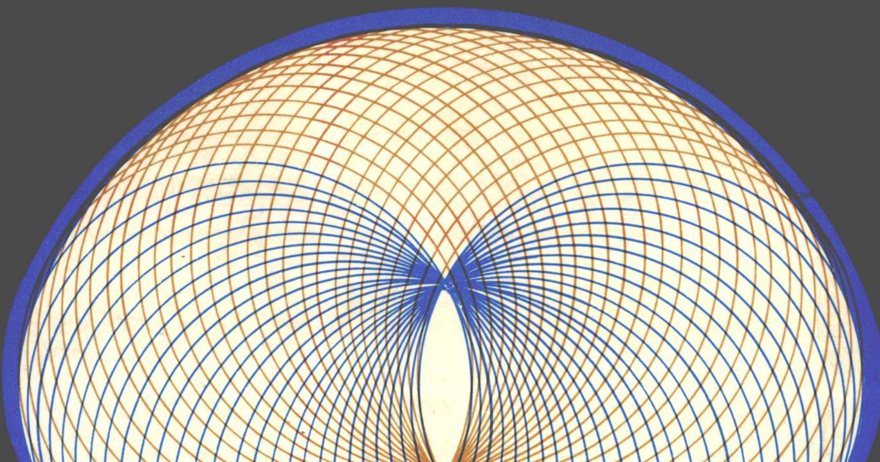
商用數學

薛昭雄著



三民書局印行

商 用 數 學

薛 昭 雄 著

三 民 書 局 印 行

行政院新聞局登記證局版臺業字第〇二〇〇號

中華民國六十四年九月初版
中華民國七十二年八月修訂四版

© 商用數學

基本定價肆元

著作者 薛昭雄
發行人 劉振強
出版者 三民書局股份有限公司
印刷所 三民書局股份有限公司
臺北市重慶南路一段六十一號
郵政劃撥九九九八號

序

在近代工商業裡，從事會計工作，銀行實務，保險工作，證券投資，無不利用到商用數學。因此大學商學院及商業專科學校，均列商用數學爲必修科目。

著者任教政大，今應三民書局之約，書成是册，内容採理論與實用並重，公式來源必儘重推論，並注重例子之解釋。足供大學商學院及專科學校教本之用。

書中名詞，第一出現時必附原文，以後則不再出現。例子及定理順序則以每節爲單位，爲了方便，有關對數知識列於第一章討論。又商用數學亦可用微積分爲基礎，但課程標準中微積分已另列一門，因此有關牽涉微積分者均將省略。

本書雖經三校，但疏漏之處仍然難免，尚盼海内外專家，不吝匡正，實所至盼。

薛昭雄　謹識

64年8月

商用數學(上)目錄

序

第一章　對數及對數表

第二章　單利及單貼現

第三章　複利及複貼現

第四章 價值方程式

第五章 確實年金——簡單定額年金

第六章 確實年金——一般定額年金

第七章 確實年金——變額年金

第八章　年賦償還

第九章　折　舊

第十章　債　券

第十一章 債券投資利率之計算

第十二章 生命年金

第十三章　人壽保險

第十四章　修正準備金

附　錄

第一章　對數及對數表

1-1　對數及其特徵性質

我們對於一正實數 a 與任意實數 x，符號 a^x 都有了明確的觀念。譬如 5^3 就是三個 5 連乘後所得的數，a^7 就是七個 a 連乘。在這二個例子裡，右上角的 3 與 7，我們都稱它爲指數。5^3 既然是三個 5 連乘後所得的數，因而它的數値卽是 125。我們以算式表示卽爲下式:

$$5^3=125 \tag{1.1.1}$$

(1.1.1) 式中共有三個數。若我們已知此三數中之任何二數，理論上說就可求出第三數來。今設欲求的第三數爲 y，我們卽有下列三種情形:

$$5^y=125 \tag{1.1.2}$$

$$y^3=125 \tag{1.1.3}$$

$$5^3=y \tag{1.1.4}$$

(1.1.3) 式與 (1.1.4) 式均可立卽求得。事實上 (1.1.3) 式卽是求其立方根，而 (1.1.4) 式卽是 5 之連乘積。但 (1.1.2) 式之解法可不如 (1.1.3) 式與 (1.1.4) 式那樣明顯（當然，這個例子並不困難）。因此我們必須引進求解未知指數的方法，我們介紹如下:

給定一個不等於 1 的正實數 a，對於正實數 y，若存在一個實數 x，滿足下列關係:

$$a^x=y \tag{1.1.5}$$

我們就說 x 是以 a 爲底 (*Base*) 時 y 的對數 (*Logarithm*)，記爲

$$x=\log_a y \tag{1.1.6}$$

這時的 y 稱爲 x（以 a 爲底）的眞數 (*Anti-Logarithm*).

有一些事象必須提出來再討論一下:

1. (1.1.5) 式或 (1.1.6) 式之 y 必須是一個正數，因此對數對於正實數才有意義。零與負數的對數是沒有意義的。

2. 在 (1.1.5) 式中，我們要求 $a\neq 1$，讀者一定感覺奇怪，我們將爲此點做個說明。我們看：若於 (1.1.5) 式中 a 取爲 1，那麼 (1.1.5) 式就寫成 $1^x=1$，亦卽 $y=1$。但 x 可爲任意的實數。因此以 1 爲底的對數就沒有意義了，卽於 (1.1.6) 式中，$\log_1 1$ 可以爲任意的實數。

3. 我們用記號 "⇔" 把 (1.1.5) 式與 (1.1.6) 式寫成下列的關係

$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y \tag{1.1.7}$$

(1.1.7) 式對於我們日後的計算相當重要。由於 (1.1.7) 式，我們顯然可得

(*a*) $a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$

(*b*) $10^2 = 100 \Leftrightarrow \log_{10} 100 = 2$

(*c*) $4^{\frac{1}{8}} = \sqrt[4]{2} \Leftrightarrow \log_4 \sqrt[4]{2} = \frac{1}{8}$

(*d*) $5^{-1} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \log_5 \frac{1}{5} = -1$

(*e*) $a^1 = a \Leftrightarrow \log_a a = 1$

爲了讓讀者有更進一步的瞭解，我們再擧例如下

例 1 求 $\log_{10} 0.0001$，$\log_{\sqrt{3}} 9$，$\log_5 \sqrt[3]{25}$

解

$y = \log_{10} 0.0001 \Leftrightarrow 10^y = 0.0001 = 10^{-4}$，所以 $y = -4$

$y=\log_{\sqrt{3}}9 \Leftrightarrow (\sqrt{3})^y=9$，$(\sqrt{3})^y=(\sqrt{3})^4$，所以 $y=4$

$y=\log_5 \sqrt[3]{25} \Leftrightarrow 5^y=\sqrt[3]{25}$，$5^y=5^{\frac{2}{3}}$，所以 $y=\dfrac{2}{3}$。

由式（1.1.5）式，利用我們所熟悉的指數律（法則）就可以推論出許多對數的特有性質。這些性質我們將視爲公式，在第二章裡我們將用來幫助計算利息的問題。

（i）$\log_a AB=\log_a A+\log_a B$

證明　設 $x=\log_a A$

$y=\log_a B$

由（1.1.7）式得

$$A=a^x$$
$$B=a^y$$

因而

$$AB=a^x a^y=a^{x+y}$$

又由（1.1.7）式得

$$\log_a AB=x+y，\text{卽}$$
$$\log_a AB=\log_a A+\log_a B。$$

有一點必須提出:

若 $A=B$，則 $\log_a AB=\log_a A^2=\log_a A+\log_a A=2\log_a A$

因此，由數學歸納法可得:

$\log_a A^n=n\log_a A$，式中 n 爲正整數。

同理 (i) 式，亦可推廣爲

$$\log_a A_1A_2\cdots\cdots A_n=\log_a A_1+\log_a A_2+\cdots\cdots+\log_a A_n$$

（ii）$\log_a \dfrac{A}{B}=\log_a A-\log_a B$

證明　設 $x=\log_a A$

$y=\log_a B$

則由 (1.1.7) 式得

$$A = a^x$$

$$B = a^y$$

因而

$$\frac{A}{B} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

又由 (1.1.7) 式得

$$\log_a \frac{A}{B} = x - y, \text{亦即}$$

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$$

若 $A = 1$ 時，則由 (1.1.7) 式下之 (a) 與 (ii) 知

$$\log_a \frac{1}{B} = -\log_a B$$

(iii) $\log_a A^t = t\log_a A$

證明 設 $x = \log_a A$，同理由 (1.1.7) 式得

$$A = a^x$$

$$A^t = (a^x)^t = a^{xt}$$

因而 $\log_a A^t = \log_a a^{xt} = xt$.（由 (1.1.7) 式）

即

$$\log_a A^t = t\log_a A$$

上式與 (i) 之特例截然不同。在 (i) 中 t 必須爲正整數，而此處之 t 則可爲任意整數，分數，正數或負數，總而言之爲任意實數即可。

若我們取 $t = \dfrac{1}{n}$ 則 (iii) 可寫爲

$$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M.$$

(iv) 設 $a, b>0$, 且 $a \neq 1 \neq b$, 則 $\log_b a \cdot \log_a M = \log_b M$

證明 令 $\log_a M = r$, 則 $a^r = M$

上式兩端均爲正值，因此

$$\log_b M = \log_b a^r$$

由 (iii) 得

$$\log_b M = r \log_b a$$

故 $$\log_b M = \log_b a \cdot \log_a M.$$

(iv) 式習慣上稱爲換底公式。

在 $M = b$ 時，(iv) 式可以寫爲

(v) $$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

利用上列的各性質，我們可以做一切有關對數問題的計算。

例 2 求 $\log_2 \sqrt[5]{8}$。

解 $\log_2 \sqrt[5]{8} = \log_2 \sqrt[5]{2^3} = \log_2 2^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5} \log_2 2 = \frac{3}{5}$。

例 3 求 $\log_2 4 - \log_2 \sqrt{3} + \log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$ 之值。

解 $\log_2 4 - \log_2 \sqrt{3} + \log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \log_2 2^2 - \log_2 \sqrt{3} + \log_2 \sqrt{3} - \log_2 2$

$= 2 \log_2 2 - \log_2 2 = 1$。

例 4 若已知 $\log_{10} 2 = 0.3010$, 求 $\log_{10} 5$, $\log_2 5$。

解

$$\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - 0.3010 = 0.6990。$$

$$\log_2 5 = \log_2 \frac{10}{2} = \log_2 10 - \log_2 2 = \frac{1}{\log_{10} 2} - 1$$

$$= \frac{1}{0.3010} - 1 = \frac{699}{301}。$$

例 5 設已知 $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$，求

（i） $\log_{10}\frac{1}{24}$ （ii） $\log_4 3$

解 （i） $\log_{10}\frac{1}{24} = -\log_{10} 24 = -\log_{10} 2^3\cdot 3$

$$= -\log_{10} 2^3 - \log_{10} 3$$

$$= -3\log_{10} 2 - \log_{10} 3 = -1.3801。$$

（ii） $\log_4 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 4} = \frac{\log_{10} 3}{2\log_{10} 2} = \frac{0.4771}{2\cdot 0.3010} = \frac{4771}{6020}$。

例 6 試解 $\log_{10} x + \log_{10}(x-15) = 2$。

解 由 $\log_{10} x + \log_{10}(x-15) = 2$

得

$$\log_{10} x(x-15) = \log_{10} 100$$

故 $x(x-15) = 100$

即 $x^2 - 15x - 100 = 0$

因而得 $x = 20$，-5（-5不取）

例 7 試解 $2^{x^2} = 4\cdot 2^x$

解 由 $2^{x^2} = 4\cdot 2^x$

得

$$2^{x^2}\cdot 2^{-x} = 4\cdot 2^x\cdot 2^{-x} = 4$$

$$2^{x^2-x} = 4$$

由（1.1.7）式得

$$x^2 - x = \log_2 4 = 2$$

因而

$$x^2 - x - 2 = 0$$

因此

$$x = 2 \text{ 或 } -1$$

習 題

1. 下面那些式子是錯的？

(i) $\log_2(-5) = -\log_2 5$

(ii) $\log_2(3\cdot5) = \log_2 3\cdot\log_2 5$

(iii) $\log_2 8 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0$

(iv) $\log_2(5^3) = (\log_2 5)^3$

(v) $\log_2(5+3) = \log_2 5 + \log_2 3$

(vi) $\log_2 10 = (\log_{\frac{1}{2}} 10)^{-1}$

2. 令 $\log_2 x = X$, $\log_2 y = Y$ 將下列各式以 X, Y 表示:

(i) $\log_2 xy^2$　　(ii) $\log_2 \sqrt{xy}$

(iii) $\log_2 \sqrt{x^3y}$　　(iv) $\log_2 \sqrt[3]{x^5y^2}$

3. 設 a, b, c 都是不爲 1 之正數，證明

(a) $\log_a b \log_b a = 1$　　(b) $\log_a b \log_b c \log_c a = 1$

4. 在下列各空白裡填入適當的數。

(1) $\log_{25}(\quad) = -1.5$　　(2) $\log_8 0.25 = (\quad)$　　(3) $\log_{(\quad)} 81 = -\frac{4}{3}$

5. 已知 $\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.3010$, $\log_{10} 3 \fallingdotseq 0.4771$，求近似值:

(1) $\log_{10} 720$　　(2) $\log_{10} 75$　　(3) $\log_{10}\frac{64}{81}$

(4) $\log_3 8$　　(5) $\log_{10} \sqrt[3]{6}$　　(6) $\log_{10} \sqrt[4]{18}$

6. 證明下列各式:

(1) $\frac{1}{4}\log_{10} 8 + \frac{1}{4}\log_{10} 2 = \log_{10} 2$

(2) $4\log_{10} 3 - 2\log_{10} 3 = \log_{10} 9$

(3) $10^{2\log_{10} a} = a^2$

(4) $a^{3\log_a 3} + b^{3\log_b 2} = 17 (a, b > 1)$

(5) $\log_{10}[\log_3(\log_5 125)] = 0$

(6) $\log_3 \sqrt[3]{81 + \sqrt[4]{729\frac{1}{\sqrt[3]{81}}}} = \frac{31}{18}$

(7) $\log_a\left(\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}\right) = 2\log_a(x+$

7. 解下列各方程式:

(1) $\log_{10} x + \log_{10} 2 = 3$

(2) $\log_2(x+3) - \log_2(x-1) = 1$

(3) $3^{2x}\cdot 5^{3x-4} = 7^{x-1}\cdot 11^{2-x}$

(4) $\log_{10}(10^x + 100) = \frac{x}{2} + 1 + \log_{10} 2$

(5) $\log_2(\sqrt{x^2-1} + x) = a, (a > 0)$

8. 試用數學歸納法證明:

(1) $\log\frac{2}{1} + \log\frac{3}{2} + \log\frac{4}{3} + \log\frac{5}{4} + \cdots\cdots + \log\frac{n}{n-1} = \log n, \quad \forall n \in N$

(2) $10^n \geq 10n$

(3) $\log n \leq n - 1$

1-2 對數表

由上一節，我們已知道對數之底的意義。但若底的值不同，則一數的對數亦不盡相同。例如，若以2爲底，則8之對數爲3；以 8 爲底，則 8 之對數爲1；故我們必先決定對數的底後，方能求其對數之值。由前節知只要不爲 1 之正實數均可做爲底。然而我們記數的方式是用十進法，所以對於對數的計算，若也用10來作底數，計算起來一定方便得多，這就是我們把10作爲底的主要原因。因而以10爲底的對數稱爲常用對數 (*Common Logarithm*)。高等理論數學裡又有另一種底，即是以 e 來作底。以 e 爲底的對數稱爲自然對數 (*Natural Log-*