

中小学教师新知识应用与学科教学系列丛书

丛书总主编 / 陈明选 黄一敏

丛书执行总主编 / 吴沁 王聚元

数学学科

新知识应用与 中小学学科教学

本册主编 / 王 蕾
殷 娟

本册副主编 / 何华兴

SHU XUE XUE KE
XIN ZHI SHI YING YONG YU
ZHONG XIAO XUE XUE KE JIAO XUE



中国出版集团



世界图书出版公司

中小学教师新知识应用与学科教学系列丛书

丛书总主编/陈明选 黄一敏

丛书执行总主编/吴沁 王聚元

数学学科

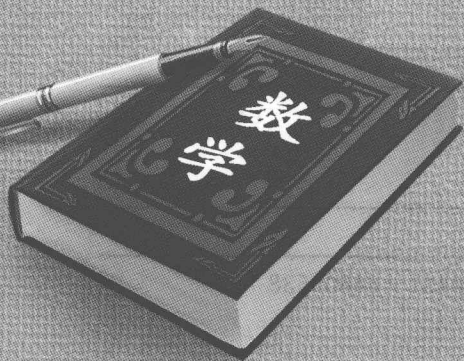
新知识应用与 中小学学科教学

本册主编/王 蕾

殷 娴

本册副主编/何华兴

SHU XUE XUE KE
XIN ZHI SHI YING YONG YU
ZHONG XIAO XUE XUE KE JIAO XUE



图书在版编目(CIP)数据

数学学科新知识应用与中小学学科教学/陈明选,黄一敏,王蕾,殷娴等编著.
—北京:世界图书出版公司北京公司,2009.6
(中小学教师新知识应用与学科教学系列丛书)
ISBN 978-7-5100-0031-7

I. 数… II. ①陈…②黄…③王…④殷… III. 数学—中小学—师资培训—教学参考资料 IV. O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 077522 号

数学学科新知识应用与中小学学科教学(第 1 版)

编著者:陈明选 黄一敏 王蕾 殷娴等
丛书策划:李殿国
责任编辑:刘迁红
责任校对:王洪梅
营销编辑:刘春甫
版式设计:王依

出版:世界图书出版公司北京公司
发行:世界图书出版公司北京公司·东北书局
(吉林省长春市春城大街 789 号 邮编:130062 电话:0431-86710755)
销售:各地新华书店
印刷:长春方圆印业有限公司
(吉林省长春市绿园区西环城路 4407 号 邮编:130061 电话:0431-87974435)

幅面尺寸:185mm×260mm
印张:12
字数:282(千字)
版次:2009 年 6 月第 1 版
印次:2009 年 6 月第 1 次印刷

营销咨询:13904337075 0431-86710755
编辑咨询:0431-86805561
读者咨询:DBSJ@163.com

ISBN 978-7-5100-0031-7/G·341 定价:22.00 元

版权所有 盗版必究 举报有奖 举报电话:0431-86805538

【总序】

国家教育部最近提出，新一轮教师培训要以“师德、新课程、新知识、新技术、新技能”（简称“一德四新”）为核心内容。我十分赞同这一主张，这一举措必将进一步促进教师的专业发展，推动新课程改革向纵深方向发展。对“一德四新”，我的理解是：“师德”是灵魂，其主要内容是敬业爱德，如果没有对教育事业的忠诚、对孩子的热爱，就当不好一名教师；“新课程”是核心，是这次教育改革的主要内容，只有对新课程标准有全面、深入的理解，才能保证新课改的健康发展；“新知识”是基础，优质的教育教学效果，在很大程度上依赖于教师完善的知识结构和深厚的文化素养；“新技术（信息技术）”是手段，是“教育信息化建设工程”的技术支持；“新技能”是关键，因为新课改的全部设想和措施，最后都要落实到教师的教学行为上。这五者互为支撑，缺一不可，否则就不能成为一名合格的教师。

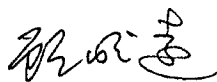
必须承认，我们原有的课程环境、课程理念、评价标准以及教育者自身的条件与新课程的要求和实施存在着不适应甚至是矛盾与冲突，新课程对教师已有的知识结构以及综合文化基础与素养提出了十分严峻的挑战。“走向综合”是新课程改革最基本的理念，不但本学科知识要进行综合，而且学科之间以及与最新知识发展领域、学生的社会生活经验等也要进行交叉与融合。这就要求教师既能在本学科中深入透视其“机理”，把握知识发展的脉络和前沿，又能跳出学科，在更宏观的文化视野中返视学科，了解学科与其他领域乃至与社会文化、人类文明的内在联系。然而，当前教师知识素养的实际状况与新课程基本理念对教师的高要求却有着较大的距离，矛盾非常突出。由于种种原因，目前我们许多教师的知识结构单一，视野狭窄。这种状况已经严重地阻碍了教师对新课程理念的理解与认同，制约着新课程课堂教学模式的转变；同时也影响了教师自身专业的发展。

前面讲到“一德四新”，知识是基础。教师首先要有比较渊博的知识。因为教师的任务就是“传道、授业、解惑”；还因为教师的品德和教育的技能技巧也须要建立在渊博的

知识和文化底蕴上。一个连对所教学科的基础知识和前沿知识都缺乏扎实和系统把握的人，不能算是合格的教师，更谈不上优秀。同时，教师要不断完善自己的知识结构，不断超越自我，走向成熟。诚如苏霍姆林斯基所言：“只有当教师的知识视野比学校教学大纲宽得无可比拟的时候，教师才能成为教学过程中的真正的能手、艺术家和诗人。”

什么是教师的“新知识”？如何理解教师的知识结构？一般认为，教师作为专业人员，其合理完善的知识结构应包括：精深的专业知识和相关学科知识、宽厚的教育学科知识和促进教师自身素养的文化知识。精深的专业知识和相关学科知识是指对所教学科的知识体系有着十分全面的认识，能够把握住专业知识内在体系的运行规律，了解这门学科的历史、现状及其发展趋势，了解本学科与相关学科的联系，懂得本学科的学习和研究方法，并能在教育教学活动中灵活地运用。精深的专业学科知识是中小学教师的基本条件。教师只有以学科知识丰富、专业知识精深的姿态走进教室，登上讲台，以深入浅出、简单易行的教学方法去教授学生，才能够赢得学生的信赖和尊敬，才能成为一名有威信的教师。宽厚的教育学科知识主要指教育学、心理学、学科教学法以及青少年健康成长的知识，只有懂得教育的本真，掌握教育规律，树立正确的教育观念，才能在教育教学中收到事半功倍的效果。促进教师自身素养的知识是指综合的文化知识，包括人文社会科学、自然科学的知识和艺术学科知识。对每一个教师来说，哲学、宗教、语言文学、艺术、科学、技术等，都应在他的视野之内。教师多懂得一点现代的相关学科知识，就会多一份教学主动，就会在教学中增加一份底气，就会更易贴近新课程的步伐。教师要不断提升自己的人文素养、科学素养和审美素养，使自己拥有博大宽广的文化视野、积极乐观的进取精神、和谐宁静的人生态度、高雅不俗和朴实无华的生活方式，并以这种自身的人格魅力去影响学生。

由江南大学陈明选教授、无锡滨湖区教育研究发展中心黄一敏主任主持编写的《中小学教师新知识应用与学科教学系列丛书》就是想帮助教师建设合理的知识结构。这套丛书的“语文”“数学”“英语”“信息科学”四分册不仅为中小学相关学科的教师提供了本专业必备的基础知识、前沿知识和跨学科的综合知识，也为其他学科教师完善自己的知识结构提供了知识基础。“人文社会科学”分册的所有内容构成了中小学教师人文素养的内涵；“自然科学”分册的所有内容构成了中小学教师科学素养的内涵；“艺术学科”分册的所有内容构成了中小学教师审美素养的内涵。“人文社会科学”“自然科学”“艺术”三分册旨在为中小学教师提供跨学科的文化视野，以丰富他们的文化底蕴，提升他们的综合文化素养。各分册的知识综合起来就构成了中小学教师必备的，包括基础知识、前沿知识、跨学科知识及综合文化知识在内的完整的知识结构。我认为，这套书不仅可以作为“一德四新”的培训教材，也应成为每位中小学教师案头必备的参考读物。



2009年4月于北京

【序言】

课程变革是一种常态，不可能一次性完成，更不可能靠某种运动达到既定的目标。这就要求我们改变长期以来的简单思维模式，正视教育的丰富性与复杂性。每一位教师总是从特定的学科，以自己的方式思考并从事教育实践的，我们不仅要在本学科内作深入的开掘、整合，构建新型的学科架构，而且要能跳出所教学科疆界，在更为开阔的视域内审视学科教学，探寻本学科与其他领域或学科的互动与联系，在日常教学活动中进行创造性的劳动，做课程变革的实践者与思想者。历史和实践都表明，广大教师的投入与参与是决定课程变革成败的关键。

新的时代呼唤人民满意的教育，人民满意的教育对教师的发展提出了新的、更高的要求。教师的不断成长无疑是课程变革深入推进的保障，基于此，我们说整个社会都应该关注教师的成长并为之提供切实的支持。

要应对课程变革所带来的挑战，将其视为促进自身发展的良好机遇，从教师的角度而言，我们须要做好以下几方面的工作。

首先，作为教师，我们总是通过特定学科而与教育发生实质联系，学科教学是我们介入教育实践的途径。我们不仅须要具有专业、系统且不断更新的学科知识，更须要了解、把握学科教学的理论与方法，这即是我们常说的教师的专业素养。如何处理好这两方面的关系呢？简单而言，我们不是学科研究者，也不是纯粹的教育理论家，一线教师应该成为学科教学专家。作为学科教学专家，须要了解所教学科，懂得相关的教育教学原理与方法，在具有学科特色和富有个性魅力的整合中进行教学创新。就目前的情形来看，这方面主要表现出以下几点不足：一是对所教学科缺乏系统的了解，尤其是对所教学科的最新发展及已有研究成果缺乏了解，知识老化。这主要表现在教学中长期固守一套陈旧的知识体系，对学科特性以及相关研究的新信息不敏感，教学僵化、老套；与此同时，学科教学不能与当下的现实生活沟通，仅仅局限于多年来无形中形成的狭小天地，教学退化成为一种纯

粹的形式化的机械“训练”，而与学生的成长无关甚至相悖。二是对如何进行学科教学缺乏理论开掘与探讨，很多时候教学基于日常经验，处在一种低水平的繁重而重复的劳作状态。应该说这是产生“职业倦怠”的重要原因。教学只有通过教师的创造性劳动，使其达到常教常新的境界，真正地“乐教”“乐学”才能成为可以企及的现实。这就要求我们将“思”与“行”有机地整合起来，在教学中思考教学，在研究中改进教学。教师即研究者，进一步说，教师的研究从日常教学开始，从研究学科教学开始。因为，没有行动的反思只是空谈，没有反思的行动只是盲动。

其次，打破褊狭的学科疆界，在开阔的视域内重构学科架构。长期以来，因为森严的学科壁垒，导致我们的视野褊狭，教学在一个封闭的、缺少生机与活力的系统内折腾，“高耗低效”。“走向综合”是新课程改革最基本的理念，不但本学科知识要进行综合，而且学科之间以及与最新知识发展领域、学生的社会生活经验等也要进行交叉与融合。教育教学本是一种复杂的存在，我们须要从不同路径、不同角度走进它，探究它。探究的路径与角度常常决定我们的发现与认识。例如语文，如何看待和认识这门对国人进行母语教育的学科，一直是一个备受争议的论题。事实上，不同的语文观必然有与之相应的现实课程形态与现实教学。此外，我们从不同立场走进语文并对之进行研究，也会有不同的发现。正是基于研究者的不同学科立场和相应研究的支持，所以形成了不同的与语文教学相关的学科——语文教育心理学、语文课程与教学论、语文教育哲学、语文教育史、语文教育文化学、语文教育解释学等。这些不同的学科都以自己特有的立场与方法对语文教育进行了富有特色的探究，为今天的语文教育提供了颇有价值的新材料、新理念，更为我们重新认识语文提供了独特的视角与路径。眼界打开了，材料丰富了，我们对学科教学的认识也就会“焕然一新”。

叶澜教授认为，教育是人类社会特有的更新再生系统，可能是人世间复杂问题之最。教育教学现象本身的复杂性，尤其是教育作为事实世界和价值世界的统一性，决定了我们必须摒弃简单思维，用一种全新的方法和视角来走进和研究教育。首先，我们须要打破原有的认知模式，从长期置身其间的“教育场域”中跳出来，走进相邻或相关的学科，呼吸新的空气，吸收新的营养，然后再回身审视日常的学科教学。这种在教育场域内外的穿行将有助于我们认识和把握学科教学这一复杂的存在，走出就教育论教育，就某一学科探究某一学科的窠臼，在全新的视界内思考和改进学科教学。其次，我们须要做一个真正意义上的反思型学习者，保证认知的开放状态，敢于面对自身的不足，善于在学习与探究中完善自己。惟其如此，我们才能突破既有的框架和言说方式，寻求到新的出路。这里涉及对所学新知进行加工的问题，简单而言，我们要注意做好相关知识的如下转化：静态的知识→动态的知识、公共知识→个人知识、符号化的知识→生命形态的知识、学术形态的知识→课程形态的知识。这是一个“重新描述和重新情境化”的过程，在此过程中，我们须要像罗蒂所说的那样，“将过去我所有读过的书，都放到当前这个上下文”。通过这一过程，形成新的学科话语系统、学科眼光、学科头脑和学科特有的问题解决方法。

事实上，教师基于学科教学的跨领域学习，正是教师专业发展的有效途径。

最后，思考和探究中国教育，不能缺少稳定的学科立场。在思考或论述相关的教育教学问题时，目前不少言说者没有自己的立场和语汇，呈现出一种“众口一词”的“正确的废话”流行的话语景观。这种现状虽已引起各方关注，有研究者和一线教师正致力于做相

应的努力，但客观地说，真正取得理想的成效恐怕还要假以时日。这一点，在教师从本学科领域走出，广泛涉猎相关学科或领域的新知的时候，显得尤为重要。我们在从本学科、本领域走出，进行广泛阅读的时候，须要注意不能以阅读的广度代替了阅读的深度；不能被其他学科的新知识、新信息所淹没，而失去了自身的立场和选择标准。对相关学科或领域的涉猎，要超越急功近利的“实用”心态以及“技术化”的理解，始终保持批判的向度，立足于学科教学实践。我们从教育场域中走出来，最终是为了回归教育场域。有学者指出，学科只要存在，就要讲学科立场，就要有一个朝向、视野的问题。

正如钟启泉教授所指出的，教学是带领学生步入一段充满探险的精神旅程。在这个旅程中，我们同新的世界相遇，同新的他人相遇，同新的自我相遇。在这个旅程中，我们同新的世界对话，同新的他人对话，同新的自我对话。只要我们立足于学科教学实际，带着问题上路，我们的探险之旅就会有助于教师的成长与发展，就会在对话中实现对教学卓越的追求。

综上所述，我们认为课程变革的切实推进，人民满意的教育都必须奠基于教师的成长与发展，必须建立在教师创造性劳动的基础上。正是基于这样的想法，我们着手策划出版了这套丛书。希望通过我们的努力，能够为广大一线教师的知识更新与专业发展提供资源与支持。

陈明选

2009年4月

【前言】

“数学使人聪明”“数学令人精确”“数学让人完美”，数学是人类发展过程中不可缺少的内容。在世界上的所有国家中，学生从小学一年级入学到中学毕业，数学一直是学校教育的一门基础学科。重视数学是一个国家文明的象征，也是一个国家教育进步的标志。随着我国数学教育课程改革的深入，数学教育不仅为学生提供了必备的专业基础知识和解题训练，更显现出培养学生思想品德、智能素质、创造能力、社会适应能力等功能，这对中小学数学教师的专业化水平和学科素养提出了全新的、更高的要求。但在现实生活中，有相当一部分人因数学特有的符号与语言、严谨而抽象的表达，将其视为为不可逾越的高峰，敬而远之。因此，充分展示数学的魅力，让更多的学生喜欢数学，是每一位数学教育工作者的使命！

从认知心理学角度看，夯实数学基础（数学功底）是教好数学的首要条件。教师对自己所教数学知识内容的掌握情况在很大程度上决定了他的教学效果。一名数学教师如果没有精深的数学专业素养，不能完整认识中小学数学学科全貌，以及整体把握数学的知识体系，就无法准确地揭示数学概念、结论的实质，也无法在课堂教学实际中充分展示数学深厚的内蕴，更无法把知识内化为学生自己的能力和智慧。数学是一门古老的学科，从人类早期对数学的认识开始，数学科学的发展经历了漫长的萌芽时期、初等数学时期、变量数学时期、近代数学时期和现代数学时期。虽然当前中小学阶段的数学教学内容绝大部分形成于数学发展史的前三个阶段，然而教育是处于社会形态中的教育，现代数学的空前发展使数学新知识不断地被补充到中小学课程中。国家教育部于2001年7月颁布的《义务教育数学课程标准》，于2003年颁布的《普通高中数学课程标准》，使数学教学内容既保留传统精华，又不时加入现代成果。同时，中小学数学教师不仅教学任务繁重，日常事务也特别繁杂，没有足够的时间来实现新知识的自我学习和积累，原有在职前培养中获得的高等数学知识因长期不接触也逐渐缺失和淡忘。因此，引导完善中小学数学教师的学科知识结构，补充他们普遍缺失的数学专业知识，不断扩大他们的学科视野，是我们编写本书的

第一个初衷。

数学教育是一个充满了不确定性的、复杂的师生互动过程，仅仅具有充足的知识储备并不意味着已具备了在实际操作中建设和开发中小学数学课程的能力。数学教育的成效在很大程度上取决于中小学数学教师对新课程理念的理解、适应及操作层面上的实施技巧；取决于不断对日常数学教学工作进行理性的审视与反思。虽然数学课程标准所倡导的理念已逐步得到社会和数学教育工作者的普遍认同，然而，新理念转化成教师的教学观念，体现在各自的课堂教学行为中，不同的教师会有不同的诠释，再加上一些先进的理念过于抽象和概括，许多教师在实施教学时出现了教育理念与教学实践的脱节。具体表现在教学实践中对教学目标的把握缺乏全面性及可操作性，课堂教学手段运用泛化和课堂教学活动组织的口号化、形式化、浅层化。因此，确立与数学新课程标准相适应的体现素质教育精神的数学教育理念，把关注点投射在中小学教学一线，投射在中小学数学教学课堂，投射在一个个鲜活生动的案例之上，让中小学数学教师在教学案例分析的基础上感悟和概括数学学科教学理论，有助于他们把理念落到实处，在实践层面上取得真正意义上的新突破。突出理论指导实践，促进中小学数学教师在课堂教学上深入浅出，充分展示“冰冷美丽”的数学结论背后的“火热思考”，增添数学教育的活力，这是我们编写本书的第二个初衷。

编写本书的第三个初衷是新课程条件下的数学教师必须具有较宽广的文化视野，即教师既要具备较扎实、深厚的本专业的的基础知识和前沿知识，更要广泛涉猎与本专业有关的各学科知识，了解这些知识在数学学科教学之中的应用与实践。多年来，我们一直以数学教材为唯一的课程资源，所以，数学教师的课程资源意识普遍较狭窄，看不到资源的广泛性和丰富性，还未能走出数学教材及教参的局限。而“走向综合”是新课程改革的基本理念，不仅本学科知识要进行综合，而且学科之间以及与最新知识发展领域、学生的社会生活经验等也要进行交叉与融合。在数学教育的实际操作过程中，中小学数学教师必须是中小学数学课程的开发者、整合者，应根据学生的学习愿望及其发展可能性，实施因材施教。但中小学数学课程资源的鉴别、开发、建设和利用，需要大量的创新工作，有些中小学数学教师受自身素养的局限，无法胜任。主动、灵活地创造性地使用教材，数学教师不仅需要把握好所教内容与更为基本、更为深刻的数学思想之间的联系，还要跳出数学学科，了解本学科与其他领域乃至与社会文化、人类文明的内在联系。

作为高等师范院校非数学专业的选修课教材，本书主要介绍数学发展的新知识，以及数字研究的新成果、新观点、新视野，并运用这些新知识解决和回答中小学数学教学中的一些问题。本书的关注点是数学新知识在数学学科教学中的应用，其目的是增强广大中小学数学教师更新知识、学习新知识的意识，使他们在数学教学的实践中高瞻远瞩地用好新知识，并进一步研究新知识在学科教学中的应用。除前言部分外，本书共分十个专题，分别为集合论、矩阵论、数理逻辑、模糊数学、概率统计、拓扑学、非欧几何、数学建模、抽象度分析法和最优化等知识与数学学科教学。每个专题一般包括以下三个部分：（1）专业知识概述；（2）数学学科教学中该专业知识的应用；（3）典型案例评析。从事各学段数学教学的教师培训或阅读本书时，可以根据需要对书中内容作适当取舍。本书在编写过程中特别强调以下几点：

1. 视角独到新颖

缺乏学术形态，难以表述一门学科的科学内涵。本书立足教师专业发展，突出数学教

师学科素养的养成，以数学各分支的理论知识为主线索，结合数学学科教学实际，构建学习内容。本书主要阐述在理论指导下对某个问题的认识和理解，理想的教学实践形态，以及需要研究和讨论的具体内容。把关注点放在数学专业理论知识与数学教学实际两者的结合上，突出理论联系实践，帮助数学教育工作者学习新知识，掌握新技能。

2. 立足应用实践

本书不是纯理论的学术专著，而是着眼于“应用”的指导性书籍。因此，书中介绍相关数学理论知识力求简洁精要，淡化细节，突出思想，紧扣中小学数学学科教学。全书或以案例为引，或以事例（含教材内容）为纲，选择与相应专题内涵密切相关的若干典型案例，具体详细地描述案例发生的背景和过程，通过评析对案例进行理论透视，生动简明地解释数学新知识在数学教材和教学中的应用。所列举的案例、事例均来自新课程实施以来小学、初中、高中数学教学及各年级数学教材，以丰富的第一手材料支撑观点。

3. 语言通俗易懂

本书针对教师职后培训的特点，尽量用规范、简明的语言表述内容。在每章前我们先给出了案例导读，每章末设有富有启发性和争议性的“思考与研讨”，使其前后呼应，便于读者有目的地阅读和检验学习效果，也向读者提示该专题值得关注的研究课题；在每章的结尾，还列出了参考文献，便于读者检索涉及本章内容的有关文献，以便有兴趣的读者深入了解书中的相关内容。

必须说明的是，数学学科教学所涉及的新知识驳杂而丰富，比如分形几何、近似代数与数学学科教学等。限于篇幅，本书无法完全包容，不能一一介绍，还需要一线教师根据自己的教学实践需要，进一步学习、积累、探索。

编者

【目录】

第一章 集合论与数学学科教学

- 第一节 集合论概述 / 002
- 第二节 集合论与数学学科教学 / 010
- 第三节 典型案例研讨 / 015

第二章 矩阵与数学学科教学

- 第一节 矩阵概述 / 020
- 第二节 数学学科教学中的矩阵 / 023
- 第三节 典型案例研讨 / 035

第三章 数理逻辑与数学学科教学

- 第一节 数理逻辑的产生与发展 / 042
- 第二节 中小学数理逻辑知识简释 / 049
- 第三节 中小学数理逻辑典型题解 / 057

第四章 模糊数学与数学学科教学

- 第一节 模糊数学概述 / 064
- 第二节 模糊数学的基本思想 / 066
- 第三节 典型案例评析 / 071

第五章 概率统计与数学学科教学

- 第一节 概率统计概述 / 082
- 第二节 数学学科教学中的概率统计 / 090
- 第三节 典型案例研讨 / 096

第六章 拓扑学与数学学科教学

- 第一节 拓扑学概述 / 100
- 第二节 数学学科教学中的拓扑学 / 106
- 第三节 典型案例研讨 / 109

第七章 非欧几何与数学学科教学

第一节 非欧几何的起源与发展 / 114

第二节 非欧几何的主要思想 / 121

第三节 非欧几何与数学学科教学 / 129

第八章 数学模型方法与数学学科教学

第一节 数学模型方法概述 / 134

第二节 数学教学中的数学模型方法 / 136

第三节 数学模型方法教学案例探讨 / 140

第九章 抽象度分析法与数学学科教学

第一节 数学的抽象度分析法概述 / 146

第二节 数学学科教学中的抽象度分析法 / 147

第三节 典型案例研讨 / 153

第十章 最优化与数学学科教学

第一节 最优化概述 / 160

第二节 数学学科中的最优化问题 / 169

第三节 典型案例研讨 / 171

后 记 /175

集合论与数学学科教学

集合论在数学中占有独特的地位,可以看做整个现代数学的基础。初等数学接触到的集合知识属于朴素集合论的范畴,其中有一些问题值得思考研究。高中数学教材只是对其进行一些描述性的说明:一定的范围内某些确定的、不同的对象的全体构成一个集合。按照这个说明可以得到一些大而全的集合,如:一切集合的集合。如果把“一切集合的集合”记为 A ,那么必有 $A \in A$ 。而集合论中又规定 $A \notin A$,这究竟是为了什么?

引例 1: 设 $N_+ = \{1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$, $M = \{2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots\}$, 显然, 集合 M 是集合 N_+ 的一个真子集, 集合 M 的元素个数应当比集合 N_+ 的元素个数少。但是, 从另外一个角度看, 集合 N_+ 与集合 M 的元素之间能够建立一一对应。也就是说: 两个集合的元素谁也不多一个, 谁也不少一个, 应当一样多。怎样解决这个矛盾?

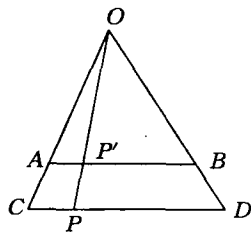


图 1-1

引例 2: 线段可以看成点的集合。如图 1-1 所示, 线段 CD 显然比线段 AB 长, 但是, 线段 AB 和线段 CD 上的点可以构成一一对应。线段 AB 和线段 CD 上的点到底谁多谁少?

要弄清上述问题,必须从哲学高度对集合论进行比较深入的考察。

第一节 集合论概述

集合论的实质是关于无限的理论,其基本概念已渗透到数学的所有领域。按照现代数学观点,数学各分支的研究对象是本身带有某种特定结构的集合(如群、环、拓扑空间),或者是可以通过集合来定义的(如自然数、实数、函数)。从这个意义上说,集合论可以看做整个现代数学的基础。

一、无限集之谜

数学中的无限概念被人们看做思维自由想象的产物,因为人类实践活动都只能停留在有限的范围,从而以经验对象为原型通过直接观念化所生成的就只能是有限的概念。为了建立无限的概念,必须依靠思维的自由想象。

从古希腊时代起,数学家与哲学家就注意到无限概念。最具代表性的是芝诺(Zenon Eleates,约前 490—约前 436)所提出的四个著名悖论,将当时人们认识的无限概念所遇到的困难揭示无遗。

古希腊时期哲学家、科学家和教育家亚里士多德(Aristotle,前 384—前 322)对无限已有许多论述。在其《物理学》中说:“时间是无限制的”“量具有无限可分性”“产生和灭亡是无穷无尽的”。但无限集是否能作为一个固定的、实实在在的整体存在,他认为:“说存在或说不存在都很困难”。

关于是否有实实在在无限多个对象的集合这个问题,数学家和哲学家们各持一端,历来就有潜无限和实无限两种观点。潜无限就是把无限看成一种永无止境而又不能完成的变化或生成过程。实无限则是把无限看成一种已经完成了的变化过程,一种得以独立存在的无限性对象。例如,潜无限论者认为正整数可以永无止境地一个接一个地被生成下去,但不承认这种过程能够最终完成而构造出正整数的全体;而实无限论者认为正整数的不断生成的过程能够进行完毕而形成全体正整数构成的集合 $\{1, 2, 3, \dots\}$ 。

17 世纪,意大利著名天文学家、数学家伽利略(G. Galilei, 1564—1642)在其《关于两门新科学》中讨论无限。他注意到:图 1-1 中的两条不相等的线段 AB 和 CD 上的点可以构成一一对应。

他还把正整数和它们的平方用下面的方法一一对应起来:

1	2	3	...	n	...
↓	↓	↓	...	↓	...
1^2	2^2	3^2	...	n^2	...

它们谁也不多,谁也不少一个,就是说应该一样多。可是,正整数的平方明明白白只是全体正整数的一部分,怎么会和正整数一样多呢?难道部分可以等于整体(史称“伽利略悖论”)?伽利略百思不得其解,他认为:为了避免这种怪事产生,我们不能把无限集作为真实的存在。

德国著名数学家高斯(C. F. Gauss, 1777—1855)在 1831 年还说:“我反对把一个无限量当做实体,这在数学中是从来不允许的。无限只是一种说话的方式,当人们确切地说到极限

时,是指某些值可以任意地趋近它,而另一些则允许没有界限地增加。”

法国数学家柯西(A. L. Cauchy, 1789—1857)也不承认无限集的存在,因为部分能够同整体构成一一对应这件事,在他看来是矛盾的。

二、康托尔创立集合论

真正把实无限引入数学,是从捷克数学家、哲学家波尔查诺(B. Bolzano, 1781—1848)开始的。在 1851 年出版的《无穷的悖论》一书中,波尔查诺认为要将实无限引入数学,最关键的问题是解决两个无限集合的比较。他认为:如果一个无限集是另一个无限集的子集,那么有两种可能对它们进行比较。第一种是在两个无限集合之间建立起一一对应关系;第二种是像有限集合那样,对两个无限集合的元素建立起“部分—整体”的关系(即包含关系),但他并不认为这两个集合元素个数就一定相等,所建立的对应仅仅是无限集合的一种特性而已。因此,他最后选择了“部分—整体”关系作为比较两个无限集合的准则:

如果集合 A 是集合 B 的真子集,即 A 包含于 B 而不等于 B ,那么 A 的元素个数少于 B 的元素个数。因此,尽管在区间 $(0, 5)$ 和 $(0, 12)$ 之间可以建立一一对应关系 $y = \frac{12}{5}x$,但前者所含实数个数少于后者所含实数个数。

19 世纪末,德国著名数学家康托尔(G. Cantor, 1845—1918)创立了集合论。集合论产生的背景是分析学,特别是三角级数发展的需要。康托尔为了研究任意函数表示为三角级数的唯一性问题,对无限集进行了深入的研究。他在 1878 年前后发表了“关于一切实代数的一个性质”“一般集合论基础”“集合论的一个根本问题”等一系列论著,澄清了有关集合的很多问题,被公认为集合论的创建者。集合论的发展经历了两个阶段:1908 年以前称为朴素集合论;1908 年以后又产生了公理集合论。公理集合论排除了朴素集合论中发现了的悖论,大大提高了在数学各类分支中广泛使用集合概念的可靠性。由于公理集合论广泛使用数理逻辑的工具,它又逐渐成为数理逻辑的一个分支,并从 20 世纪 60 年代以来获得了迅速的发展。

1. 有限集与无限集

对任意一个集合,我们会关心其中元素的多少。对于有有限个元素的集合,我们自然会用其所含元素的个数来作比较,即使不用数也可以解决问题。例如: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$ 。如果我们观察表 1-1:

表 1-1

A	1	2	3	4	5
B	a	b	c	d	e

即使不数,也知道 A 与 B 的元素个数是相同的,因为集合 A 与集合 B 之间能建立起一一对应。

对于有无限多个元素的集合,请观察下面的两个例子:

(1)普通旅店和客人。设想有一个普通旅店,各房间依次编了号码:

#1, #2, #3, ..., # n 。

现在住进了一批客人,每人住一个房间,没有两个人住同一个房间。如果还有空房间,我们知道房间数比客人多;如果所有客人都住进去后,没有空房间了,那么房间数和客人

数相同;如果房间住完后,还有客人没有住进去,则客人数多于房间数。

对于有无限多个元素的集合,会有一些完全不同的性质。

(2) 希尔伯特(D. Hilbert, 德国数学家, 1862—1943)旅店。设想一个有无限多个房间的旅店,各房间依次编了号码:

$$\#1, \#2, \#3, \dots$$

现在来了一批客人,有无限多个。为方便起见,我们给所有客人编上号码:

$$1, 2, 3, \dots$$

现在我们让每个客人住进号码相同的房间:1号客人住#1号房间,2号客人住#2号房间,……最后,每一个人有一个房间住,没有房间空着。这样,客人数和房间的数目相同。也就是说,客人组成的集合的元素个数和房间组成的集合的元素个数一样多。

设想等代表团安顿好后,又来了一个客人,他是否也能住下来呢?答案是肯定的。我们让1号客人移到#2号房间去,2号客人移到#3号房间去,其余的客人都依次移到下一个房间。于是就空出了#1号房间可以给新到客人住。于是,虽然又来了一个人,但客人总数和房间总数仍然一样多。给房间编号,事实上是确定了旅店的房间数目和正整数的集合一一对应的一种方法,因而旅店房间的集合和正整数集具有相同的元素个数。如果把正整数集 N_+ 的元素个数记为 $\aleph_0$,则上述情况告诉我们,在正整数集中加上一个元素后,所得到的集合的元素个数仍然是 $\aleph_0$,即

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0.$$

同样,如果此后又来了100个客人,我们请原来住#1号房间的客人移到#101号房间去,住#2号房间的客人住#102号房间去,……,所有的客人都住后移100个房间。这样,新来的100个客人就可以住进去了。这时房间数和客人数仍然是一样多的。因而,我们有

$$\aleph_0 + 100 = \aleph_0.$$

用相同的方法,我们可以证明,对于任何一个正整数 P ,都有

$$\aleph_0 + P = \aleph_0.$$

特别地,如果后来又来了无限多个客人,我们仍然可以让他们都住下来。安排的方法是:让原先住#1号房间的客人移到#2号房间,让原先住#2号房间的客人移到#4号房间,……,让原先住#100号房间的客人移到#200号房间,……,将腾出来的单号房间依次安排新来的客人住,于是新来的无限多个客人都可以住进去了。这样我们得到:

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0.$$

从上面的例子可以看出,“整体大于部分”这一欧几里得公理对无限集并不成立。这说明无限集有异于有限集的本质特性:无限集可以和它的真子集建立一一对应的关系。康托尔把适用于有限集的不用数数而判定两集合元素一样多的一一对应准则推广到无限集。他给出了无限集的定义:“如果一个集合能与自身的真子集成一一对应的关系,这个集合就叫做无限集,否则就叫做有限集。”

中学教材中对无限集的定义是:含有无限个元素的集合称为无限集。这实质上是同语反复,是不能称之为定义的。这样的定义是由中学生的认知特点决定的,是可以理解的。但教师可以在允许的情况下,尽可能地揭示无限集的本质特征。人们对无限集的认识经历了漫长而艰难的过程,这也正是无限集概念成为教学中的难点所在。