研究生教学用书

应用数理统计

Applied Mathematic Statistics

主　编　李忠范　高文森
副主编　杨　荣　王彩玲

高等教育出版社

研究生教学用书

应用数理统计

Applied Mathematic Statistics

主　编　李忠范　高文森
副主编　杨　荣　王彩玲

高等教育出版社

内容简介

本书是作者在多年教学实践的基础上，本着厚基础、重应用的原则，经过反复试用和修改后编写而成。本书着重介绍数理统计的基本概念、基本原理和基本方法及其在实际问题中的应用，遵循起点低、逐步深入的编写思路。读者只要具备高等数学、线性代数和概率论的初步知识即可学习本书。

全书共七章，包括概率论基本知识、数理统计基本知识、参数估计、假设检验、回归分析、方差分析与正交试验设计、随机过程简介。为便于学习，书后附有习题参考答案和常用分布表。

本书可作为研究生公共数学“数理统计”课程的教学用书，也可作为本科生学习概率论与数理统计课程的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

应用数理统计/李忠范，高文森主编.—北京：高等教育出版社，2009.9

ISBN 978-7-04-028029-6

Ⅰ.应… Ⅱ.①李…②高… Ⅲ.数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.O212

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 130995 号

策划编辑 张长虹 **责任编辑** 崔梅萍 **封面设计** 李卫青 **责任绘图** 黄建英
版式设计 马敬茹 **责任校对** 刘 莉 **责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　址	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　刷	北京市联华印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　本	787×960　1/16	版　次	2009年9月第1版
印　张	18.25	印　次	2009年9月第1次印刷
字　数	340 000	定　价	29.10元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　28029-00

前　言

数理统计是以概率论为基础,研究随机现象统计规律性的一门数学学科,在物理、化学、生物学等现代科学的许多领域以及工业、农业、管理、经济等许多方面有着广泛的应用。

本书是在作者多年教学实践中所编写过的多种版本的数理统计教材的基础上,本着厚基础、重应用的原则,经过反复修改后编写而成的。采用低起点、逐步深入的编写原则,读者只要具备高等数学、线性代数和概率论的初步知识就可以学习本书。

本书着重介绍数理统计的基本概念、基本原理和基本方法,介绍在某些实际问题中的应用。第一章是预备知识,介绍概率论基本知识,第二章至第六章讲述数理统计的内容,第七章是随机过程简介。书中例题和习题都比较丰富,其中包括大量应用题。为了便于学习,书后附有习题参考答案和常用分布表。

本书是吉林大学研究生立项教材,可作为研究生公共数学“数理统计”课程的教学用书,也可作为本科生学习概率论与数理统计课程的参考书。

书中内容共七章,第一章和附录由王彩玲编写,第二章和第三章由李忠范编写,第四章和第五章由杨荣编写,第六章和第七章由高文森编写。

由于编者水平有限,书中可能会出现一些错误和不足之处,诚恳希望使用本书的同行和广大读者批评指正。

编　者

2008 年 9 月

目　　录

第一章　概率论基本知识

概率论、数理统计及随机过程是研究随机现象客观规律性的数学学科，在工农业生产、工程技术、自然科学和社会科学等各领域、各个学科中有着广泛的应用. 本章简要复习概率论中的一些基本概念和基本理论，作为学习数理统计及随机过程的基础.

第一节　随机事件及其概率

一、随机事件及其运算

1. 随机试验

随机试验是概率论的一个基本概念，如果一个试验具有以下特点：

(1) 可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，事先可以明确知道试验的所有可能结果；

(3) 在进行一次试验之前不能确定会出现哪一个结果，

则称此试验为**随机试验**，简称为**试验**，用 E 来表示，今后我们所说的试验，都是指随机试验.

2. 基本空间与随机事件

随机试验 E 的所有可能结果的集合称为这个试验的**基本空间**或**样本空间**，记为 Ω. 基本空间 Ω 中满足某些性质的子集称为 E 的**随机事件**，简称**事件**，用 A，B，C 等表示. 随机试验 E 的每一个直接的可能结果都称为**基本事件**或**样本点**，记为 ω (或 e)，于是 $\Omega = \{\omega\}$. 在一次试验中某一随机事件 A 发生，当且仅当这一随机事件(子集) A 中的一个基本事件(样本点)出现.

基本空间 Ω 作为 Ω 的子集，包含了所有的基本事件，因此随机事件 Ω 在每次试验中一定发生，称为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 不包含任何基本事件，也作为 Ω 的子集，因此随机事件 $\varnothing$ 在每次试验中一定不发生，称为**不可能事件**.

3. 事件间的关系与事件的运算

设试验 E 的基本空间为 $\Omega, A, B, A_k (k = 1, 2, \cdots)$ 是 E 中的事件.

1° 包含　如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 B **包含**事件 A,记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

2° 相等　如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ 同时成立,则称事件 A 与事件 B **相等**,记作 $A = B$.

3° 事件的并　如果事件 A 与事件 B 至少有一个发生,则称这样的一个事件为事件 A 与事件 B 的**并**,记作 $A \cup B$. 显然有

$$A \cup A = A, \quad A \cup \varnothing = A, \quad A \cup \Omega = \Omega.$$

4° 事件的交　如果事件 A 与事件 B 同时发生,这样的事件称为事件 A 与事件 B 的**交**,记作 $A \cap B$ 或 AB. 显然有

$$A \cap A = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing, \quad A \cap \Omega = A.$$

事件的并或事件的交可以推广到有限多个事件的情形:$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 表示事件"n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个事件发生";$A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 表示事件"n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生".

有时要考虑可列无穷多个事件的并或交:$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 表示事件"$A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$ 这些事件中至少有一个事件发生";$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 表示事件"$A_1, A_2, \cdots, A_k, \cdots$ 这些事件同时发生".

5° 事件的差　如果事件 A 发生而事件 B 不发生,则称这一事件为事件 A 与事件 B 的**差**,记作 $A - B$.

6° 互不相容　如果事件 A 与事件 B 不能同时发生,即 $AB = \varnothing$,则称事件 A 与事件 B **互不相容**或**互斥**.

7° 对立　如果事件 A 与事件 B 有且仅有一个发生,即 $A \cup B = \Omega$,且 $AB = \varnothing$,则称事件 A 与事件 B 为**对立事件**或**互逆事件**,记作 $A = \bar{B}$ 或 $B = \bar{A}$.

事件的运算满足下述规则:

(1) 交换律　$A \cup B = B \cup A$;$AB = BA$.

(2) 结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

$(AB)C = A(BC)$.

(3) 分配律　$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;

$(A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C)$.

(4) 对偶律　$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$;$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

二、概率

1. 概率的统计定义

设 E 为随机试验，A 为 E 中的事件，在相同的条件下将 E 重复做 n 次，把事件 A 发生的次数记为 n_A，称为**频数**，比值 n_A/n 称为事件 A 发生的**频率**. 当 n 很大时，频率稳定地在某一常数 p 附近摆动，常数 p 称为事件 A 发生的**概率**，记作 $P(A) = p$. 当 n 很大时，可用频率 n_A/n 作为概率 $P(A)$ 的近似值.

2. 古典概率

如果一个随机试验的基本空间只有有限个基本事件，且每个基本事件发生的可能性相同，则称此试验为**古典概型**或**等可能概型**. 设一古典概型的基本空间 Ω 包含 n 个基本事件，事件 A 包含 k 个基本事件，则称比值 k/n 为事件 A 的**概率**，记作 $P(A)$，即 $P(A) = \dfrac{k}{n}$，这样定义的概率称为**古典概率**.

3. 几何概率

如果一个试验相当于从直线上的某一区间（或者是从平面或空间的某一区域）D 上任取一点，而所取的点位于 D 中任意两个长度相等的子区间（或者是面积或体积相等的子区域）内的可能性是一样的，则称此试验为**几何概型**. 对于任何子区间（或者是平面上有面积或空间中有体积的子区域）$A \subset D$，我们定义事件"任取一点位于区间（或区域）A 内"（仍然用 A 表示这一事件），A 的概率为

$$P(A) = \frac{A\text{ 的长度（或者是面积或体积）}}{D\text{ 的长度（或者是面积或体积）}},$$

这样定义的概率称为**几何概率**.

4. 概率的公理化定义

1° 事件域　设 Φ 是由随机试验 E 的基本空间 Ω 的一些子集构成的集合，如果集合 Φ 满足如下条件：

(1) $\Omega \in \Phi$；

(2) 如果 $A \in \Phi$，则 $\bar{A} \in \Phi$；

(3) 如果 $A_i \in \Phi\ (i = 1,2,\cdots)$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \Phi$，

则称 Φ 为 **σ - 域**或 **σ - 代数**，此时也称 Φ 为**事件域**. Φ 中的元素即为事件. 由于 $\Omega \in \Phi$，则 $\varnothing \in \Phi$，Ω 是必然事件，$\varnothing$ 是不可能事件.

2° 概率　设 Ω 为基本空间，Φ 是关于 Ω 的事件域，对于每一事件 $A \in \Phi$，定义实值函数 $P(A)$，如果这个函数满足条件：

(1) 对于每一事件 $A \in \Phi$，有 $P(A) \geqslant 0$；

(2) $P(\Omega) = 1$；

(3) 对于任意 $A_i \in \Phi, A_iA_j = \varnothing (i \neq j; i,j = 1,2,\cdots)$，总有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称定义在 Φ 上的实值函数 P 为**概率**，$P(A)$ 称为**事件 A 的概率**.

设试验 E 的基本空间为 Ω，事件域为 Φ，概率为 P，称三元组 (Ω, Φ, P) 为一个**概率空间**.

5. 概率的性质

(1) $P(\varnothing) = 0$.

(2) 对于任意事件 A，有 $P(A) \leqslant 1$.

(3) 对于任意事件 A，有 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

(4) 对于任意两个事件 A 和 B，有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

上式称为概率的**加法公式**. 如果 $AB = \varnothing$，则有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

一般的，对于任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n).$$

(5) 对于任意两个事件 A 和 B，有

$$P(A - B) = P(A) - P(AB).$$

如果 $B \subset A$，则有

$$P(A - B) = P(A) - P(B).$$

三、条件概率

1. 条件概率

设有两个事件 A 和 B，$P(B) > 0$，称 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 为在事件 B 已经发生的条件下，事件 A 发生的**条件概率**，记作 $P(A \mid B)$，即

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

类似的，当 $P(A) > 0$ 时，可以定义

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

2. 乘法定理

对于两个事件 A 和 B，如果 $P(B) > 0$，则有

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B),$$

如果 $P(A)>0$, 则有

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A).$$

一般的,设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 $n(n\geqslant 2)$ 个事件,且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$, 则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_{n-1}\mid A_1A_2\cdots A_{n-2})P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

3. 全概率公式

设 Ω 为试验 E 的基本空间, $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为一组事件,如果 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$, 且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$, 则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为基本空间 Ω 的一个**划分**或**完备事件组**.

设 Ω 为试验 E 的基本空间,如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 Ω 的一个划分,且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$, 则对于任一事件 B, 有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i),$$

上式称为**全概率公式**.

4. 贝叶斯(Bayes)公式

设试验 E 的基本空间为 Ω, 如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 Ω 的一个划分,且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$, 则对于任一事件 $B(P(B)>0)$, 有

$$P(A_k\mid B)=\frac{P(A_k)P(B\mid A_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)},\quad k=1,2,\cdots,n,$$

此式称为**贝叶斯公式**.

四、事件的独立性

1. 两个事件的独立性

如果两个事件 A 和 B 满足条件

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

则称 事件 A 与 B **相互独立**.

如果 $P(A)>0$(或 $P(B)>0$),则事件 A 和 B 相互独立的充分必要条件是 $P(B\mid A)=P(B)$(或 $P(A\mid B)=P(A)$).

A 与 B 相互独立 $\Leftrightarrow A$ 与 $\bar{B}$ 相互独立 $\Leftrightarrow\bar{A}$ 与 B 相互独立 $\Leftrightarrow\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 相互独立.

2. $n(n\geqslant 3)$ 个事件的独立性

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件,如果对于任意 i 和 $j(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$ 都有

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j),$$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **两两相互独立**；如果对于任意正整数 $k(1<k\leqslant n)$ 和任意 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **相互独立**.

五、伯努利(Bernoulli)概型及二项概率公式

设试验 E 只有两个可能结果：A 及 $\bar{A}$，且 $P(A)=p,P(\bar{A})=1-p(0<p<1)$. 将试验 E 重复独立地进行 n 次，则称这一串重复的独立试验为 **n 重伯努利试验**，简称**伯努利概型**.

在 n 重伯努利试验中，事件 A 发生 $k(0\leqslant k\leqslant n)$ 次的概率 $P_n(k)$ 可由下面的公式求得

$$P_n(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k},$$

$$k=0,1,2,\cdots,n,$$

这个公式称为**二项概率公式**.

在 n 重伯努利试验中，事件 A 至少发生一次的概率为

$$P_n(k\geqslant 1)=1-(1-p)^n.$$

第二节　随机变量及其概率分布

一、随机变量及其分布函数

1. 随机变量

设在随机试验 E 的基本空间 $\Omega=\{\omega\}$ 上定义一个实值函数 $X=X(\omega),\omega\in\Omega$，则称 X 为**随机变量**.

对于随机变量，通常按离散型或连续型这两类进行讨论.

2. 随机变量的分布函数

设 X 是一个随机变量，x 是任意实数，称函数

$$F(x)=P\{X\leqslant x\},\quad -\infty<x<+\infty$$

为随机变量 X 的**分布函数**.

随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 就是事件“X 在区间 $(-\infty,x]$ 内取值”的概率.

3. 分布函数 $F(x)$ 的性质

(1) $F(x)$ 是一个单调不减函数.

(2) 对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $0\leqslant F(x)\leqslant 1$，且

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,$$

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1.$$

(3) $F(x)$ 处处右连续,即 $F(x^+)=F(x)$.

(4) 对于任意常数 $a,b(a<b)$,有 $P\{a<X\leqslant b\}=F(b)-F(a)$.

二、离散型随机变量及其概率分布

1. 离散型随机变量

如果一个随机变量的可能取值是有限个或可列无穷多个,则称这样的随机变量为**离散型随机变量**.

2. 离散型随机变量的概率分布

设离散型随机变量 X 所有可能取值为 $x_k(k=1,2,\cdots)$,X 取各可能值的概率为

$$P\{X=x_k\}=p_k,\quad k=1,2,\cdots,$$

其中 $p_k\geqslant0(k=1,2,\cdots)$,$\sum_{k=1}^{\infty}p_k=1$,则称上式为离散型随机变量 X 的**概率分布**或**分布律**.

离散型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\sum_{x_k\leqslant x}P\{X=x_k\},$$

$F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内除 X 可能取的值 $x_k(k=1,2,\cdots)$ 外是处处连续的. 如果已知离散型随机变量 X 的分布函数 $F(x)$,则对于任意实数 $a,b(a<b)$,有

$$P\{a<X\leqslant b\}=\sum_{a<x_k\leqslant b}P\{X=x_k\},$$

$$P\{X=a\}=F(a)-F(a^-).$$

3. 常用的离散型随机变量

1° (0-1)分布　设随机变量 X 只可能取 0 与 1 两个值,它的概率分布为

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},\quad k=0,1,\quad 0<p<1,$$

称 X 服从参数为 p 的**(0-1)分布**,记为 $X\sim(0-1)$.

2° 二项分布　设在 n 重伯努利试验中,事件 A 在任意一次试验中发生的概率都为 $p(0<p<1)$,则事件 A 发生的次数 X 可能取的值为 $0,1,2,\cdots,n$,X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n,$$

称随机变量 X 服从参数为 n,p 的**二项分布**,记为 $X\sim B(n,p)$.

3° 泊松(Poisson)分布　设随机变量 X 所有可能取的值为 $0,1,2,\cdots$, 而 X

取各可能值的概率为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots,$$

其中 $\lambda>0$ 是常数,称随机变量 X 服从参数为 λ 的**泊松分布**,记为 $X\sim P(\lambda)$.

泊松定理 设 $\lambda>0$ 为常数,n 为任意正整数,记 $np_n=\lambda$,则对于任意取定的非负整数 k,有

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

根据泊松定理,当 n 很大而 p 很小时,有近似计算公式:

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

其中 $\lambda=np$.

4° 几何分布 设试验 E 只有两个可能的结果 A 及 $\bar{A}$,且

$$P(A)=p,\quad P(\bar{A})=1-p\quad(0<p<1),$$

将试验 E 重复独立地进行下去,直到事件 A 发生为止,所需的试验次数 X 可能取的值是 $1,2,3,\cdots$,它的概率分布为

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p,\quad k=1,2,\cdots,$$

称随机变量 X 服从参数为 p 的**几何分布**.

5° 超几何分布 设随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},\quad k=0,1,2,\cdots,n,$$

其中 M,N,n 都是正整数,且 $n\leqslant M\leqslant N$,称随机变量 X 服从**超几何分布**.

三、连续型随机变量及其概率密度

1. 连续型随机变量及其概率密度的定义

设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$,如果存在非负可积函数 $f(x)$,使得对任意实数 x,都有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt,$$

则称 X 为**连续型随机变量**,称 $f(x)$ 为 X 的**分布密度**或**概率密度**.

2. 连续型随机变量及其概率密度的性质

(1) $f(x)\geqslant 0$.

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=1$.

(3) 对于任意常数 a, $P\{X=a\}=0$.

(4) 如果 $f(x)$ 在点 x 处连续,则有 $f(x)=F'(x)$.

(5) 对于 $a\leqslant b$,有 $P\{a<X\leqslant b\}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

3. 常用的连续型随机变量

1° 均匀分布　如果随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则称 X 在区间 (a,b) 上服从**均匀分布**,记为 $X\sim U(a,b)$,其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b,\\ 1, & b\leqslant x.\end{cases}$$

2° 指数分布　如果随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$ 是常数,则称 X 服从参数为 λ 的指数分布,其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

3° 正态分布　如果随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<+\infty,$$

其中 $\sigma>0$ 及 μ 均为常数,则称 X 服从参数为 μ,σ 的**正态分布**,记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,也称 X 为**正态随机变量**. 特别,当 $\mu=0,\sigma=1$ 时,称 X 服从**标准正态分布**,即 $X\sim N(0,1)$. 标准正态随机变量的概率密度和分布函数分别用 $\varphi(x)$ 和 $\Phi(x)$ 表示,即

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t.$$

对于实数 x, 标准正态分布函数值 $\Phi(x)$ 可由书后附表 1 查得.

概率密度 $y=\varphi(x)$ 是偶函数,其图形关于 y 轴对称,从而有

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x).$$

对于任意正的实数 a, 有

$$P\{|X|>a\}=2[1-\Phi(a)],$$

$$P\{|X| \leqslant a\} = 2\Phi(a) - 1.$$

设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，其分布函数为 $F(x)$，则有

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

$$P\{a < X \leqslant b\} = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

设 $X \sim N(0,1)$，α 为常数（$0 < \alpha < 1$），如果数 u_α 满足条件

$$P\{X > u_\alpha\} = \alpha,$$

则称点 u_α 为标准正态分布的**上 α 分位点**. u_α 值可利用关系式

$$\Phi(u_\alpha) = 1 - \alpha,$$

由标准正态分布表（附表 1）查得.

标准正态分布的上 α 分位点 u_α 具有性质

$$u_{1-\alpha} = -u_\alpha.$$

4° Γ 分布　如果随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\Gamma(\alpha)}(\beta x)^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

其中 $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\ (\alpha > 0)$ 为 Γ 函数，则称 X 服从参数为 α,β 的 **Γ 分布**，记为 $X \sim \Gamma(\alpha,\beta)$.

四、随机变量的函数的分布

1. 离散型随机变量函数的概率分布

设 X 是离散型随机变量，其概率分布为

$$P\{X = x_k\} = p_k,\quad k = 1,2,\cdots,$$

则随机变量 X 的函数 $Y = g(X)$ 取值 $g(x_k)$ 的概率为

$$P\{Y = g(x_k)\} = p_k,\quad k = 1,2,\cdots.$$

如果函数值 $g(x_k)$ 中有相同的数值，则将它们相应的概率之和作为随机变量函数 $Y = g(X)$ 取 $g(x_k)$ 的概率，就可以得到 $Y = g(X)$ 的概率分布.

2. 连续型随机变量函数的概率密度

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)$，函数 $y = g(x)$ 在 $f_X(x)$ 取非零值的区间上处处可导且单调，其值域为 (α,β)，$h(y)$ 为其反函数，则随机变量 X 的函数 $Y = g(X)$ 是一个连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]\,|h'(y)|, & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

设 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，则 X 的线性函数 $Y = aX + b\ (a \neq 0)$ 也服从正态分布，且

$$Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2).$$

特别，取 $a = \dfrac{1}{\sigma}, b = -\dfrac{\mu}{\sigma}$，则有

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1).$$

第三节　多维随机变量及其概率分布

一、二维随机变量及其分布函数和边缘分布函数

1. 二维随机变量的概念

设 $X = X(\omega), Y = Y(\omega)$ 是定义在基本空间 $\Omega = \{\omega\}$ 上的两个随机变量，则称向量 (X,Y) 为**二维随机变量**或**二维随机向量**.

2. 二维随机变量的分布函数

设 (X,Y) 是二维随机变量，x 和 y 是任意实数，称二元函数

$$F(x,y) = P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty$$

为二维随机变量 (X,Y) 的**分布函数**或随机变量 X 和 Y 的**联合分布函数**.

3. 二维随机变量分布函数的性质

(1) $F(x,y)$ 分别对于变量 x 和 y 单调不减.

(2) 对于任意 $x \in (-\infty, +\infty)$ 和 $y \in (-\infty, +\infty)$，有

$$0 \leqslant F(x,y) \leqslant 1,$$

$$F(-\infty, y) = \lim_{x \to -\infty} F(x,y) = 0,$$

$$F(x, -\infty) = \lim_{y \to -\infty} F(x,y) = 0,$$

$$F(-\infty, -\infty) = \lim_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F(x,y) = 0,$$

$$F(+\infty, +\infty) = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x,y) = 1.$$

(3) $F(x,y)$分别关于变量 x 和 y 右连续，即

$$F(x^+, y) = F(x,y), \quad F(x, y^+) = F(x,y).$$

(4) 随机点 (X,Y) 落在矩形域

$$\{(x,y) \mid x_1 < x \leqslant x_2, y_1 < y \leqslant y_2\}$$

内的概率为

$$\begin{aligned} &P\{x_1 < X \leqslant x_2, y_1 < Y \leqslant y_2\} \\ &= F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1,y_1). \end{aligned}$$

4. 边缘分布函数

设二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$，函数