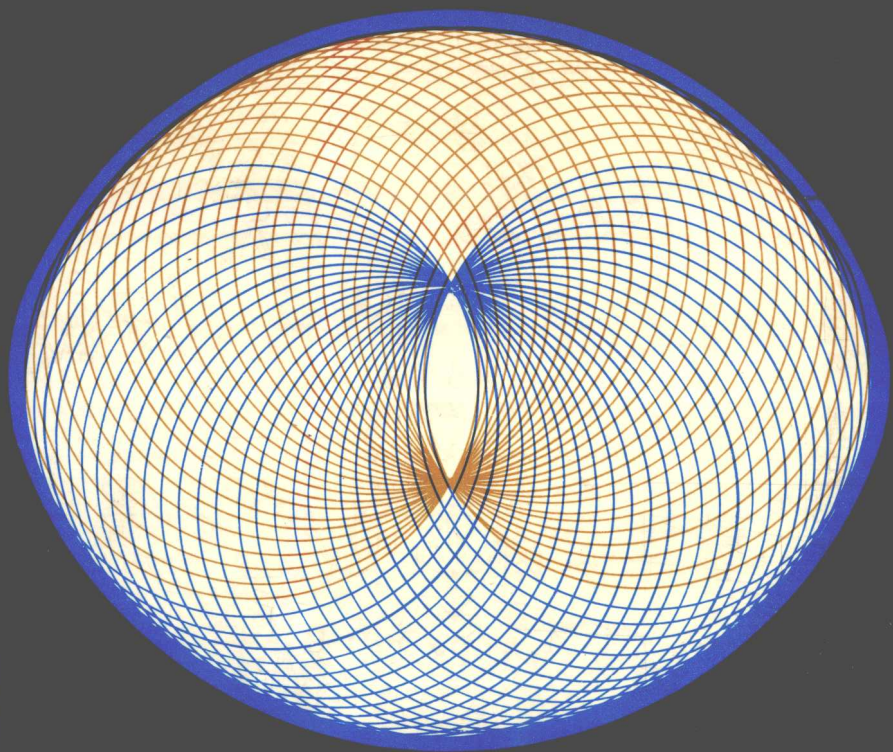


商用數學

薛昭雄著



三民書局印行

商 用 數 學

薛 昭 雄 著

三 民 書 局 印 行

F716
x973

行政院新聞局登記證 版業字第二〇〇號

版權所有
翻印必究

© 商 用 數 學

基本定價肆元

中華民國六十四年九月
中華民國七十二年八月
初版
修訂四版

著 者 薛 昭 雄
發行人 劉 振 強
出版者 三民書局股份有限公司
印刷所 三民書局股份有限公司

臺北市重慶南路一段六十一號
郵政劃撥九九九八號

序

在近代工商業裡，從事會計工作，銀行實務，保險工作，證券投資，無不利用到商用數學。因此大學商學院及商業專科學校，均列商用數學為必修科目。

著者任教政大，今應三民書局之約，書成是冊，內容採理論與實用並重，公式來源必儘重推論，並注重例子之解釋。足供大學商學院及專科學校教本之用。

書中名詞，第一出現時必附原文，以後則不再出現。例子及定理順序則以每節為單位，為了方便，有關對數知識列於第一章討論。又商用數學亦可用微積分為基礎，但課程標準中微積分已另列一門，因此有關牽涉微積分者均將省略。

本書雖經三校，但疏漏之處仍然難免，尚盼海內外專家，不吝匡正，實所至盼。

薛 昭 雄 謹 識

64年8月

商用數學(上) 目錄

序

第一章 對數及對數表

1~1 對數及其特徵性質·····	1
1~2 對數表·····	8
1~3 對數表的應用·····	14

第二章 單利及單貼現

2~1 利 息·····	17
2~2 單利法的基本公式·····	18
2~3 普通利息與準確利息·····	20
2~4 普通利息及準確利息之計算·····	23
2~5 利息之其他計算方法·····	26
2~6 單貼現·····	31
2~7 等值率·····	36

第三章 複利及複貼現

3~1 複利法及其基本公式·····	39
3~2 複利法之計算·····	41
3~3 實利率，虛利率與連續利率·····	48
3~4 複利法的基本問題·····	53

2 商 用 數 學

3~5 複利現值	53
3~6 利率與時期	55
3~7 複則現	58
3~8 實則現率與虛貼現率	63

第四章 價值方程式

4~1 單貼現法	69
4~2 複貼現法	80

第五章 確實年金——簡單定額年金

5~1 年金之意義及其類別	85
5~2 簡單年金——普通年金之年金終值	86
5~3 簡單年金——普通年金之現值	93
5~4 簡單年金——普通年金之基本問題	97
5~5 簡單年金——永續年金，期初年金與延期年金	108

第六章 確實年金——一般定額年金

6~1 每一支付期間計息一次以上之年金基本公式	115
6~2 每一計息期間支付一次以上之年金基本公式	118
6~3 普通年金——一般情形	121
6~4 期初年金，延期年金，與連續年金	123
6~5 一般定額年金之基本問題	127

第七章 確實年金——變額年金

7~1 等差變額年金	132
7~2 等比變額年金	135

第八章 年賦償還

8~1 年賦償還之意義	141
8~2 本金均等分償	142
8~3 全均等分償	146
8~4 變額年金分償	149
8~5 償本基金	152

第九章 折 舊

9~1 折舊之意義	157
9~2 折舊之計算方法 (折舊基金不計息)	157
9~3 折舊之計算方法 (折舊基金帶息)	162
9~4 混合年限	167
9~5 折舊之其他計算方法	170
9~6 資本化成本	176
9~7 各種折舊計算方法之比較	179

第十章 債 券

10~1 債券術語	181
10~2 債券價格	182
10~3 一次償本債券付息日購價之推算	183
10~4 債券表	188
10~5 債券溢價之攤提與折損之累積	189
10~6 二付息日之間之債券購價及帳面價值	192

10~7 分期償還債券之購價	193
10~8 年金債券	194
10~9 分期還本債券—逐期支付利息之購價	198
10~10 年金債券與溢酬	200

第十一章 債券投資利率之計算

11~1 前 言	205
11~2 一次償還債券之投資利率	205
11~3 分期償還債券	209
11~4 年金債券	214
11~5 變額年金償本付息債券	215

第十二章 生命年金

12~1 機 率	223
12~2 生 命 表	224
12~3 生命表中術語、符號及公式	226
12~4 生命年金	232
12~5 生贈金之現值	233
12~6 終身生命年金	235
12~7 有限生命年金	239
12~8 福本年金	241
12~9 每年支付數次之生命年金	242

第十三章 人壽保險

13~1 人壽保險	247
13~2 終身保險	248
13~3 定期保險	251
13~4 生贈保險	254
13~5 準備金	256
13~6 年初及年中準備金	265

第十四章 修正準備金

14~1 前 言	269
14~2 初年定期式責任準備金	270
14~3 保險監督者估價制準備金	272
14~4 其他修正準備金方法	276

附 錄

一、美國 C. S. O. 生命表	279
二、美國 C. S. O. 表換算欄	283
三、美國 S. A. 生命表	285

第一章 對數及對數表

1-1 對數及其特徵性質

我們對於一正實數 a 與任意實數 x ，符號 a^x 都有了明確的觀念。譬如 5^3 就是三個 5 連乘後所得的數， a^7 就是七個 a 連乘。在這二個例子裡，右上角的 3 與 7，我們都稱它為指數。 5^3 既然是三個 5 連乘後所得的數，因而它的數值即是 125。我們以算式表示即為下式：

$$5^3 = 125 \quad (1.1.1)$$

(1.1.1) 式中共有三個數。若我們已知此三數中之任何二數，理論上說就可求出第三數來。今設欲求的第三數為 y ，我們即有下列三種情形：

$$5^y = 125 \quad (1.1.2)$$

$$y^3 = 125 \quad (1.1.3)$$

$$5^3 = y \quad (1.1.4)$$

(1.1.3) 式與 (1.1.4) 式均可立即求得。事實上 (1.1.3) 式即是求其立方根，而 (1.1.4) 式即是 5 之連乘積。但 (1.1.2) 式之解法可不如 (1.1.3) 式與 (1.1.4) 式那樣明顯（當然，這個例子並不困難）。因此我們必須引進求解未知指數的方法，我們介紹如下：

給定一個不等於 1 的正實數 a ，對於正實數 y ，若存在一個實數 x ，滿足下列關係：

$$a^x = y \quad (1.1.5)$$

我們就說 x 是以 a 為底 (Base) 時 y 的對數 (Logarithm), 記為

$$x = \log_a y \quad (1.1.6)$$

這時的 y 稱為 x (以 a 為底) 的真數 (Anti-Logarithm).

有一些事象必須提出來再討論一下:

1. (1.1.5) 式或 (1.1.6) 式之 y 必須是一個正數, 因此對數對於正實數才有意義。零與負數的對數是沒有意義的。

2. 在 (1.1.5) 式中, 我們要求 $a \neq 1$, 讀者一定感覺奇怪, 我們將為此點做個說明。我們看: 若於 (1.1.5) 式中 a 取為 1, 那麼 (1.1.5) 式就寫成 $1^x = 1$, 亦即 $y = 1$ 。但 x 可為任意的實數。因此以 1 為底的對數就沒有意義了, 即於 (1.1.6) 式中, $\log_1 1$ 可以為任意的實數。

3. 我們用記號 " $\Leftrightarrow$ " 把 (1.1.5) 式與 (1.1.6) 式寫成下列的關係

$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y \quad (1.1.7)$$

(1.1.7) 式對於我們日後的計算相當重要。由於 (1.1.7) 式, 我們顯然可得

$$(a) \quad a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a 1 = 0$$

$$(b) \quad 10^2 = 100 \Leftrightarrow \log_{10} 100 = 2$$

$$(c) \quad 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4} \Leftrightarrow \log_4 \sqrt[3]{4} = \frac{1}{3}$$

$$(d) \quad 5^{-1} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \log_5 \frac{1}{5} = -1$$

$$(e) \quad a^1 = a \Leftrightarrow \log_a a = 1$$

為了讓讀者有更進一步的瞭解, 我們再舉例如下

例 1 求 $\log_{10} 0.0001$, $\log_{\sqrt{5}} 9$, $\log_5 \sqrt[3]{25}$

解

$$y = \log_{10} 0.0001 \Leftrightarrow 10^y = 0.0001 = 10^{-4}, \text{ 所以 } y = -4$$

$$y = \log_{\sqrt{3}} 9 \Leftrightarrow (\sqrt{3})^y = 9, (\sqrt{3})^y = (\sqrt{3})^4, \text{ 所以 } y = 4$$

$$y = \log_5 \sqrt[3]{25} \Leftrightarrow 5^y = \sqrt[3]{25}, 5^y = 5^{\frac{2}{3}}, \text{ 所以 } y = \frac{2}{3}.$$

由式 (1.1.5) 式，利用我們所熟悉的指數律（法則）就可以推論出許多對數的特有性質。這些性質我們將視為公式，在第二章裡我們將用來幫助計算利息的問題。

$$(i) \quad \log_a AB = \log_a A + \log_a B$$

證明 設 $x = \log_a A$

$$y = \log_a B$$

由 (1.1.7) 式得

$$A = a^x$$

$$B = a^y$$

因而

$$AB = a^x a^y = a^{x+y}$$

又由 (1.1.7) 式得

$$\log_a AB = x + y, \text{ 即}$$

$$\log_a AB = \log_a A + \log_a B.$$

有一點必須提出：

若 $A = B$ ，則 $\log_a AB = \log_a A^2 = \log_a A + \log_a A = 2\log_a A$

因此，由數學歸納法可得：

$\log_a A^n = n\log_a A$ ，式中 n 為正整數。

同理 (i) 式，亦可推廣為

$$\log_a A_1 A_2 \cdots A_n = \log_a A_1 + \log_a A_2 + \cdots + \log_a A_n$$

$$(ii) \quad \log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$$

證明 設 $x = \log_a A$

$$y = \log_a B$$

則由 (1.1.7) 式得

$$A = a^x$$

$$B = a^y$$

因而

$$\frac{A}{B} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

又由 (1.1.7) 式得

$$\log_a \frac{A}{B} = x - y, \text{ 亦即}$$

$$\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$$

若 $A = 1$ 時，則由 (1.1.7) 式下之 (a) 與 (ii) 知

$$\log_a \frac{1}{B} = -\log_a B$$

$$(iii) \log_a A^t = t \log_a A$$

證明 設 $x = \log_a A$ ，同理由 (1.1.7) 式得

$$A = a^x$$

$$A^t = (a^x)^t = a^{xt}$$

因而 $\log_a A^t = \log_a a^{xt} = xt$. (由 (1.1.7) 式)

即

$$\log_a A^t = t \log_a A$$

上式與 (i) 之特例截然不同。在 (i) 中 t 必須為正整數，而此處之 t 則可為任意整數，分數，正數或負數，總而言之為任意實數即可。

若我們取 $t = \frac{1}{n}$ 則 (iii) 可寫為

$$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M.$$

(iv) 設 $a, b > 0$, 且 $a \neq 1 \neq b$, 則 $\log_b a \cdot \log_a M = \log_b M$

證明 令 $\log_a M = r$, 則 $a^r = M$

上式兩端均為正值, 因此

$$\log_b M = \log_b a^r$$

由 (iii) 得

$$\log_b M = r \log_b a$$

故 $\log_b M = \log_b a \cdot \log_a M$.

(iv) 式習慣上稱為換底公式。

在 $M = b$ 時, (iv) 式可以寫為

$$(v) \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

利用上列的各性質, 我們可以做一切有關對數問題的計算。

例 2 求 $\log_2 \sqrt[5]{8}$ 。

$$\text{解 } \log_2 \sqrt[5]{8} = \log_2 \sqrt[5]{2^3} = \log_2 2^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5} \log_2 2 = \frac{3}{5}。$$

例 3 求 $\log_2 4 - \log_2 \sqrt{3} + \log_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$ 之值。

$$\begin{aligned} \text{解 } \log_2 4 - \log_2 \sqrt{3} + \log_2 \frac{\sqrt{3}}{2} \\ = \log_2 2^2 - \log_2 \sqrt{3} + \log_2 \sqrt{3} - \log_2 2 \\ = 2 \log_2 2 - \log_2 2 = 1。 \end{aligned}$$

例 4 若已知 $\log_{10} 2 = 0.3010$, 求 $\log_{10} 5$, $\log_2 5$ 。

解

$$\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - 0.3010 = 0.6990。$$

$$\log_2 5 = \log_2 \frac{10}{2} = \log_2 10 - \log_2 2 = \frac{1}{\log_{10} 2} - 1$$

$$= \frac{1}{0.3010} - 1 = \frac{699}{301}.$$

例5 設已知 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$, 求

$$(i) \log_{10} \frac{1}{24} \quad (ii) \log_4 3$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (i) \log_{10} \frac{1}{24} &= -\log_{10} 24 = -\log_{10} 2^3 \cdot 3 \\ &= -\log_{10} 2^3 - \log_{10} 3 \\ &= -3 \log_{10} 2 - \log_{10} 3 = -1.3801. \end{aligned}$$

$$(ii) \log_4 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 4} = \frac{\log_{10} 3}{2 \log_{10} 2} = \frac{0.4771}{2 \cdot 0.3010} = \frac{4771}{6020}.$$

例6 試解 $\log_{10} x + \log_{10}(x-15) = 2$.

解 由 $\log_{10} x + \log_{10}(x-15) = 2$
得

$$\log_{10} x(x-15) = \log_{10} 100$$

$$\text{故 } x(x-15) = 100$$

$$\text{即 } x^2 - 15x - 100 = 0$$

$$\text{因而得 } x = 20, -5 (-5 \text{ 不取})$$

例7 試解 $2^{x^2} = 4 \cdot 2^x$

解 由 $2^{x^2} = 4 \cdot 2^x$

得

$$2^{x^2} \cdot 2^{-x} = 4 \cdot 2^x \cdot 2^{-x} = 4$$

$$2^{x^2-x} = 4$$

由 (1.1.7) 式得

$$x^2 - x = \log_2 4 = 2$$

因而

$$x^2 - x - 2 = 0$$

因此

$$x = 2 \text{ 或 } -1$$

習題

1. 下面那些式子是錯的？

(i) $\log_2(-5) = -\log_2 5$

(ii) $\log_2(3 \cdot 5) = \log_2 3 \cdot \log_2 5$

(iii) $\log_2 8 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0$

(iv) $\log_2(5^3) = (\log_2 5)^3$

(v) $\log_2(5 + 3) = \log_2 5 + \log_2 3$

(vi) $\log_2 10 = (\log_{\frac{1}{2}} 10)^{-1}$

2. 令 $\log_2 x = X$, $\log_2 y = Y$ 將下列各式以 X, Y 表示:

(i) $\log_2 xy^2$

(ii) $\log_2 \sqrt{xy}$

(iii) $\log_2 \sqrt{x^3 y}$

(iv) $\log_2 \sqrt[3]{x^5 y^3}$

3. 設 a, b, c 都是不為 1 之正數, 證明

(a) $\log_a b \log_b a = 1$

(b) $\log_a b \log_b c \log_c a = 1$

4. 在下列各空白裡填入適當的數。

(1) $\log_{25}(\quad) = -1.5$ (2) $\log_8 0.25 = (\quad)$ (3) $\log_c 81 = -\frac{4}{3}$

5. 已知 $\log_{10} 2 \doteq 0.3010$, $\log_{10} 3 \doteq 0.4771$, 求近似值:

(1) $\log_{10} 720$

(2) $\log_{10} 75$

(3) $\log_{10} \frac{64}{81}$

(4) $\log_3 8$

(5) $\log_{10} \sqrt[3]{6}$

(6) $\log_{10} \sqrt[4]{18}$

6. 證明下列各式:

(1) $\frac{1}{4} \log_{10} 8 + \frac{1}{4} \log_{10} 2 = \log_{10} 2$

(2) $4 \log_{10} 3 - 2 \log_{10} 3 = \log_{10} 9$

(3) $10^{2 \log_{10} a} = a^2$

(4) $a^{3 \log_b 3} + b^{3 \log_a 3} = 17(a, b > 1)$

$$(5) \log_{10}[\log_3(\log_5 125)] = 0$$

$$(6) \log_3 \sqrt[3]{81 + \sqrt[4]{729 \frac{1}{\sqrt[3]{81}}}} = \frac{31}{18}$$

$$(7) \log_a \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \right) = 2 \log_a (x +$$

7. 解下列各方程式:

$$(1) \log_{10} x + \log_{10} 2 = 3$$

$$(2) \log_2(x + 3) - \log_2(x - 1) = 1$$

$$(3) 3^{2x} \cdot 5^{3x-4} = 7^{x-1} \cdot 11^{2-x}$$

$$(4) \log_{10}(10^x + 100) = \frac{x}{2} + 1 + \log_{10} 2$$

$$(5) \log_2(\sqrt{x^2 - 1} + x) = a, (a > 0)$$

8. 試用數學歸納法證明:

$$(1) \log \frac{2}{1} + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \log \frac{5}{4} + \dots + \log \frac{n}{n-1} = \log n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(2) 10^n \geq 10n$$

$$(3) \log n \leq n - 1$$

1-2 對數表

由上一節，我們已知道對數之底的意義。但若底的值不同，則一數的對數亦不盡相同。例如，若以2為底，則8之對數為3；以8為底，則8之對數為1；故我們必先決定對數的底後，方能求其對數之值。由前節知只要不為1之正實數均可做為底。然而我們記數的方式是用十進法，所以對於對數的計算，若也用10來作底數，計算起來一定方便得多，這就是我們把10作為底的主要原因。因而以10為底的對數稱為常用對數 (Common Logarithm)。高等理論數學裡又有另一種底，即是以 e 來作底。以 e 為底的對數稱為自然對數 (Natural Log-