



# 重难点手册

- ★四千万学子的制胜宝典
- ★八省市名师的在线课堂
- ★十六年书业的畅销品牌

新课标

配人教版

## 九年级数学(上册)

蔡上鹤 主审

汪江松 主编



## 汪江松

### 教授(编审)

《中学数学》杂志主编, 湖北大学硕士研究生导师, 湖北省奥林匹克学校校长, 中国优选法统筹法研究会理事, 全国初等数学研究会副理事长, “希望杯”全国数学邀请赛组委会常委, 湖北省科技期刊专家委员会委员, 湖北省中学教师培训专家库成员, 华中师范大学出版社特聘作者。长期从事数学教学和数学教育研究工作。出版有《初高中数学重难点手册》(该丛书出版14年来多次荣获优秀畅销书奖)、《高中数学解题方法与技巧》、《趣味数学》(丛书)、《几何明珠》、《成功数学新捷径(初中)》、《初中数学竞赛讲座》等著作40余部。在《数学通报》、《数学教育学报》、《湖北大学学报》、《山东教育》、《编辑学刊》、《科学进步与对策》、《中学数学》、《数学通讯》等20余家刊、报上发表论文50余篇, 其中多篇论文被全文转载或获得湖北省数学学会优秀论文奖和湖北大学科研奖。

H  
Z  
S  
F  
D  
X  
C  
B  
S

#### 《超级课堂》同步专题系列

数学(必修1、2、3、4、5)  
数学(选修2-1)  
数学(选修2-2)  
数学(选修2-3)  
物理(必修1、2)  
物理(选修3-1)  
物理(选修3-2)  
物理(选修3-3)  
物理(选修3-4)  
物理(选修3-5)  
化学(必修1、2)  
化学(物质结构与性质)  
化学(化学反应原理)  
化学(有机化学基础)  
化学(实验、技术与生活)  
生物(必修1、2、3)  
地理(必修1、2、3)

#### 《超级课堂》培优竞赛系列

数学(七、八、九年级)  
物理(八、九年级)  
英语(七、八、九、十、十一、十二)  
英语(八、九、十、十一、十二)  
英语(九、十、十一、十二)  
化学(九、十、十一、十二)

#### 《重难点手册》高中新课标版部分

数学(必修1、2、3、4、5/人教A版)  
数学(选修2-1、2-2、2-3/人教A版)  
数学(必修1、2、3、4、5/苏教版)  
数学(选修2-1、2-2、2-3/苏教版)  
数学(必修1、2、3、4、5/北师大版)  
数学(选修2-1、2-2、2-3/北师大版)  
物理(必修1、2/粤教版)  
物理(必修1、2/人教版)  
物理(选修3-1、3-2、3-3、3-4、3-5/人教版)  
化学(必修1、2/鲁科版)  
化学(必修1、2/人教版)  
化学(选修3 物质结构与性质/人教版)  
化学(选修4 化学反应原理/人教版)  
化学(选修5 有机化学基础/人教版)  
化学(选修6 实验化学/人教版)  
化学(必修1、2/苏教版)  
化学(选修3 物质结构与性质/苏教版)  
化学(选修4 化学反应原理/苏教版)  
化学(选修5 有机化学基础/苏教版)  
化学(选修6 实验化学/苏教版)  
生物(必修1、2、3/人教版)

#### 《重难点手册》初中新课标版部分

数学(七年级上册/人教版)  
数学(七年级下册/人教版)  
数学(八年级上册/人教版)  
数学(八年级下册/人教版)  
数学(九年级上册/人教版)  
数学(九年级下册/人教版)  
英语(七年级上册/人教版)  
英语(七年级下册/人教版)  
英语(八年级上册/人教版)  
英语(八年级下册/人教版)  
英语(九年级全一册/人教版)  
物理(八年级上册/人教版)  
物理(八年级下册/人教版)  
物理(九年级全一册/人教版)  
化学(九年级上册/人教版)  
化学(九年级下册/人教版)

#### 《初中数学竞赛同步辅导》

七年级数学竞赛同步辅导  
八年级数学竞赛同步辅导  
九年级数学竞赛同步辅导

ISBN 978-7-5622-3925-3

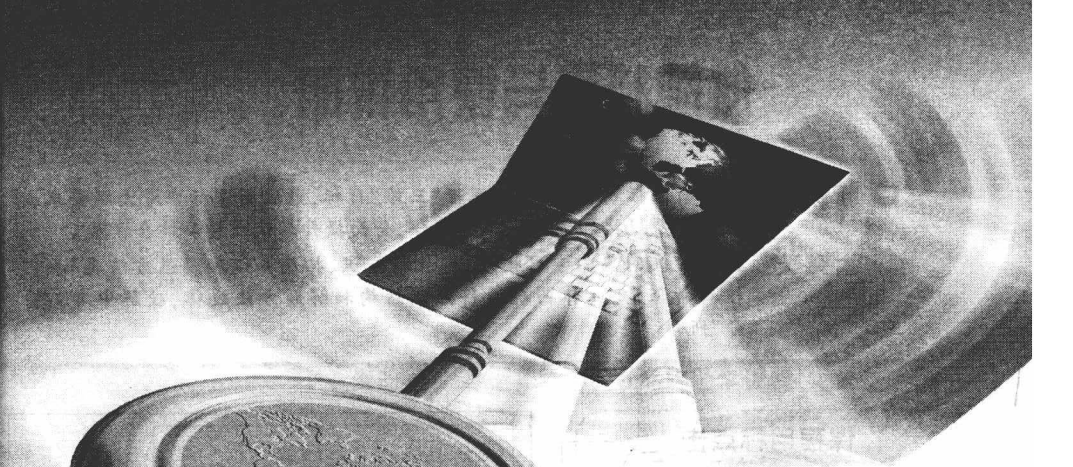


9 787562 239253 >

定价: 17.50元

责任编辑/肖 颖  
责任校对/罗 艺  
封面设计/新视点





# 重难点手册

配人教版

## 九年级数学(上册)

主 审 蔡上鹤

主 编 汪江松

★四千万学子的制胜宝典  
★八省市名师的在线课堂  
★十六年书业的畅销品牌



华中师范大学出版社

# 新出图证(鄂)字 10 号

## 图书在版编目(CIP)数据

重难点手册——九年级数学(上册)(配人教版)/汪江松 主编. —3 版.

—武汉:华中师范大学出版社,2009.8

ISBN 978-7-5622-3925-3

I. 重… II. 汪… III. 数学课—初中—教学参考资料

IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 051638 号

## 重难点手册——九年级数学(上册)(配人教版)

主编:汪江松

责任编辑:肖颖 责任校对:罗艺

封面设计:新视点

选题设计:第一编辑室(027-67867361)

出版发行:华中师范大学出版社 ©

社址:湖北省武汉市珞喻路 152 号

邮编:430079

销售电话:027-67863040

027-67867371

027-67867076

传真:027-67863291

邮购:027-67861321

网址:<http://www.ccnapress.com>

电子信箱:hscbs@public.wh.hb.cn

印刷:湖北恒泰印务有限公司

督印:章光琼

字数:336 千字

开本:880mm×1230mm 1/32

印张:10.75

版次:2009 年 6 月第 3 版

印次:2009 年 8 月第 2 次印刷

定价:17.50 元

欢迎上网查询、购书

敬告读者:为维护著作人的合法权益,并保障读者的切身利益,本书封面采用压纹制作,压有“华中师范大学出版社”字样及社标,请鉴别真伪。若发现盗版书,请打举报电话 027-67861321。

# 体例特色与使用说明

- **新课标:** 贯彻新课标精神,定位新课标“三维”目标,贴近新课标中考大纲要求,注重学习规律和考试规律的整合,全面提升考试成绩和综合素质。
- **大突破:** 突破传统的单向学习模式,将教材知识、拓展知识和隐性方法类知识植入新课堂,立体凸现学科知识结构和解题方法规律,破解中考“高分”瓶颈。

## 课程目标点击

全面展示每课(节)的“知识与技能、过程与方法以及情感态度与价值观”三位一体的目标要求,使同学们明确努力的方向和应达到的程度,便于自我评价和相互评价。

## 重点难点突破

把握学生思维情感的发展脉络,恰到好处地指出每课(节)的重点、难点与疑点,各个击破,扫清学生学习中的一切障碍,全力提高学生的学习效率。

## 方法技巧点拨

精选典型例题,通透讲解,并从中总结解题方法与技巧,点拨解题规律,启发学生思维,使学生深刻透彻地把握知识结构,培养学生灵活运用知识的能力。

## 中考真题链接

多角度深入剖析各类考题,加深学生对所学知识的理解,激发学生深入探究学习的兴趣。



## 第二十一章

### 三次根式

#### 21.1 二次根式

##### 课程目标点击

1. 理解二次根式的意义,会根据二次根式的概念求字母的二次根式的取值范围。
2. 理解并掌握算术平方根的意义,会根据算术平方根的概念求算术平方根。
3. 了解代数式的意义。
4. 通过二次根式的学习,了解二次根式在日常生产、生活中的广泛应用。

##### 重点难点突破

###### 1. 对二次根式概念的理解

教材中指出,我们把形如 $\sqrt{a}$ 的式子叫做二次根式。

这里要注意三点:一是二次根式的被开方数必须非负( $a \geq 0$ );二是二次根式 $\sqrt{a}$ 的算术平方根(正数 $a$ 的正的平方根 $\sqrt{a}$ 为算术平方根, $0$ 的算术平方根是 $0$ );三是被开方数的定义知 $(\sqrt{a})^2 = a$  ( $a \geq 0$ )。

**注意** 式子 $\sqrt{a}$ 不一定有意义,当 $a < 0$ 时, $\sqrt{a}$ 无意义,判断 $\sqrt{a}$ 是否有意义,关键是看被开方数 $a$ 是否为非负数。

##### 方法技巧点拨

###### 1. 运用二次根式的两个非负性解题

**例** 当 $x$ 为何值时,代数式 $\sqrt{x+3}$ 有意义?

**解** 二次根式的被开方数为非负数,代数式中分母不能等于 $0$ 。

**解** 对二次根式 $\sqrt{x+3}$ 来说, $x+3 \geq 0$ 。则分式来说, $x-2 \neq 0$ ,即

$$\begin{cases} x+3 \geq 0, \\ x-2 \neq 0. \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} x \geq -3, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

故当 $x \geq -3$ 且 $x \neq 2$ 时,代数式 $\sqrt{x+3}$ 有意义。

##### 中考真题链接

**例** (2008·广州) 实数 $a, b$ 在数轴上的位置如图 21-1-1 所示,化简 $\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2} - \sqrt{(a-b)^2}$ 。

**解** 由数轴知 $a < 0, b > 0$ , 且 $a < b$ 。

**解**  $\because a < 0, \therefore |a| = -a$ 。  $\because b > 0, \therefore |b| = b$ 。

$\because a < b < 0, \therefore |a-b| = -(a-b) = -a + b = b - a$ 。

$\therefore$  原式 $= |a| - |b| - |a-b| = -a - b - [-(a-b)] = -a - b + a - b = -2b$ 。

**例** (泰州中考) 若代数式 $\sqrt{(2-a)^2} + \sqrt{(a-4)^2}$ 的值是常数 $2$ , 则 $a$ 的取值范围是( )。

- (A)  $a \geq 4$  (B)  $a \leq 2$   
(C)  $2 \leq a \leq 4$  (D)  $a = 2$  或  $a = 4$

**解** 对于选择题可以有试探法。若用化简的方法, 去掉根号后绝对值内的代数式的正负性要进行讨论。

# ——新课标《数学重难点手册》新突破

- **讲实用：**完全同步于新教材，导—学—例—训四位一体，落实课程内容目标和考纲能力要求，揭密中考解题依据和答题要求，破解重点难点。
- **大品牌：**十多年的知名教辅品牌，一千多万学子全程参与，十余万名一线教师的倾力实验，堪称学习规律与考试技术深度融合的奇迹，缔造着使用效果显著、发行量惊叹的神话。



## 探究创新拓展

**例图** (应用材料) 已知实数  $x, y, a$  满足  $\sqrt{x+y-8} + \sqrt{8-x-y} = \sqrt{3x-y-a} + \sqrt{x-2y+a+3}$ ，试问长度为  $x, y, a$  的三条线段能否组成一个三角形？如果能，求出该三角形的面积；如果不能，请说明理由。

**思维点拨** 运用二次根式的两个非负性求解。

**解** 由根式的意义可得  $\begin{cases} x+y-8 \geq 0, \\ 8-x-y \geq 0, \end{cases} \therefore x+y=8.$

当  $x+y=8$  时，

原式变形为  $\sqrt{3x-y-a} + \sqrt{x-2y+a+3} = 0.$

根据非负数的性质可得  $\begin{cases} 3x-y-a=0, \\ x-2y+a+3=0, \end{cases}$

联立方程组可解得  $x=3, a=4, y=5.$



## 三级题型测试

### 夯实基础

- (2008·连云港) 如果  $\sqrt{x-1}$  有意义，那么字母  $x$  的取值范围是( )。  
(A)  $x \geq 1$  (B)  $x > 1$  (C)  $x \leq 1$  (D)  $x < 1$
- (2008·武汉) 计算  $\sqrt{4}$  的结果是( )。  
(A) 2 (B)  $\pm 2$  (C) -2 (D) 4

### 能力提升

- (2008·北京) 若  $|x+2| + \sqrt{y-3} = 0$ ，则  $xy$  的值为( )。  
(A) -8 (B) -6 (C) 5 (D) 6
- (盐城中考题) 若数轴上表示数  $x$  的点在原点的左边，则化简  $|3x + \sqrt{x^2}|$  的结果是( )。  
(A)  $-4x$  (B)  $4x$  (C)  $-2x$  (D)  $2x$

### 探索拓展

- 将  $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$  化简成  $a+b\sqrt{3}$  的形式。
- (宁波中考题) 已知  $a < 0$ ，化简：  
$$\sqrt{4 - \left(a + \frac{1}{a}\right)} - \sqrt{4 - \left(a - \frac{1}{a}\right)}.$$

## 探究创新拓展

体现特色栏目的全新面貌，融入新课程的全新理念，给出具有探究性的命题，为学生提供自主探索、相互交流的专有平台。

## 三级题型测试

立足于消化教材，注重基本题型的训练，以中档题为出发点，帮助同学们更深刻地领会相应知识点，逐步养成灵活的解题能力和应用能力，并精心挑选了少量高考拔高题与奥数题，使学生在收到立竿见影的学习效果的同时，体验到探究创新的广阔空间。

## 章末测试平台

选择新颖、典型、难度适中的试题进行检测，引领主干知识，使您在考试中立于不败之地！

## 答案详解与提示

附有能力训练与提升题和各单元综合评价测试题的参考答案，并对全部的试题给出了提示和解答过程。

## 第二十一章测试平台

(满分 120 分)

### 一、选择题 (每小题 4 分，共 40 分)

- 下列各式计算正确的有( )。  
(1)  $\sqrt{(-2)^2 - 3} = \sqrt{-2 \times \sqrt{3}} = 1$  (2)  $\sqrt{16+9} = \sqrt{16} + \sqrt{9}$   
(3)  $\sqrt{5 \frac{1}{4}} = 5 \times \sqrt{\frac{1}{4}}$  (4)  $\sqrt{\frac{9}{2}} = 3 \sqrt{2}$   
(A) 3 个 (B) 2 个 (C) 1 个 (D) 0 个
- 下列各式计算正确的是( )。  
(A)  $\sqrt{2^2 + 3^2} = 2 + 3$  (B)  $3\sqrt{2} + 5\sqrt{3} = 8\sqrt{6}$   
(C)  $\sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{15+12} \times \sqrt{15-12}$  (D)  $\sqrt{4 \frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{1}{2}}$



## 参考答案

## 与提示

### 第二十一章 二次根式

#### 21.1 二次根式

- A 2. A 3. B
- C [提示:  $a \geq 0$ .]
- D
- 二次根式有  $\sqrt{2}, \sqrt{1+m^2}, \sqrt{6}, \sqrt{1-2x^2}$ . 原因是: 二次根式的被开方数为非负数，且根指数为 2.

## 《数学重难点手册》编委会

主 编 汪江松

编 者 汪江松

李青山

胡红芳

周 鹏

桂文通

刘 军

汪 丹

徐 斌

刘 芸

冯天芳

胡燕丽

袁 雯

齐凤玲

舒清芳

陈留闯

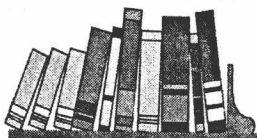
# 目 录

|                        |       |
|------------------------|-------|
| 第二十一章 二次根式 .....       | (1)   |
| 21.1 二次根式 .....        | (1)   |
| 21.2 二次根式的乘除 .....     | (7)   |
| 21.3 二次根式的加减 .....     | (16)  |
| 第二十一章测试平台 .....        | (23)  |
| 第二十二章 一元二次方程 .....     | (26)  |
| 22.1 一元二次方程 .....      | (26)  |
| 22.2 降次——解一元二次方程 ..... | (32)  |
| 22.2.1 配方法 .....       | (32)  |
| 22.2.2 公式法 .....       | (40)  |
| 22.2.3 因式分解法 .....     | (50)  |
| 22.3 实际问题与一元二次方程 ..... | (60)  |
| 第二十二章测试平台 .....        | (72)  |
| 第二十三章 旋转 .....         | (76)  |
| 23.1 图形的旋转 .....       | (76)  |
| 23.2 中心对称 .....        | (94)  |
| 23.3 课题学习 图案设计 .....   | (106) |
| 第二十三章测试平台 .....        | (117) |
| 第二十四章 圆 .....          | (122) |
| 24.1 圆 .....           | (122) |
| 24.1.1 圆 .....         | (122) |
| 24.1.2 垂直于弦的直径 .....   | (131) |
| 24.1.3 弧、弦、圆心角 .....   | (143) |





|                         |       |
|-------------------------|-------|
| 24.1.4 圆周角 .....        | (152) |
| 24.2 与圆有关的位置关系 .....    | (164) |
| 24.2.1 点和圆的位置关系 .....   | (164) |
| 24.2.2 直线和圆的位置关系 .....  | (171) |
| 24.2.3 圆和圆的位置关系 .....   | (187) |
| 24.3 正多边形和圆 .....       | (201) |
| 24.4 弧长和扇形面积 .....      | (211) |
| 24.4.1 弧长和扇形面积 .....    | (211) |
| 24.4.2 圆锥的侧面积和全面积 ..... | (225) |
| 第二十四章测试平台 .....         | (233) |
| 第二十五章 概率初步 .....        | (237) |
| 25.1 随机事件与概率 .....      | (237) |
| 25.1.1 随机事件 .....       | (237) |
| 25.1.2 概率 .....         | (242) |
| 25.2 用列举法求概率 .....      | (249) |
| 25.3 利用频率估计概率 .....     | (268) |
| 第二十五章测试平台 .....         | (278) |
| 参考答案与提示 .....           | (284) |



## 第二十一章

# 三次根式



## 二次根式



### 课程目标点击

1. 理解二次根式的意义,会根据二次根式的概念求含字母的二次根式的取值范围.
2. 理解并掌握算术平方根的意义,会根据算术平方根的概念作相关计算.
3. 了解代数式的含义.
4. 通过二次根式的学习,了解二次根式在日常生产、生活实际中的广泛应用.



### 重点难点突破

#### 1. 对二次根式概念的理解

教材中指出,我们把形如 $\sqrt{a}(a \geq 0)$ 的式子叫做二次根式.

这里要注意三点:一是二次根式的被开方数必须非负( $a \geq 0$ );二是二次根式 $\sqrt{a}$ 为 $a$ 的算术平方根(正数 $a$ 正的平方根 $\sqrt{a}$ 为算术平方根,0的算术平方根是0),即 $\sqrt{a} \geq 0$ ;三是根据平方根的定义知 $(\sqrt{a})^2 = a(a \geq 0)$ .

**注意**

式子 $\sqrt{-a}$ 不一定无意义.当 $a \leq 0$ 时, $\sqrt{-a}$ 有意义.判断 $\sqrt{-a}$ 是否有意义,关键是看被开方数是否为非负数.

## 2. $\sqrt{a^2}=|a|$ 的解读

无论  $a$  为任何实数,  $a^2 \geq 0$ , 故  $\sqrt{a^2}$  有意义; 又由二次根式的概念知  $\sqrt{a^2}$  为  $a^2$  的算术平方根, 即  $\sqrt{a^2} \geq 0$ , 所以  $\sqrt{a^2}=|a|$ .

一般地,  $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a, & a \geq 0 \text{ 时;} \\ -a, & a < 0 \text{ 时.} \end{cases}$

**例题** 计算  $\sqrt{3^2} + \sqrt{(-3)^2}$ .

**【解】** 原式  $= 3 + |-3| = 6$ .

**注意**  $(\sqrt{a})^2$  与  $\sqrt{a^2}$  不是一回事. 从取值范围上讲,  $(\sqrt{a})^2$  中要求  $a \geq 0$ , 而  $\sqrt{a^2}$  中  $a$  可为一切实数; 从运算结果上讲,  $(\sqrt{a})^2 = a$ ,  $\sqrt{a^2} = |a|$ . 当  $a \geq 0$  时, 两者相等; 当  $a < 0$  时, 前者无意义, 后者等于  $-a$ .

## 3. 代数式的含义

用加、减、乘、除、乘方、开方这些基本运算符号把数和表示数的字母连接起来的式子统称为代数式.

显然, 我们目前所见到的包括二次根式在内的运算式都是代数式, 但稍后学习的三角函数式  $\sin 40^\circ$ ,  $\tan \alpha$  就不在此范围内了.



## 方法技巧点拨

### 1. 运用二次根式的两个非负性解题

**例 1** 当  $x$  为何值时, 代数式  $\frac{\sqrt{x+3}}{x-2}$  有意义?

**思路点拨** 二次根式的被开方数为非负数, 代数式中分母不能等于 0.

**【解】** 对二次根式  $\sqrt{x+3}$  来说,  $x+3 \geq 0$ ; 对分式来说,  $x-2 \neq 0$ , 即

$$\begin{cases} x+3 \geq 0, \\ x-2 \neq 0, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} x \geq -3, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

故当  $x \geq -3$  且  $x \neq 2$  时, 代数式  $\frac{\sqrt{x+3}}{x-2}$  有意义.

**例 2** 若  $|a-2| + \sqrt{b-3} = 0$ , 求  $a^2 - 2b$  的值.

**思路点拨**  $|a| \geq 0, b^2 \geq 0, \sqrt{c} \geq 0$ , 这是常见的非负数. 若几个非负数的和为 0, 则各非负数同时为 0.

**【解】**  $\because |a-2| \geq 0, \sqrt{b-3} \geq 0$ , 要使  $|a-2| + \sqrt{b-3} = 0$ , 只有  $|a-2|$

$=0$  且  $\sqrt{b-3}=0$ , 故得

$$\begin{cases} a-2=0, \\ b-3=0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} a=2, \\ b=3. \end{cases}$$

$$\therefore a^2-2b=2^2-2\times 3=-2.$$

2. 利用  $(\sqrt{a})^2=a(a\geq 0)$  或  $\sqrt{a^2}=|a|$  化简

**例 3** 化简  $\frac{3}{\sqrt{3}}$

**【解法 1】**  $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3})^2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$

**【解法 2】**  $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$

**例 4** 化简  $\sqrt{x^2-2x+1}$ .

**思路点拨** 先运用完全平方式将被开方数进行因式分解, 写成  $\sqrt{a^2}$  的形式, 再对  $a$  的符号进行讨论.

**【解】**  $\sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1, \\ 1-x, & x < 1. \end{cases}$

3. 逆用  $(\sqrt{a})^2=a(a\geq 0)$  作因式分解

**例 5** 在实数范围内分解因式.

(1)  $x^2-5$ . (2)  $x^4-6x^2+9$ .

**思路点拨** 根据  $a=(\sqrt{a})^2$  知, 任何一个非负数都可以写成平方的形式.

**【解】** (1)  $x^2-5=x^2-(\sqrt{5})^2=(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5}).$

(2)  $x^4-6x^2+9=(x^2-3)^2=(x-\sqrt{3})^2(x+\sqrt{3})^2.$



### 中考真题链接

**例 1** (2008·广州) 实数  $a, b$  在数轴上的位置如

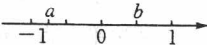


图 21-1-1 所示, 化简  $\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}-\sqrt{(a-b)^2}$ .

图 21-1-1

**思路点拨** 结合数轴判定根号下幂的底数的正负性.

**【解】**  $\because a < 0, \therefore |a| = -a. \because b > 0, \therefore |b| = b.$

$\because a-b < 0, \therefore |a-b| = -(a-b).$

$\therefore \text{原式} = |a| - |b| - |a-b| = -a - b - [-(a-b)] = -a - b + a - b = -2b.$

**例 2** (泰州中考题) 若代数式  $\sqrt{(2-a)^2} + \sqrt{(a-4)^2}$  的值是常数 2, 则  $a$  的取值范围是( ).

(A)  $a \geq 4$

(B)  $a \leq 2$

(C)  $2 \leq a \leq 4$

(D)  $a=2$  或  $a=4$

**思路点拨** 对于选择题可以考虑赋值法. 若采用化简的方法, 对去掉根号后绝对值内的代数式的正负性要进行讨论.

**【解法 1】** (赋值法) 令  $a=5$ , 原式  $= \sqrt{(-3)^2} + \sqrt{1^2} = 4 \neq 2$ , 排除 A;

令  $a=0$ , 原式  $= \sqrt{2^2} + \sqrt{(-4)^2} = 6 \neq 2$ , 排除 B;

令  $a=3$ , 原式  $= \sqrt{(-1)^2} + \sqrt{(-1)^2} = 2$ , 排除 D;

令  $a=2$  或  $a=4$ , 原式  $= 2$ .

故选 C.

**【解法 2】** (分类讨论) 当  $a > 4$  时, 原式  $= a - 2 + a - 4 = 2a - 6$ , 由  $2a - 6 = 2$  得  $a = 4$ , 矛盾, 排除 A;

当  $a < 2$  时, 原式  $= 2 - a + 4 - a = 6 - 2a$ , 由  $6 - 2a = 2$  得  $a = 2$ , 矛盾, 排除 B;

当  $2 \leq a \leq 4$  时, 原式  $= |2 - a| + |a - 4| = a - 2 + 4 - a = 2$ . D 不完整, 故选 C.

**例 3** (2007 · 全国竞赛题) 若  $\sqrt{(2007-m)^2} + \sqrt{m-2008} = m$ , 求代数式  $m - 2007^2$  的值.

**思路点拨** 运用二次根式被开方数的非负性, 求出  $m$  的范围, 再化简  $\sqrt{(2007-m)^2}$ .

**【解】**  $\because m - 2008 \geq 0, \therefore m \geq 2008. \therefore 2007 - m < 0$ .

由  $\sqrt{(2007-m)^2} + \sqrt{m-2008} = m$  得  $m - 2007 + \sqrt{m-2008} = m$ .

$\therefore \sqrt{m-2008} = 2007$ .

两边平方得  $m - 2008 = 2007^2$ , 即  $m - 2007^2 = 2008$ .



### 探究创新拓展

**例题** (应用创新) 已知实数  $x, y, a$  满足  $\sqrt{x+y-8} + \sqrt{8-x-y} = \sqrt{3x-y-a} + \sqrt{x-2y+a+3}$ , 试问长度分别为  $x, y, a$  的三条线段能否组成一个三角形? 如果能, 请求出该三角形的面积; 如果不能, 请说明理由.



**思路点拨** 运用二次根式的两个非负性求解.

**【解】** 由根式的意义可得 
$$\begin{cases} x+y-8 \geq 0, \\ 8-x-y \geq 0, \end{cases}$$

$$\therefore x+y=8.$$

当  $x+y=8$  时,

原题变形为  $\sqrt{3x-y-a} + \sqrt{x-2y+a+3} = 0$ .

根据非负数的性质可得 
$$\begin{cases} 3x-y-a=0, \\ x-2y+a+3=0, \end{cases}$$

联立方程组可解得  $x=3, a=4, y=5$ .

所以长度分别为  $x, y, a$  的三条线段能组成一个直角三角形, 其面积为  $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$ .



### 三级题型测训

#### I 夯实基础

- (2008·连云港) 如果  $\sqrt{x-1}$  有意义, 那么字母  $x$  的取值范围是( ).  
(A)  $x \geq 1$  (B)  $x > 1$  (C)  $x \leq 1$  (D)  $x < 1$
- (2008·武汉) 计算  $\sqrt{4}$  的结果是( ).  
(A) 2 (B)  $\pm 2$  (C) -2 (D) 4
- (杭州中考题) 要使式子  $\sqrt{2x+3}$  有意义, 字母  $x$  的取值必须满足( ).  
(A)  $x > -\frac{3}{2}$  (B)  $x \geq -\frac{3}{2}$  (C)  $x > \frac{3}{2}$  (D)  $x \geq \frac{3}{2}$
- (哈尔滨中考题) 若  $\sqrt{a^2} = -a$ , 则实数  $a$  在数轴上的对应点一定在( ).  
(A) 原点左侧 (B) 原点右侧  
(C) 原点或原点左侧 (D) 原点或原点右侧
- (临汾中考题) 若实数  $a < b$ , 则化简  $\sqrt{(a-b)^2}$  的结果为( ).  
(A)  $a+b$  (B)  $a-b$   
(C)  $-a-b$  (D)  $-a+b$
- 下列各式中, 哪些是二次根式? 哪些不是二次根式? 为什么?  
 $\sqrt{2}, \pi, \sqrt{x-1}, \sqrt{1+m^2}, \sqrt[3]{-8}, \sqrt{0.2}, \sqrt{1-2x+x^2}$ .
- 若下列各代数式在实数范围内有意义, 求  $a$  的取值范围.

$$(1) \sqrt{2-3a}. \quad (2) \frac{1}{\sqrt{-2a}} \quad (3) \frac{\sqrt{a+1}}{a+2}.$$

8. 下列各组数据分别为 $\triangle ABC$ 的三条边长,这三条边长能否构成直角三角形?说明理由.

$$(1) \sqrt{3}, 1, 2.$$

$$(2) \sqrt{5}, \sqrt{2}, \sqrt{7}.$$

$$(3) 3, 1, 2\sqrt{2}.$$

$$(4) \sqrt{13}, 2, \sqrt{15}.$$

### 能力提升

9. (2008·北京)若 $|x+2|+\sqrt{y-3}=0$ ,则 $xy$ 的值为( ).

$$(A) -8$$

$$(B) -6$$

$$(C) 5$$

$$(D) 6$$

10. (盐城中考题)若数轴上表示数 $x$ 的点在原点的左边,则化简 $|3x+\sqrt{x^2}|$ 的结果是( ).

$$(A) -4x$$

$$(B) 4x$$

$$(C) -2x$$

$$(D) 2x$$

11. 若 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 与 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 互为倒数,则 $a, b$ 的关系为( ).

$$(A) a=b-1$$

$$(B) a=b+1$$

$$(C) a=1-b$$

$$(D) a, b \text{ 无确定的关系}$$

12. (哈尔滨中考题)函数 $y=\frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$ 的自变量 $x$ 的取值范围是\_\_\_\_\_.

13. 实数 $a, b$ 在数轴上的位置如图 21-1-2 所示,化简  $|a+b|+\sqrt{(b-a)^2}=$ \_\_\_\_\_.

图 21-1-2

14. 计算:(1) $\sqrt{4^2}+(-\sqrt{2})^2-\sqrt{\left(\frac{9}{16}\right)^{-1}}.$

$$(2)(\sqrt{3}-1)^0+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}-\sqrt{(-5)^2}-|-1|.$$

15. 已知一次函数 $y=ax+1-a$ 的图象经过坐标系中的第一、二、三象限,化简  $|a-1|+\sqrt{a^2}.$

16. 若实数 $x$ 满足 $x-\sqrt{\frac{1}{4}-x}+x^2=\frac{1}{2}$ ,求 $x$ 的取值范围.

17. 已知 $a, b, c$ 是一个三角形的三条边长,化简  $\sqrt{(a+b+c)^2}+\sqrt{(a+b-c)^2}+\sqrt{(b-a-c)^2}+\sqrt{(c-a-b)^2}.$

### 探索拓展

18. 将 $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ 化简成 $a+b\sqrt{3}$ 的形式.

19. (宁波中考题) 已知  $a < 0$ , 化简:

$$\sqrt{4 - \left(a + \frac{1}{a}\right)^2} - \sqrt{4 + \left(a - \frac{1}{a}\right)^2}.$$

20. 求满足方程组  $\begin{cases} 3\sqrt{a-b} + 4\sqrt{c} = 16, \\ 4\sqrt{a-b} - 3\sqrt{c} = x \end{cases}$  的所有整数解的和 ( $x$  未知).

## 21.2

## 二次根式的乘除



### 课程目标点击

1. 熟练掌握二次根式乘法和除法的运算规则, 并注意两种运算对被开方数的相关规定.

2. 了解最简二次根式的概念, 掌握将二次根式化为最简二次根式的一般方法.

3. 在二次根式的乘除运算中, 常会出现一题多解的现象, 通过一题多解可以培养学生的学习兴趣和创新思维.



### 重点难点突破

#### 1. 二次根式的乘法

##### (1) 二次根式乘法法则

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad (a \geq 0, b \geq 0).$$

应用此法则时一定要注意前提条件  $a \geq 0, b \geq 0$ . 并且此法则可以推广到若干个非负数的算术平方根的积的情况, 如

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{abc} \quad (a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0).$$

##### (2) 积的算术平方根的性质

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad (a \geq 0, b \geq 0).$$

**注意** 在(2)中, 它可以视为二次根式乘法法则的逆用, 在应用此性质时, 同样应保证其前提条件是  $a, b$  均非负.

如  $\sqrt{(-2) \times (-8)} \neq \sqrt{-2} \times \sqrt{-8}$ , 而应是  $\sqrt{(-2) \times (-8)} = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$ , 这才符合  $\sqrt{(-2) \times (-8)} = \sqrt{16} = 4$  的正确结果.

## 2. 二次根式的除法

### (1) 二次根式除法法则

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (a \geq 0, b > 0).$$

其中特别注意分母  $b$  是不能为零的, 即  $b > 0$ , 不要与乘法法则的前提条件混淆.

### (2) 商的算术平方根的性质

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (a \geq 0, b > 0).$$

## 3. 对最简二次根式的解读

最简二次根式必须满足两个条件:

① 被开方数不含分母;

② 被开方数中不含能开得尽方的因数或因式.

**例 1** (广西钦州中考题) 下列式子中, 最简二次根式是( ).

(A)  $\sqrt{12}$       (B)  $\sqrt{a^2b}$       (C)  $\sqrt{\frac{1}{3}}$       (D)  $\sqrt{5x}$

**【解】**  $\sqrt{12}$  中含有开得尽方的因数 4,  $\sqrt{a^2b}$  中含有开得尽方的因式  $a^2$ ,  $\sqrt{\frac{1}{3}}$  中被开方数含有分母.

故排除 A、B、C, 选 D.

**反思** 除上述较明显的这几种代数式外, 还应特别注意被开方式是否能化为完全平方式或可提取公因式的情形. 如  $\sqrt{a^2-4a+4}$  与  $\sqrt{b^2+b^3}$  都不是最简二次根式, 因为  $\sqrt{a^2-4a+4} = \sqrt{(a-2)^2} = |a-2|$ ,  $\sqrt{b^2+b^3} = \sqrt{b^2(1+b)} = |b|\sqrt{1+b} \quad (b \geq -1)$ .

## 4. 二次根式的分母有理化

当被开方式中含有分母时, 要把分母中的根号化去, 我们称这个运算过程为分母有理化.

例如  $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$ ,  $\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3 \times 2}{2 \times 2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ .

**例 2** 将  $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$  化为最简根式.

**【解】**  $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$ .