



法兰西数学
精品译丛

拓扑学教程

——拓扑空间和距离空间、
数值函数、拓扑向量空间
(第2版)

□ G. 肖盖 著
□ 史树中 王耀东 译



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS



法兰西数学
精品译丛

数学天元基金资助项目

拓扑学教程

—— 拓扑空间和距离空间、
数值函数、拓扑向量空间
(第2版)

G. 肖盖 著
 史树中 王耀东 译



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图字: 01-2008-0938 号

Gustave Choquet

Cours de topologie

© Dunod, 2000, 2nd edition, Paris

图书在版编目 (CIP) 数据

拓扑学教程: 拓扑空间和距离空间、数值函数、拓扑
向量空间 (第2版) / (法) 肖盖著; 史树中, 王耀东译.

北京: 高等教育出版社, 2009. 7

(法兰西数学精品译丛)

ISBN 978-7-04-026362-6

I.拓... II.①肖...②史...③王... III.拓扑-研究生-
教材 IV. O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2009) 第 086738 号

策划编辑 赵天夫 责任编辑 赵天夫 封面设计 张楠
版式设计 陆瑞红 责任校对 金辉 责任印制 韩刚

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landaco.com
印 刷	中原出版传媒投资控股集团 北京汇林印务有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×1092 1/16	版 次	2009 年 7 月第 1 版
印 张	19.25	印 次	2009 年 7 月第 1 次印刷
字 数	380 000	定 价	49.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 26362-00

《法兰西数学精品译丛》编委会

主编：李大潜

编委：(按姓氏拼音次序排列)

Michel Bauderon

Jean-Pierre Bourguignon

Jean-Benoît Bost

Haïm Brezis

Philippe G. Ciarlet

Paul Malliavin

彭实戈

Claire Voisin

文志英

严加安

张伟平

助理：姚一隽

《法兰西数学精品译丛》序

随着解析几何及微积分的发明而兴起的现代数学,在其发展过程中,一批卓越的法国数学家发挥了杰出的作用,作出了奠基性的贡献.他们像灿烂的星斗发射着耀眼的光辉,在现代数学史上占据着不可替代的地位,在大学教科书、各种专著及种种数学史著作中都频繁地出现着他们的英名.在他们当中,包括笛卡儿、费马、帕斯卡、达朗贝尔、拉格朗日、蒙日、拉普拉斯、勒让德、傅里叶、泊松、柯西、刘维尔、伽罗华、庞加莱、嘉当、勒贝格、魏伊、勒雷、施瓦兹及利翁斯等等这些耳熟能详的名字,也包括一些现今仍然健在并继续作出重要贡献的著名数学家.由于他们的出色成就和深远影响,法国的数学不仅具有深厚的根基和领先的水平,而且具有优秀的传统和独特的风格,一直在国际数学界享有盛誉.

我国的现代数学,在 20 世纪初通过学习西方及日本才开始起步,并在艰难曲折中发展与成长,终能在 2002 年成功地在北京举办了国际数学家大会,在一个世纪的时间中基本上跟上了西方历经四个多世纪的现代数学发展的步伐,实现了跨越式的发展.这一巨大的成功,根源于好几代数学家持续不断的艰苦奋斗,根源于我们国家综合国力不断提高所提供的有力支撑,根源于改革开放国策所带来的强大推动,也根源于很多国际数学界同仁的长期鼓励、支持与帮助.在这当中,法兰西数学精品长期以来对我国数学界所起的积极影响,法兰西数学的深厚根基、无比活力和优秀传统对我国数学家所起的不可低估的潜移默化作用,无疑也是一个不容忽视的因素.足以证明这一点的是:在我国的数学家中,有不少就曾经留学法国,直接受到法国数学家的栽培和法兰西数学传统和风格的熏陶与感召,而更多的人也或多或少地通过汲取法国数学精品的营养而逐步走向了自己的成熟与辉煌.

由于语言方面的障碍,用法文出版的优秀数学著作在我国的传播受到了较大的

限制. 根据一些数学工作者的建议, 并取得了部分法国著名数学家的热情支持, 高等教育出版社决定出版《法兰西数学精品译丛》, 将法国的一些享有盛誉并有着重要作用与影响的数学经典以及颇具特色的大学与研究生数学教材及教学参考书, 有选择地从法文原文分批翻译出版. 这一工作得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的支持和赞助, 对帮助并推动我国读者更好地学习和了解法国的优秀数学传统和杰出数学成就, 进一步提升我国数学(包括纯粹数学与应用数学)的教学与研究工作的水平, 将是意义重大并影响深远的, 特为之序.

李大潜

2008年5月

出版者的话

本书的原版书为 G. Choquet 教授所著的《分析教程》的第二卷《拓扑学》(*Cours d'analyse Tome II: Topologie*), 该书至今已出了三版^①, 并有英文、西班牙文译本. 中译本由史树中、白继祖根据 1969 年法文修订版翻译, 我社于 1988 年分上下两册出版 (下册因故未能出版), 书名为《分析与拓扑》.

本次中译本根据法文版 2000 年的第 2 版译出, 此时原书已更名为《拓扑学教程》(*Cours de topologie*), 在翻译过程中译者参考了 1988 年我社出版的中译本《分析与拓扑》.

史树中老师在翻译本书的过程中不幸逝世, 王耀东老师继续完成了本书的翻译工作. 在此, 我们对他们的辛勤工作表示由衷的感谢. 我们也感谢白继祖先生对本书的贡献.

^①分别为:

- G. Choquet, *Cours d'analyse Tome II: Topologie*, Masson, 1964.
- G. Choquet, *Cours d'analyse Tome II: Topologie*, Masson, 1969. (修订版)
- G. Choquet, *Cours de topologie*, 2e édition, Dunod, 2000. (第 2 版)

《分析与拓扑》译者序

本书是法国科学院院士、著名数学家 G. Choquet 教授所著的《分析教程》的第二卷《拓扑学》的译本。原书是法国硕士学位的基础教材。它是作者多年教学的结晶，内容深入浅出，富有启发性，并附有大量习题。正如作者在序言中所说：“本书的目的在于使大学生在一个尽可能简单的框架中了解某些现代分析的强有力的工具及其应用。”因此，本书的着眼点在于深入剖析分析中的一些基本概念和基本工具，较少涉及一些过于艰深的专门概念和定理，因而使它对于数学研究的任何一个专业方向都是很有益的。

《分析教程》的第一卷《代数》和第三卷《积分学和微分学》都从未公开出版过，而第二卷《拓扑学》则已出了两版，并有英文、西班牙文译本。本书根据它的 1969 年的修订本译出。译者为了指出它并非是一本真正的拓扑学教程，而把它改称为《分析与拓扑》。但是我们没有改变原书的章节编号，因为这将牵一发动全身，带来很多问题。这样一来，本书将只包含第五、六、七章，而没有前面的各章。同时，书中又常常援引前面的章节的结果，为帮助读者阅读，我们就加了很多译者注，补充了许多书中所需要的概念。然而，由于某些概念（主要是集合论中的概念）无法用一个简单的定义说清楚，我们并未做得十分彻底，诸如可数集、势、基数等我们都没有一一加注。不熟悉这些概念的读者可参考有关教本，好在这类教本在国内都不难找到。此外，原书还有少量印刷错误和其他错误，大部分我们都不加指出地进行改正，只在一些较紧要的地方才加了译者注。

作者曾经是法国布尔巴基 (N. Bourbaki) 学派中的活跃分子，曾为布尔巴基的著作作出很多贡献。本书中的布尔巴基影响也是显而易见的，即从代数结构、拓扑结构和序结构三方面来分析数学对象以及它们间的关系。书中也采用了著名的布尔巴基

的符号“Z”，表示这里有一个理解上的“危险的转折”或“弯路小心”，要求读者仔细辨析。但是作者并未追求布尔巴基著作的过分系统、过分干净的写法。我们常常会发现在本书中，前一章要用到后一章的材料，或者涉及更不相干的其他数学学科的材料。这种做法也许会给读者带来一点困难，但总的来说这将对开阅读者的思路是有好处的。此外，本书各章后面的大量习题无疑是本书的最宝贵的资料之一，愿意真正弄通本书的读者应尽可能多做后面的习题。不过有些地方习题与课文内容有点重复，对此我们没有都一一指出。

本书由白继祖译出前两章的初稿，史树中译出后一章的初稿，然后再由史树中统一校订。我们两人都用本书进行过教学（其中白继祖是在刚果布拉柴维尔大学直接用法语讲授的）。在教学过程中，学生们曾发现不少原书有的少量错误和我们翻译中的错误。这里我们对他们的帮助表示感谢。但限于我们的水平，这个译本一定还有不少问题，请读者批评指正。

译者

第二版序言

本书是按照现行数学学士和硕士学位关于一般拓扑学和函数空间的要求编写的。全书是在巴黎讲授过几年的一份讲义的基础上形成的，并且由 C.D.U. 出版社 (Centre de Documentation Universitaire) 出版过它的一些复印分册。

本书是为已经掌握了相当于大学第一阶段数学知识的大学生编写的。尽管如此，叙述中几乎不假定任何预备知识。

本书的目的在于使大学生在一个尽可能简单的框架中了解某些现代分析的强有力的工具及其应用。

书中的基本概念几乎都是在事先给出一、两个旨在说明定义选择的合理性的例子后，再以一般的形式提出的。因而我们考虑任意的拓扑空间是在对实直线作了简要的学习之后；距离空间仅当提出一致性问题以后才引入。同样，赋范向量空间和 Hilbert 空间也只是在研究了局部凸空间的讨论后引入，后者在现代分析及其应用中越来越重要。

我们注意了通过正面和反面的例子来明确一些定理的成立范围。最后，为使大学生能检验他们对课程是否很好理解以及训练他们的创造才能，我们安排了难易不同的众多练习。

古斯塔夫·肖盖 (Gustave Choquet)

修订版序言

这一版仅仅是第一版的修订,并未增加篇幅;甚至还对无限乘积的研究做了显著的减少.

然而,我也改正了一些错误,并试图对一些含糊的证明作了澄清;同时,引入了一些旨在帮助理解推理结构的新概念,并增加了一些练习.

如果这一版优于第一版,这主要归功于我的大学及综合理工学院的学生们,以及我的法国和外国同事们,特别是 Bass、Piron、Saint-Guilhem、Ursell 等先生.为此,我十分感谢他们.

古斯塔夫·肖盖 (Gustave Choquet)

C1 证书的拓扑学大纲^①

摘自欧洲学生手册 (二级, 第 12 和 13 点)

A. 一般拓扑

\mathbb{R} 和 \mathbb{R}^n 的拓扑; Borel-Lebesgue 定理. 拓扑空间的一般定义 (通过开集或闭集); 距离空间的例子. 连续函数. 拓扑空间的积.

紧空间; 经典定理. 局部紧空间.

连通空间; 连同空间通过连续映射的像.

距离空间 (多个例子). 距离空间的紧性判别准则. 一致连续性; 紧距离空间到距离空间的连续映射情形.

完备距离空间 (不考虑完备化). 逐次逼近法.

完备赋范空间上的可和族; 按范数收敛.

B. 函数空间

距离空间上的映射空间的一致收敛距离; 紧距离空间上的映射空间情形; 连续映射情形.

^①这里复述的本文摘自一份旨在协调欧洲数学教育的大纲; 引人注目的是它比相应的法国的正式大纲更详细, 但所包含的内容是一样的.

赋范向量空间; Banach 空间. 例. 数值函数向量空间上的一致收敛范数, 用积分定义的函数空间上的各种范数.

Stone-Weierstrass 定理, 或至少是 (多项式逼近的) Weierstrass 定理.

准 Hilbert 空间: 例. l^2 空间是完备的 (联系 Lebesgue 积分). 不等式. 到一个完备向量空间上的射影, 以及更一般的, 到一个完备子集上的射影; 射影是一个压缩映射. 有可数基的准 Hilbert 空间; Schmidt 正交化. 应用: 特殊多项式序列, Fourier 级数.

目 录

《法兰西数学精品译丛》序

出版者的话

《分析与拓扑》译者序

第二版序言

修订版序言

C1 证书的拓扑学大纲

第一章 拓扑空间和距离空间.....	1
引言.....	1
I. 直线 \mathbb{R} 上的拓扑.....	2
§1. 开集、闭集、邻域、集合的界.....	2
§2. 序列极限. Cauchy 收敛准则.....	5
§3. 有界闭区间的紧性.....	7
§4. 空间 \mathbb{R}^n 的拓扑.....	8

II. 拓扑空间	9
§5. 开集、闭集、邻域	10
§6. 闭包、内部、边界	12
§7. 连续函数. 同胚	16
§8. 极限概念	20
§9. 拓扑空间的子空间	23
§10. 空间的有限积	25
§11. 紧空间	29
§12. 局部紧空间. 紧化	34
§13. 连通性	38
§14. 拓扑群、拓扑环和拓扑域	42
III. 距离空间	50
§15. 距离和拟距离	50
§16. 距离空间的拓扑	56
§17. 一致连续性	59
§18. 紧距离空间	63
§19. 连通距离空间	65
§20. Cauchy 列和完备空间	66
§21. 逐次逼近法的模式	72
§22. 简单收敛和一致收敛	75
§23. 等度连续函数空间	82
§24. 全变差和长度	85
IV. 习题	92
直线 \mathbb{R} 与空间 \mathbb{R}^n	92
拓扑空间	93
距离空间	97
V. 第一章的法汉术语对照和索引	103
VI. 参考文献	105
VII. 定义和公理	105
VIII. 经典记号的回顾	106

第二章 数值函数	108
I. 定义在任意集合上的数值函数	108
§1. $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$ 和 $\mathcal{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$ 上的序关系	108
§2. 数值函数的界	109
§3. 函数族的上包络和下包络	110
II. 数值函数的极限概念	112
§4. 函数沿 E 上的滤子基的上、下极限	112
§5. 函数族的上、下极限	114
§6. 在连续函数上的运算	115
III. 半连续数值函数	117
§7. 点上的半连续性	117
§8. 全空间上的下半连续函数	118
§9. 下半连续函数的构造	120
§10. 紧致空间上的半连续函数	120
§11. 长度的半连续性	121
IV. Stone-Weierstrass 定理	124
§12. Stone-Weierstrass 定理	124
V. 定义在 \mathbb{R} 的区间上的函数	129
§13. 左、右极限	129
§14. 单调函数	131
§15. 有限增量定理	132
§16. 凸函数的定义. 直接性质	135
§17. 凸函数的连续性和可导性	136
§18. 凸性准则	138
§19. 向量空间的子集上的凸函数	140
§20. 单调函数的相对平均值	143
VI. 习题	149
定义在任意集合上的数值函数	149
定义在拓扑空间上的数值函数	149
半连续数值函数	150
Stone-Weierstrass 定理	150
定义在区间上的函数	151

凸函数	151
平均值和不等式	154
VII. 第二章的法汉术语对照和索引	155
VIII. 参考文献	156
IX. 定义和公理	157
第三章 拓扑向量空间	158
I. 一般拓扑向量空间. 例子	158
§1. 拓扑向量空间的定义和初等性质	158
§2. 关联于半范数族的拓扑	161
§3. 拓扑向量空间的经典实例	169
II. 赋范空间	173
§4. 关联于范数的拓扑. 连续线性映射	173
§5. 单态射和同构的稳定性	179
§6. 赋范空间的乘积. 连续多重线性映射	182
§7. 有限维赋范空间	184
III. 可和族. 级数. 无穷乘积. 赋范代数	187
§8. 实数可和族	187
§9. 拓扑群和赋范空间上的可和族	193
§10. 级数. 级数的比较与可和族的比较	200
§11. 函数级数与函数可和族	205
§12. 复数可乘族与复数无穷乘积	208
§13. 赋范代数	213
IV. Hilbert 空间	220
§14. 准 Hilbert 空间的定义和初步性质	220
§15. 正交投影. 对偶的研究	227
§16. 正交系	232
§17. Fourier 级数和正交多项式	238
V. 习题	242
一般拓扑向量空间	242
关联于半范数族的拓扑	243