高等学校数学学习辅导教材

高等数学重要习题集

（2002版）

—附2001、2002年研究生试题及参考答案

曹绳武 王振中 于远许/编著

大连理工大学出版社

高等学校数学学习辅导教材

高等数学重要习题集

（第三版）

——附 2001、2002 年研究生
试题及参考答案

曹绳武　王振中　于远许　编　著

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学重要习题集/曹绳武,王振中,于远许编著. 一大连:
大连理工大学出版社,2002.7
高等学校数学学习辅导教材
ISBN 7-5611-0201-1

Ⅰ.高… Ⅱ.①曹… ②王… ③于… Ⅲ.高等数学-高等
学校-习题 Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 034660 号

大连理工大学出版社出版发行
大连市凌水河　邮政编码　116024
电话:0411-4708842　传真:0411-4701466
E-mail:dutp@mail.dlptt.ln.cn
URL:http://www.dutp.com.cn
大连理工印刷有限公司印刷

开本:850 毫米×1168 毫米　1/32　字数:536 千字　印张:16.875
印数:37001—45000 册
1987 年 7 月第 1 版　2002 年 7 月第 3 版
2002 年 7 月第 4 次印刷

责任编辑:刘　杰　责任校对:梁艾玲　李红
封面设计:王福刚

定价:20.00 元

第三版前言

本习题集第二版自 1994 年出版以来，得到了我校及国内一些兄弟院校师生的关注和鼓励，对于高等学校学科的教学和学生学习以及报考硕士学位研究生的读者备考都起到一定的积极作用。我们根据学科建设、学生学习及考研需求，并吸收同行和学生的宝贵建议，对前两版书的部分内容作了较大的修订，出版了第 3 版。

本书仍根据高等学校工科高等数学教学基本要求，依照高等数学通用教材的章节顺序编写，每章均分为四个版块，即：

一、例题精选　在这个版块中，保留了原书中的例题，同时选用近几年全国研究生入学考试部分试题和部分典型例题。所选例题类型广泛，典型性、技巧性强。每题均作出了详尽解析，有的还给出多种解法，旨在使学生掌握学科的基本概念和基本理论，开阔解题思路，提高分析问题、解决问题能力，掌握解题技巧。

二、基本训练　这部分题已包括工科数学课程基本要求全部内容。通过基本训练达到掌握基本概念、重要定理及重要公式演算和运用能力，这些均是在校大学生必须掌握的基本内容。

三、综合题库　在原书杂题的基础上增选了近几年研究生入学考试部分试题，丰富了本书内容，不少题概念性、技巧性、综合性强，难度大，是试题中的难题。通过选作部分难题，除可进一步巩固基本训练外，还能得到综合应用这些知识的能力培养和训练，亦不失准备考研复习的一本好参考书。本书中有些题目除了按书中顺序安排序号外，还带有四个数字的注释，这个数字指的是某年的研究生考题，例如，第五章例 9(2000)，指明本题是 2000 年的研究生

考题；又如，6.101(1998)，指明第六章第101题是1998年的研究生考题。

四、参考答案与提示　为了读者使用方便，将原书的答案和提示部分分段编排在相关章节之后，其中部分题目给予解答，有的题目则给出提示，以帮助使用本书的读者尽快、较好地掌握基本概念、基本知识，培养和提高解题能力。

本书最后部分是附录，提供2001年、2002年全国攻读硕士学位研究生入学考试数学试题及参考答案。

本习题集第一版、第二版分别于1987年3月和1994年3月出版。2002年修订版是在原书的基础上修订的，由于本书原编者之一张凤香同志过早逝世，这次参加修订工作的有王振中(第一、二、三、四、十二章)、曹绳武(第五、六、七、八、九章)、于远许(第十、十一章)。本书的修订工作是在大连理工大学出版社、教材开发部第一工作室刘杰主任特约和协助下完成的。编者对刘杰主任以及应用数学系部分教师的关心帮助表示感谢。

编　者

2002年4月

前　　言

这本《高等数学习题集》是为工科院校的大学生编写的。他们在学习高等数学时，除了要做一定量的基本习题外，还需要做一些有适当难度的综合性习题，以便加深对所学课程内容的理解，灵活地掌握运算方法和提高自己的解题技巧，培养解题、解决问题的能力。本习题集就是为适应这种要求而编写的。对于在校的或社会上的准备报考工科研究生的读者，本书也可供他们在应试之前复习高等数学时参考之用。

本习题集是根据高等学校工科数学课程教学指导委员会制订的《高等数学教学基本要求》，按照高等数学通用教材的章节顺序编写的，因此它可以与通用教材配合使用。习题集各章均由例题、基本题和杂题三部分组成(例题约 100 个，基本题约 1430 个，杂题约 900 个)，例题是为了配合杂题选解的，计算题都附有答案，为了启发思考、提供解题方法，大部分杂题给出了提示，书末附录备有常见公式以便查找。准备报考研究生的读者，可以在阅读完例题之后，越过基本题而进入杂题，对于在校的大学生，可以在演算基本题后，再阅读例题并选作一部分杂题，对高等数学要求较低的某些专业的学生，做基本题后再选做少量杂题就够了。

本书大部分习题是应用数学系许多老师在教学过程中积累起来的，我们在编选时，参考了有关资料，并吸收了我院及一些兄弟院校近年来研究生的试题，为此谨向有关的同志致谢。

参加本书编写的人员有：曹绳武、王振中、于远许和张凤香四人。

应用数学系领导为我们提供完成编写工作的条件；我们的工作还得到了许多老师的关心、支持和帮助；在此，我们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，加之时间仓促，本习题集一定还有许多缺欠和不足，恳请多加批评、指正。

编 者

1987 年 3 月

目　录

第一章　函数与极限

一　例题精选

【例 1】 设 $f(x)=\begin{cases}1+x & x<0\\ 1 & x\geqslant 0\end{cases}$，求 $f[f(x)]$。

解　$f[f(x)]=\begin{cases}1+f(x) & f(x)<0\\ 1 & f(x)\geqslant 0\end{cases}$，先求 $f(x)\geqslant 0$ 及 $f(x)<0$ 的区间。由 $f(x)\geqslant 0$ 得 $1+x\geqslant 0$，于是 $x\geqslant -1$；由 $f(x)<0$ 得 $1+x<0$，于是 $x<-1$。所以

$$f[f(x)]=\begin{cases}1+f(x) & x<-1\\ 1 & x\geqslant -1\end{cases}$$

又当 $x<-1$ 时，$f(x)=1+x$，故有

$$f[f(x)]=\begin{cases}2+x & x<-1\\ 1 & x\geqslant -1\end{cases}$$

【例 2】 设 $f(x)$ 满足方程 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$，其中 a、b、c 为常数，且 $|a|\neq|b|$，求 $f(x)$ 的表达式并证明 $f(x)$ 是奇函数。

解
$$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x} \tag{1}$$

在式(1)中用 $\frac{1}{x}$ 代 x，则得

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx \tag{2}$$

由式(1)、(2)消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$，得

$$(a^2-b^2)f(x)=\frac{ac}{x}-bcx$$

故
$$f(x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right)$$

由于　$$f(-x)=\frac{c}{a^2-b^2}\left(-\frac{a}{x}+bx\right)=\frac{-c}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{x}-bx\right)$$
$$=-f(x)$$

所以，$f(x)$是奇函数

【例 3】 (1)设 $y=f(x)(-\infty<x<+\infty)$的图形关于直线 $x=a$ 对称，证明 $f(2a-x)=f(x)$；

(2)如果 $y=f(x)$的图形关于直线 $x=a$ 和 $x=b(a<b)$都对称，证明 $f(x)$是周期为 $2(b-a)$的周期函数。

证明 (1)若 $f(x)$的图形关于直线 $x=a$ 对称，则对于任意的 t 有

$$f(a-t)=f(a+t)$$

令 $a-t=x$，则 $t=a-x$，于是

$$f(x)=f[a+(a-x)]=f(2a-x)$$

(2)因为 $y=f(x)$的图形关于 $x=a$ 和 $x=b$ 都对称，所以

$$f(x)=f(2a-x)=f(2b-x)$$

于是　$$f[x+2(b-a)]=f[2b-(2a-x)]$$
$$=f(2a-x)=f(x)$$

因此 $f(x)$是周期为 $2(b-a)$的周期函数。

【例 4】 求下列极限：

(1)(2000)　$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$；

(2)(1997)　$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$；

(3)(1995)　$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$。

解 (1) $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1;$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1$$

所以　原式$=1$

(2)因为 $x\to-\infty$，所以分子、分母要同除以$-x$，

$$原式=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}}=\frac{2-1}{1}=1$$

(3)
$$原式=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1}{\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot2=\frac{1}{2}$$

【例 5】 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\cdots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$$

解　若采用连乘记号,则

$$原式=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$$

由于
$$\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$$

而
$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}=\frac{2}{n(n+1)}$$

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k+1)^2-(k+1)+1}{k^2-k+1}=\frac{n^2+n+1}{2^2-2+1}$$
$$=\frac{1}{3}(n^2+n+1)$$

故
$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k-1}{k+1}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n(n+1)}\frac{n^2+n+1}{3}$$
$$=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+1}{n^2+n}=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}$$

注　记号 $\prod$ 表示连乘,例如 $\prod_{k=1}^{n}a_k=a_1a_2\cdots a_n$。

【例 6】 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5x-\sqrt{ax^2-bx+c}\right)=2$，求 a、b。

解 因为

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(5x-\sqrt{ax^2-bx+c}\right)\left(5x+\sqrt{ax^2-bx+c}\right)}{5x+\sqrt{ax^2-bx+c}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{25x^2-(ax^2-bx+c)}{5x+\sqrt{ax^2-bx+c}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(25-a)x^2+bx-c}{5x+\sqrt{ax^2-bx+c}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(25-a)x+b-\frac{c}{x}}{5+\sqrt{a-\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}}=2$$

所以

$$\begin{cases}25-a=0\\ \dfrac{b}{5+\sqrt{a}}=2\end{cases}$$

解此两式，得

$$a=25,b=20$$

【例 7】 设 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)(n=0,1,2,\cdots)$，其中 $a>0,x_0>0$。(1)$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 是否存在；(2)若存在，试求其值。

解 (1)由

$$x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)=\frac{x_{n-1}^2+a}{2x_{n-1}}$$

$$\geqslant\frac{2\sqrt{a}\,x_{n-1}}{2x_{n-1}}=\sqrt{a}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

可见数列 $\{x_n\}$ 有下界 $\sqrt{a}$。又因为

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)-x_n=\frac{a-x_n^2}{2x_n}\leqslant 0$$

所以数列 $\{x_n\}$ 单调减少，由极限存在准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$。

(2)对等式 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$ 两端取极限，得

$$x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)$$

解之得

$$x=\pm\sqrt{a}$$

因为 $x_n>0$，所以取 $x=\sqrt{a}$（负值舍去），即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$$

【例 8】 求下列极限：

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$，其中 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$；

(2)$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 a、b、c 为正数。

解 (1)由于

$$\begin{aligned}1\leqslant a_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)}\\ &=1+\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right]\\ &=2-\frac{1}{n}<2\end{aligned}$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$，故由夹逼定理得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$。

(2)

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\\ &=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{(a^x-1)+(b^x-1)}{3}+\frac{(c^x-1)}{3}\right)^{\frac{3}{(a^x-1)+(b^x-1)+(c^x-1)}\cdot\frac{(a^x-1)+(b^x-1)+(c^x-1)}{3x}}\\ &=\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{(a^x-1)+(b^x-1)}{3}+\frac{(c^x-1)}{3}\right)^{\frac{3}{(a^x-1)+(b^x-1)+(c^x-1)}}\right]^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(a^x-1)+(b^x-1)+(c^x-1)}{3x}}\\ &=e^{\frac{\ln a+\ln b+\ln c}{3}}=e^{\ln\sqrt[3]{abc}}=\sqrt[3]{abc}\end{aligned}$$

注意 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

【例 9】 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}, & -1\leqslant x<0\end{cases}$$

试讨论 $f(x)$在 $x=0$ 处的连续性。

解　因为

$$\lim_{x\to -0} f(x)=\lim_{x\to -0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to -0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$

$$=1$$

$$\lim_{x\to +0} f(x)=\lim_{x\to +0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to +0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\ln e=1$$

故$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$,但 $f(0)=0$,所以

$$\lim_{x\to 0}f(x)\neq f(0)$$

因此,$f(x)$在 $x=0$ 处不连续。

【例 10】　设函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$$

是连续函数,求 a、b 的值。

解　当$|x|<1$ 时,$f(x)=ax^2+bx$,

当$|x|>1$ 时,$f(x)=\frac{1}{x}$,

当 $x=1$ 时,$f(1)=\frac{1}{2}(1+a+b)$,

当 $x=-1$ 时,$f(-1)=\frac{1}{2}(-1+a-b)$。

因为函数 $f(x)$在 $x=1$ 处连续,有

$$a+b=1=\frac{1}{2}(1+a+b)$$

即

$$a+b=1 \tag{1}$$

又函数 $f(x)$在 $x=-1$ 处连续,有

$$a-b=-1=\frac{1}{2}(-1+a-b)$$

即

$$a-b=-1 \tag{2}$$

解(1)、(2)两式,可得

$$a=0, b=1$$

【例 11】 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $a<c<d<b$。证明在 $[a,b]$ 内至少存在一点 ξ，使

$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$$

成立，其中 p,q 均为任意正常数。

证明 因为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，所以此函数在区间 $[a,b]$ 上能取得最大值 M 和最小值 m，且有

$$(p+q)m\leqslant pf(c)+qf(d)\leqslant(p+q)M$$

即

$$m\leqslant\frac{pf(c)+qf(d)}{p+q}\leqslant M$$

由介值定理可知，在 $[a,b]$ 内至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{pf(c)+qf(d)}{p+q}=f(\xi)$$

即

$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$$

这一结果，可以推广到一般 n 个点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的情形（见 1.212 题），这时 $f(\xi)=\dfrac{c_1f(x_1)+c_2f(x_2)+\cdots+c_nf(x_n)}{c_1+c_2+\cdots+c_n}$ $(a\leqslant\xi\leqslant b)$，其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是任意一组正数。特别，当 $c_1=c_2=\cdots=c_n$ 时，有

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\quad(a\leqslant\xi\leqslant b)$$（见 1.125 题）

【例 12】 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ $(a>0)$ 上连续，且 $f(0)=f(2a)$，证明在 $[0,a]$ 上至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=f(\xi+a)$。

证明 设 $F(x)=f(x)-f(x+a)$，则 $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，且

$$F(0)=f(0)-f(a)$$

$$F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)$$

(1)若 $f(0)=f(a)$，则 $F(0)=F(a)=0$，此时 $\xi=0$ 或 $\xi=a$，即有

$$f(\xi)=f(\xi+a)$$

(2)若 $f(0)\neq f(a)$，则 $F(0)$ 与 $F(a)$ 异号，由零值定理知至少存在一点 $\xi\in(0,a)$，使 $F(\xi)=0$，即是

$$f(\xi)=f(\xi+a)$$