。

【解答】由 $\left| 1 - \frac{x-1}{3} \right| \leq 2$,得 $-2 \leq x \leq 10$,所以 $\neg p: x < -2$ 或 $x > 10$ 。由 $x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0$,得 $1-m \leq x \leq 1+m(m > 0)$,所以 $\neg q: x > 1+m$ 或 $x < 1-m(m > 0)$ 。因为 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件,

$$\therefore \begin{cases} m > 0, \\ 1+m \leq 10, \text{ (等号不能同时取得)} \text{ 解得 } 0 < m \leq 3, \\ 1-m \geq -2, \end{cases}$$

【特别提醒】 一般来说,条件、结论为否定式的命题,都可运用等价法来判断.

【变式·拓展5】 若不等式 $|x-a|<1$ 成立的充分不必要条件是 $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$,则实数 a 的取值范围是_____.

考点6 逻辑知识的综合运用

【典例剖析6】 已知 $c>0$,设命题 p :函数 $y=c^x$ 为减函数,命题 q :当 $x\in[\frac{1}{2},2]$ 时,函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}>\frac{1}{c}$ 恒成立. p 或 q 为真命题, p 且 q 为假命题,求 c 的取值范围.

【剖析】 本题考查函数、命题等概念,有助于提高学生的综合能力.

【解答】 由 $y=c^x$ 为减函数,得 $0<c<1$.当 $x\in[\frac{1}{2},2]$ 时,因为 $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$,故函数 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上为减函数,在 $(1,2]$ 上为增函数.

$\therefore f(x)=x+\frac{1}{x}$ 在 $x\in[\frac{1}{2},2]$ 上的最小值为 $f(1)=2$.

当 $x\in[\frac{1}{2},2]$ 时,由函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}>\frac{1}{c}$ 恒成立,得 $2>\frac{1}{c}$,解得 $c>\frac{1}{2}$.若 p 真 q 假,则 $0<c\leq\frac{1}{2}$;若 p 假 q 真,则 $c\geq 1$,所以 c 的取值范围是 $(0,\frac{1}{2}]\cup[1,+\infty)$.

【特别提醒】 判断函数的单调性有两种方法:①定义;②求导,而求导来得更便捷.

【变式·拓展6】 已知 $c>0$,设 p :函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, q :不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$.如果 p 和 q 有且仅有一个正确,求 c 的取值范围.

考点7 函数中充分、必要条件的探求

【典例剖析7】 已知 $ab\neq 0$,则 $a-b=1$ 是 $a^3-b^3-ab-b^2-a^2=0$ 的_____条件.

【解答】 若 $a-b=1$,则 $a^3-b^3-ab-a^2-b^2$
 $= (a-b)(a^2+b^2+ab)-(ab+a^2+b^2)$
 $= (a-b-1)(a^2+b^2+ab)$
 $= 0$.

若 $a^3-b^3-ab-a^2-b^2=0$,

则 $(a-b-1)(a^2+ab+b^2)=0$.

$\therefore ab\neq 0$,

$\therefore a^2+ab+b^2>0$ 恒成立.

$\therefore a-b-1=0$.

故 $a-b=1$ 是 $a^3-b^3-ab-a^2-b^2=0$ 的充要条件.

【特别提醒】 解此类题既要验证充分性又要验证必要性.

【变式·拓展7】 关于 x 的方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负实根的充要条件是_____.

考点8 解析几何中充分、必要条件的探求

【典例剖析8】 已知 $M=\{(x,y)|y^2=2x\}$, $N=\{(x,y)|(x-a)^2+y^2=9\}$,求 $M\cap N\neq\emptyset$ 的充要条件.

【剖析】 集合 M 表示抛物线,集合 N 表示以 $(a,0)$ 为圆心,以 3 为半径的圆,由它们构成的关于 x 的方程需同时满足 $\Delta\geq 0$ 及至少有一个非负根这两个条件.

【解答】 考虑 $M\cap N\neq\emptyset$ 的充要条件是方程组

$\begin{cases} y^2=2x, \\ (x-a)^2+y^2=9 \end{cases}$ 至少有一个实数解,即 $x^2+2(1-a)x+a^2-9=0$ 至少有一个非负根,由 $\Delta\geq 0$,得 $a\leq 5$.又因为上述方程有两个负根 x_1, x_2 的充要条件是 $x_1+x_2<0$ 且 $x_1x_2>0$,即 $-2(1-a)<0$ 且 $a^2-9>0$,解得 $a<-3$.于是使这个方程至少有一个非负根的 a 的取值范围是 $-3\leq a\leq 5$,此即为所求的充要条件.

【特别提醒】 本题采用了数与形的转化,即把两图形的交点问题转化为求根问题,实质上,在解决集合、逻辑、不等式问题时,常通过某种转化来获得解答,主要的转化思路有:函数与方程的转化,数与形的转化,整体与局部的转化等.

【变式·拓展8】 已知 $M=\{(x,y)|y\geq x^2\}$, $N=\{(x,y)|x^2+(y-a)^2\leq 1\}$,则使 $M\cap N=N$ 成立的充要条件是_____.

考点9 充分、必要条件的综合应用

【典例剖析9】 已知 $a>0$,函数 $f(x)=ax-bx^2$.

(1)当 $b>0$ 时,若对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)\leq 1$,证明: $0<a\leq 2\sqrt{b}$.

(2)当 $b>1$ 时,证明:对任意 $x\in[0,1]$, $|f(x)|\leq 1$ 成立的充要条件是 $b-1\leq a\leq 2\sqrt{b}$.

考点10 对含逻辑联结词命题的真假的判定

【典例剖析10】 指出下列命题的真假:

(1)不等式 $|x+2|\leq 0$ 没有实数解;

(2)-1 是偶数或奇数;

(3) $\sqrt{3}$ 属于集合 $\mathbf{Q}$,也属于集合 $\mathbf{R}$;

(4) $A\cap B\subseteq A$.

【剖析】 分清命题的构成形式是判定含有逻辑联结词命题真假的关键.

【解答】 (1)此命题是“ $\neg p$ ”形式,其中 p :不等式 $|x+2|\leq 0$ 有实数解, $x=-2$ 是该不等式的一个解,所以 p 为真命题,故原命题为假命题.

(2)此命题是“ p 或 q ”形式,其中 p :-1 是偶数; q :-1 是奇数. p 为假命题, q 为真命题,故原命题是真命题.

(3)此命题是“ p 且 q ”形式,其中 p : $\sqrt{3}\in\mathbf{Q}$; q : $\sqrt{3}\in\mathbf{R}$.命题 p 为假命题,命题 q 为真命题,故原命题为假命题.

(4)此命题是“ $\neg p$ ”形式,其中 p : $A\cap B\subseteq A$,这是真命题,所以原命题为假命题.

【特别提醒】 判断含逻辑联结词命题真假的步骤:

①确定命题形式;②分别写出构成的命题(p, q 等);③根据 p 真,则“ $\neg p$ ”假;当且仅当 p 且 q 都为假时,“ p 或 q ”为假; p, q 都为真时,“ p 且 q ”为真等来判断.

【变式·拓展9】 写出由下列各组命题构成的“ p 或 q ”“ p 且 q ”以及“非 p ”形式的命题,并判断它们的真假.

(1) p :等边三角形是钝角三角形; q :等边三角形是锐角三角形;

(2) p : $\pi>3$; q : π 是无理数;

(3) p : $x^2+1>x-4$; q : $x^2+1<x-4$.

考点11 含全称量词、存在量词命题的辨析与真假的判定

【典例剖析11】 判断下列命题是全称命题还是存在