高职高专公共基础课规划教材
GAOZHIGAOZHUAN GONGGONG JICHUKE GUIHUA JIAOCAI

高等数学

杨家坤　主　编　张锦华　副主编

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

高职高专公共基础课规划教材

GAOZHIGAOZHUAN GONGGONG JICHUKE GUIHUA JIAOCAI

高等数学

主　编　杨家坤
副主编　张锦华
编　写　黎　健
主　审　杨顶辉

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书为高职高专公共基础课规划教材。

本书共分11章，主要包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程，级数，多元函数微积分，线性代数，拉普拉斯变换与Z变换，MATLAB简介及其在高等数学中的应用。附录部分包括常用的初等数学基本公式、简易积分表及拉氏变换简表。此外，每章末还配有小结及复习题，便于学生复习，巩固所学知识。本教材注重数学理论和实际应用的结合，深入浅出地介绍了高等数学基本知识和工程数学基础知识，融高等数学与工程数学为一体，结构合理。

本书可作为高职高专院校工科学生高等数学课程教材，也可作为读者学习高等数学的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/杨家坤主编. —北京：中国电力出版社，2009
高职高专公共基础课规划教材
ISBN 978-7-5083-8792-5

Ⅰ.高…　Ⅱ.杨…　Ⅲ.高等数学-高等学校：技术学校-教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第065930号

中国电力出版社出版、发行
（北京三里河路6号　100044　http://jc.cepp.com.cn）
北京市同江印刷厂印刷
各地新华书店经售
*
2009年6月第一版　2009年6月北京第一次印刷
787毫米×1092毫米　16开本　24印张　586千字
定价 **38.40** 元

前 言

高等数学是高职院校工科各专业的一门必修的公共基础课，是提高学生文化素质、提高学生的综合分析能力和学习有关专业知识、专门技术及获取新知识和能力的重要基础，在高等职业技术教育中起着非常重要的作用，学好这门课程对学生的专业学习和今后的发展至关重要。

本书是为了适应高等职业技术教育培养应用型、技能型人才的需要，适应高等教育大众化发展趋势的现实而编写的高等职业技术教育教材，突出“必须、够用为度”的原则，深入浅出地介绍了高等职业技术教育工科各专业必修内容，即高等数学基本知识和工程数学基础知识，融高等数学与工程数学为一体，取材适当，结构合理。

本书具有以下特点：

(1) 根据高职高专学生数学基础知识薄弱的特点，注意复习中学知识及衔接，从实例概括引入基本概念，重视解题能力和应用能力的培养，基础理论限于最基本的，例题和习题也大多数是“计算型”的，以利于培养学生应用数学技巧解决工程问题的能力；

(2) 每章开始都给出提要，对每章要讨论的问题一开始就交代清楚，使读者心中有数，了解所讨论问题的来龙去脉，章末配有小结，便于读者复习和小结时参考；

(3) 概念、理论和方法的叙述力求深入浅出，便于学生自学和老师教学，多用表格、图形等简明形式帮助学生归纳基本内容和方法，加深学生的理解，巩固所学知识；

(4) 每小节配有习题，这些习题反映了教学的基本要求，章末配有复习题（题型有选择、填空、判断和计算题等），以加深对教学内容的理解和掌握，也方便教师选用；

(5) 注重利用数学软件 MATLAB 求解数学问题，并结合具体教学内容在最后专门安排了一章介绍数学软件 MATLAB 在高等数学中的应用，以利教学取舍。

本书由昆明工业职业技术学院杨家坤担任主编，张锦华担任副主编。第 1 章、第 6 章、第 8 章、第 9 章及附录由杨家坤编写，第 2 章由黎健编写，第 3～5 章、第 7 章、第 10 章及第 11 章由张锦华编写。全书由杨家坤统稿。

本书由清华大学杨顶辉教授担任主审，对本书的编写提出了许多宝贵的意见和建议。在本书编写过程中，我们还参阅了一些高等数学和工程数学方面的优秀教材和学术专著，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，书中疏漏和错误之处在所难免，恳请读者和同行专家、学者批评指正。

编 者

2009 年 3 月

目 录

第1章

函数、极限与连续

函数是高等数学中最重要的基本概念之一，它揭示了客观世界中各种量之间的联系和变化规律，是学习高等数学和其他科学技术必不可少的基础. 极限是高等数学中最基本的概念，微积分的研究对象是函数，研究函数的方法是极限方法. 微积分中几乎所有的概念都是用极限概念来描述的，掌握好极限的概念、运算和基本性质非常重要.

本章在系统地复习函数基本知识及有关内容的基础上，着重介绍极限、无穷小、函数的连续性等重要概念以及它们的一些性质.

1.1 函　　数

1.1.1 函数的概念

1. 函数的定义

客观世界中各种不同的变化着的量不是孤立的，而是相互联系、相互制约的，我们不但要研究事物的量的变化，更重要的是要研究在同一问题中不同的量之间的相互依赖关系，这种依赖关系，就是数学中的函数关系.

现在来考察两个实例.

【例 1.1.1】 考虑正方形的面积 S 与边长 a 间的相依关系. 大家知道，它们之间的关系由公式

$$S=a^2$$

给定，当边长 a 取定某一正的数值时，S 也就随之有一个确定的数值与之对应，即面积 S 与半径 a 有关.

【例 1.1.2】 考虑自由落体问题：设物体下落的时间为 t，位移为 s，假定开始下落的时刻为 $t=0$，那么 s 与 t 之间的依赖关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

式中：g 为重力加速度.

假定物体着地的时间为 T，那么当时间 t 取 $[0,T]$ 中的某一数值时，由上式就可确定位移 s 的一个数值，即位移 s 与下落时间 t 有关.

上述各例，虽然各自所包含的实际意义不同，表现的形式也不同，但其共同的本质是：都包含两个变量，它们之间相互依赖，并且存在确定的对应法则，当一个变量取一个确定的值时，另一个变量按一定的规则总有唯一确定的值与之对应. 在现实生活中，我们可能遇到这种变量间的依赖关系的例子有很多，抽去它们的实际意义，概括其共同特点，抽象为数学概念——函数.

定义 1.1.1 如果在某变化过程中有两个变量 x、y，当 x 在某一范围内任意给定一个数值，按照某个对应法则 f，y 都有唯一确定的值与之对应，那么就称 y 是 x 的**函数**. 记作 $y=f(x)$，其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**.

自变量 x 的取值范围 D 叫做函数的定义域. 当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 y_0、$f(x)\big|_{x=x_0}$、$y\big|_{x=x_0}$，当自变量 x 取遍定义域 D 中的每一个 x，得到的全体函数值组成的集合称为函数的值域.

一般地，函数还可用 $F(x)$、$g(x)$、$G(x)$ 等表示. 在同时讨论几个不同的函数时，需要用不同的函数记号来表示.

⚠注意　决定函数的关键因素是定义域和对应法则，是确定函数的两个要素.

【例 1.1.3】　下列式子中，y 是 x 的函数吗?

(1) $y=\sqrt{-x}$;　　(2) $y=c$;　　(3) $y=\arcsin(3+x^2)$.

解　(1) 对于 x 取区间 $(-\infty, 0]$ 中的每一个实数，y 都有唯一确定的实数与之对应，所以 $y=\sqrt{-x}$ 是 x 的函数.

(2) 从表明上看，$y=c$ 没有包含 x，但不论 x 取 $(-\infty, +\infty)$ 中的任何实数，y 都有唯一确定的实数值 c 与之对应，因此 $y=c$ 是 x 的函数.

(3) 因为 $3+x^2 \geqslant 3$，$\arcsin(3+x^2)$ 无意义，所以，无论 x 取任何值，在实数范围内 y 都找不到一个确定的值与之对应，因此 $y=\arcsin(3+x^2)$ 不是 x 的函数.

函数关系通常可以用表格、图像或解析式来表示. 高等数学中所涉及的函数主要用解析式表示.

【例 1.1.4】　设 $y=x^2-3x+2$，求 $f(-1)$、$f(a+1)$、$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$、$f(f(x))$.

解　因为函数的对应法则是 $f(\ )=(\ )^2-3(\ )+2$，所以

$$f(-1)=(-1)^2-3\times(-1)+2=6,$$

$$f(a+1)=(a+1)^2-3\times(a+1)+2=a^2-a,$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2-3\times\left(\frac{1}{x}\right)+2=\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}+2,$$

$$\begin{aligned}f(f(x))&=(f(x))^2-3\times(f(x))+2=(x^2-3x+2)^2-3\times(x^2-3x+2)+2\\&=x^4-6x^3+2x^2+21x.\end{aligned}$$

2. 函数定义域的求法

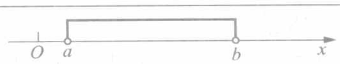
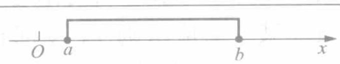
(1) 区间及其表示法.

函数的定义域常用区间来表示.

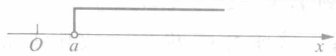
定义 1.1.2　介于两个实数之间的所有实数组成的集合叫做**区间**，这两个实数叫做区间的**端点**，端点间的距离叫做区间的长. 区间的长为有限时，叫做有限区间；区间的长为无限时，叫做无限区间.

下面将各种区间的名称、记号、集合表示及图示列于表 1.1.1 中（其中：符号 $-\infty$ 和 $+\infty$ 分别代表负无穷大和正无穷大，不代表一个数）.

表 1.1.1　　**各种区间的名称、记号、集合表示及图示**

名　称	记　号	集合表示	图　示
开区间	(a, b)	$\{x \mid a<x<b\}$	
闭区间	$[a, b]$	$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$	

续表

名　称	记　号	集合表示	图　示
半开半闭区间	$[a, b)$	$\{x \mid a \leqslant x < b\}$	
	$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leqslant b\}$	
无限区间	$(a, +\infty)$	$\{x \mid a < x < +\infty\}$	
	$[a, +\infty)$	$\{x \mid a \leqslant x < +\infty\}$	
	$(-\infty, b)$	$\{x \mid -\infty < x < b\}$	
	$(-\infty, b]$	$\{x \mid -\infty < x \leqslant b\}$	
	$(-\infty, +\infty)$	$\{x \mid -\infty < x < +\infty\}$	

以后我们还会遇到以点 x_0 为中心的开区间，我们称这种开区间为点 x_0 的邻域. 确切地说，对任意一个正数 δ，开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 δ 邻域（简称点 x_0 的邻域）；区间 $(x_0-\delta, x_0)\cup(x_0, x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的去心邻域. 显然，任何包含 x_0 的一个开区间 (a, b)，也总包含有 x_0 的一个邻域.

(2) 函数定义域的求法.

研究函数必须注意函数的定义域. 在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义来确定. 若不涉及实际问题，函数的定义域就是使函数解析式有意义的自变量的取值范围.

求定义域时应注意以下几条原则：

1) 如果函数的表达式中含有分式，则分式的分母不能为零；

2) 如果函数的表达式中含有偶次根式，则根号下的表达式必须大于或等于零；

3) 如果函数的表达式中含有对数，则对数的真数必须大于零；

4) 如果函数的表达式中含有正切函数或余切函数、反正弦函数或反余弦函数，则必须符合正切函数或余切函数、反正弦函数或反余弦函数的定义域；

5) 如果函数的表达式中同时含有分式、根式、对数式、正（余）切函数、反正弦（余弦）函数等，则应取各部分定义域的交集.

【例 1.1.5】 求函数 $y=x^2-3x+2$ 的定义域.

解 当 x 取任何实数时，y 都有一个确定的值与之对应，所以函数 y 的定义域是全体实数，即区间 $(-\infty, +\infty)$.

【例 1.1.6】 求函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\lg(3-x)}$ 的定义域.

解 该函数由两个函数相除而得，要使函数有意义，则 x 的取值应满足不等式组

$$\begin{cases} x+1 \geqslant 0 \\ 3-x > 0 \\ \lg(3-x) \neq 0 \end{cases},$$

解得

$$\begin{cases} x \geqslant -1 \\ x < 3 \\ x \neq 2 \end{cases},$$

所以，函数的定义域为 $[-1,\ 2)\cup(2,\ 3)$.

【例 1.1.7】 求函数 $f(x)=\sqrt{9-x^2}+\arcsin(2x-5)$ 的定义域.

解 该函数由两个函数相加而得，要使函数有意义，则 x 的取值应满足不等式组

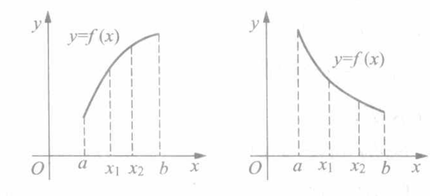
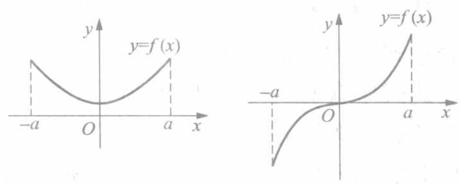
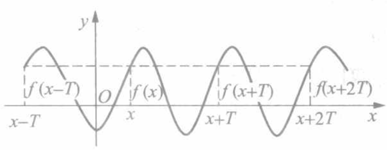
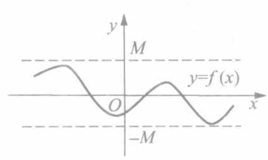
$$\begin{cases} 9-x^2 \geqslant 0 \\ |2x-5| \leqslant 1 \end{cases},$$

由 $9-x^2\geqslant 0$ 得 $-3\leqslant x\leqslant 3$，由 $|2x-5|\leqslant 1$ 得 $2\leqslant x\leqslant 3$，所以函数的定义域为 $[-3,\ 3]\cap[2,\ 3]=[2,\ 3]$.

1.1.2 函数的几种特性

函数的四个特性在初等数学中已作详细介绍，在此将定义、图像、几何意义列于表 1.1.2 中，以便复习之用［表中 D 为函数 $f(x)$ 的定义域］.

表 1.1.2　　函数的四个特性的定义、图像、几何意义

特性	定　　义	图　　像	几何意义
单调性	设区间 $I\subseteq D$，对于任意 x_1，$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，如果恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**；反之则称 $y=f(x)$ 在区间 I 上**单调递减**	(a)　(b)	单调增加函数图像沿 x 轴正向上升；单调减少函数图像沿 x 轴正向下降
奇偶性	设 D 关于坐标原点对称，若对任意 $x\in D$ 有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 是**奇函数**；若有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 是**偶函数**	(a)　(b)	奇函数的图形关于坐标原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称
周期性	若存在常数 $T\neq 0$，使得对任意 $x\in D$，均有 $x+T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为**周期函数**，常数 T 称为 $f(x)$ 的**周期**. 周期常指最小正周期		周期函数的图形，在函数定义域内每间隔一个周期的区间上，函数图形有相同的形状
有界性	设区间 $I\subseteq D$，若存在正数 M，使得对任何 $x\in I$，恒有 $\lvert f(x)\rvert\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 为区间 I 上的**有界函数**，否则称 $f(x)$ 在区间 I 上**无界**		有界函数的图形夹在两条平行直线之间

【例 1.1.8】 判定下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$；

(2) $f(x)=\dfrac{x}{a^x-1}$；

(3) $f(x)=c$（其中 c 为常数）.

解 (1) 把 $-x$ 代入 $f(x)$ 得

$$f(-x)=\lg(-x+\sqrt{1+(-x)^2}=\lg\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}=\lg(x+\sqrt{1+x^2})^{-1}$$
$$=-\lg(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

(2) 把 $-x$ 代入 $f(x)$ 得

$$f(-x)=\frac{-x}{a^{-x}-1}=\frac{xa^x}{a^x-1},$$
$$f(-x)\neq f(x),\ f(-x)\neq -f(x),$$

所以 $f(x)$ 是非奇非偶函数.

(3) 此函数称为常量函数，其特点是无论 x 取任何值，函数值恒为 c，于是对任何 $x\in R$，均有 $f(-x)=f(x)=c$，所以函数 $f(x)=c$ 是偶函数.

特别地，当 $c=0$ 时，$f(x)=0$ 既是奇函数又是偶函数.

1.1.3 反函数

1. 反函数的概念

函数关系中的两个变量，一个是自变量，另一个是因变量，它们的地位是不同的. 在实际问题中，两个变量中哪个作自变量哪个作因变量，不是绝对的，在一定条件下，可以互相转化. 如在［例 1.1.2］中，当我们用时间 t 来确定位移时，在公式 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 中取 t 为自变量；反过来，如果已知位移 s 求下落时间 t，那么在公式 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 中解出 t，有

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}}.$$

这时，s 是自变量，t 是因变量.

从函数 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 得到的函数 $t=\sqrt{\dfrac{2s}{g}}$ 叫做函数 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 的反函数. 一般地，我们有如下定义.

定义 1.1.3 设函数 $y=f(x)$ 的值域为 Y，如果对于任意 $y\in Y$，都可以从等式 $y=f(x)$ 中唯一确定 x，那么便得到一个定义在 Y 上的以 y 为自变量、x 为因变量的函数，记为 $x=f^{-1}(y)$（读作 x 等于 f 逆 y），则称此函数为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，相应地称 $y=f(x)$ 为直接函数.

习惯上，用 x 表示自变量，y 表示因变量，则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 可记作 $y=f^{-1}(x)$.

⚠注意 从定义可以看出，函数 $y=f(x)$ 如果反函数存在，x、y 应满足一一对应关系，即单调函数存在反函数；函数 $y=f(x)$ 的定义域、值域分别是其反函数的值域和定义域.

在直角坐标系 xoy 中，函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

2. 反函数的求法

由定义知，反函数 $y=f^{-1}(x)$ 是由函数 $y=f(x)$ 变化而来的，可以理解为由等式 $y=f(x)$ 解出 x，得到 x 关于 y 的解析式，再交换 x、y 的位置.

【例 1.1.9】 求函数 $y=\sqrt[3]{x+1}$的反函数.

解 由等式 $y=\sqrt[3]{x+1}$解得 $x=y^3-1$，交换 x、y 的位置得所给函数的反函数 $y=x^3-1$，其定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

【例 1.1.10】 求函数 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$的反函数.

解 由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$解得 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$，交换 x、y 的位置的所给函数的反函数 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$，其定义域为 $(0, 1)$.

习 题 1.1

1. 求函数的定义域：

(1) $y=2x^2-x+1$； (2) $y=\sqrt{3x+2}$； (3) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-x-2}}$；

(4) $y=\log_a(x^2+2x-3)$； (5) $y=\arcsin(1-x^2)$； (6) $y=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

2. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$，求 $f(0)$，$f(2)$，$f(-1)$，$f(x+1)$，$f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$.

3. 求下列函数的反函数：

(1) $y=3x-1$； (2) $y=2^x-1$； (3) $y=\log_2 x+1$； (4) $y=\arcsin\dfrac{1-x}{4}$.

4. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=x^6+2x^2$； (2) $y=x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{12}$； (3) $y=x+\tan x$；

(4) $y=\dfrac{a^x+1}{a^x-1}$； (5) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$； (6) $y=\sin x-\cos x$；

(7) $g(x)=f(x)\left(\dfrac{1}{a^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$，其中 $f(x)$ 是奇函数.

5. 判断下列各对函数是否相同？为什么？

(1) $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=|x|$； (2) $y=\sqrt{2}\cos x$ 与 $y=\sqrt{1+\cos 2x}$；

(3) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x-2}}{x}$ 与 $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x^3}}$；

(4) $f(x)=x+\sqrt{2+x^2}$ $(x>0)$ 与 $g(x)=\dfrac{1+\sqrt{1+2x^2}}{x}$.

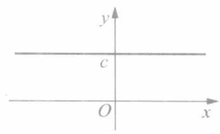
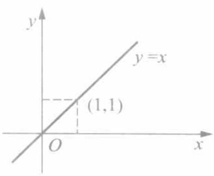
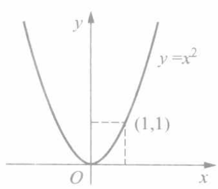
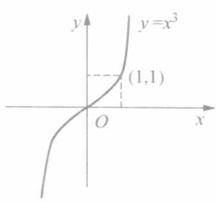
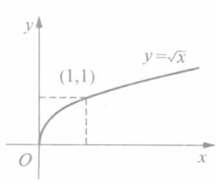
6. 已知 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 0 \\ x^2+x, & x>0 \end{cases}$，求 $f(-x)$.

1.2 初 等 函 数

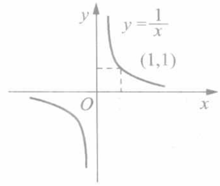
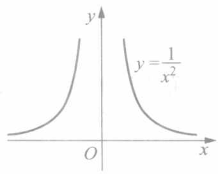
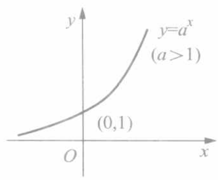
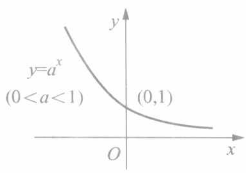
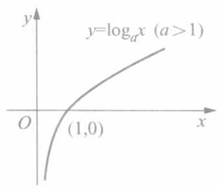
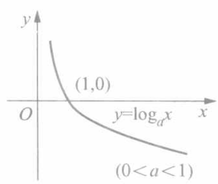
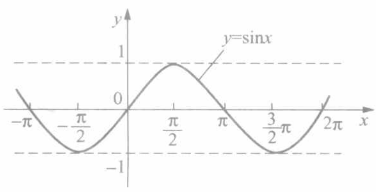
1.2.1 基本初等函数

我们已学过的函数有常量函数 $y=c$；幂函数 $y=x^{\alpha}$ （$\alpha\in R$）；指数函数 $y=a^{x}$ （$a>0$，$a\neq1$）；对数函数 $y=\log_a x$ （$a>0$，$a\neq1$）；三角函数 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$、$y=\sec x$、$y=\csc x$；反三角函数 $y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\arctan x$、$y=\operatorname{arccot} x$，这些函数统称为基本初等函数. 微积分研究的对象，主要是初等函数，而初等函数是由基本初等函数组成的. 下面我们将常用的基本初等函数的性质及图像列于表 1.2.1 中.

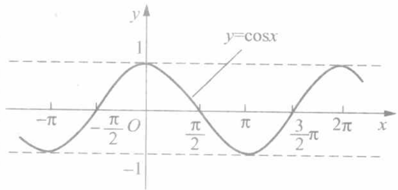
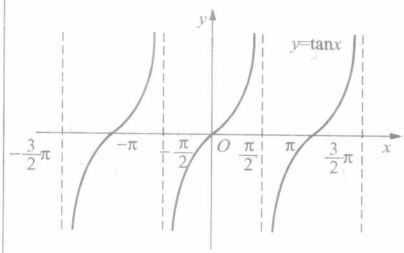
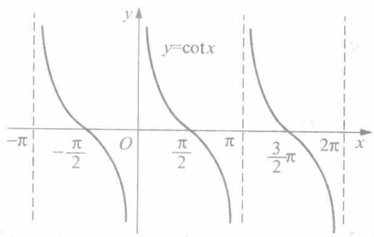
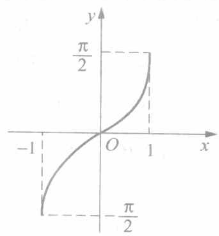
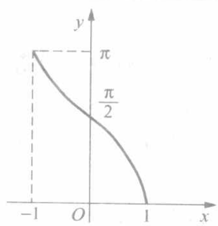
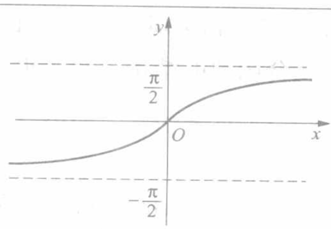
表 1.2.1　　常用的基本初等函数的性质及图像

函数名称	表达式		定义域与值域	图　像	性　质
常量函数	$y=c$ （c 为常数）		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\{c\}$		图形是过点（0，c）且平行于 x 轴的直线
幂函数	$y=x^{\alpha}$ （α 是实数）	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，单调增加
		$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数，在（$-\infty$，0）内单调减少，在（0，$+\infty$）内单调增加
		$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，单调增加
		$y=\sqrt{x}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加

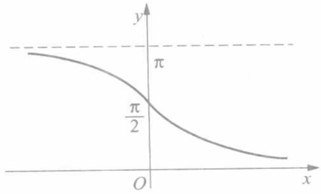
续表

函数名称	表达式		定义域与值域	图像	性质
幂函数	$y=x^{\alpha}$（α是实数）	$y=\frac{1}{x}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数，在$(-\infty,0)$及$(0,+\infty)$内单调减少
		$y=\frac{1}{x^2}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		偶函数，在$(-\infty,0)$单调增加，在$(0,+\infty)$内单调减少
指数函数	$y=a^x$ $(a>0, a\neq1)$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
					单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>0, a\neq1)$		$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
					单调减少 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$
三角函数	$y=\sin x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期为2π，有界．在区间$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$内单调增加，在区间$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$内单调减少

续表

函数名称	表达式	定义域与值域	图　像	性　质
三角函数	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,\ +\infty)$ $y\in[-1,\ 1]$		周期为 2π，偶函数，有界．在区间 $[2k\pi-\pi,\ 2k\pi]$ 内单调增加；在区间 $[2k\pi,\ 2k\pi+\pi]$ 内单调减少
	$y=\tan x$	$x\in\{x\mid x\in R,$ $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},$ $k\in Z\}$ $y\in(-\infty,\ +\infty)$		周期为 π，奇函数，在区间 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},\ k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 单调增加
	$y=\cot x$	$x\in\{x\mid x\in R,$ $x\neq k\pi,$ $k\in Z\}$ $y\in(-\infty,\ +\infty)$		周期为 π，奇函数，单调减少区间为 $(k\pi,\ k\pi+\pi)$
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,\ 1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,\ 1]$ $y\in[0,\ \pi]$		单调减少，有界
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,\ +\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界

续表

函数名称	表达式	定义域与值域	图 像	性 质
反三角函数	$y=\operatorname{arccot}x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少，有界

1.2.2 复合函数、初等函数及分段函数

1. 复合函数

在实际问题中，会遇到许多较复杂的函数，还有的函数的两个变量间的联系不是直接的，而是通过第三个变量来联系. 例如，一质量为 m 的物体，以初速度 v_0 向上抛，则动能 E 是速度 v 的函数，即

$$E=f(v)=\frac{mv^2}{2},$$

而速度 v 又是时间 t 的函数（略去空气阻力），即

$$v=\varphi(t)=v_0-gt,$$

这样，动能 E 可通过变量 v 表示成 t 的函数，有

$$E=f(v)=f[\varphi(t)]=\frac{m(v_0-gt)^2}{2}.$$

通常我们将这种由简单函数“叠加”而成的函数称为复合函数.

定义 1.2.1 设 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且当 x 在 $\varphi(x)$ 的定义域或其一部分取值时，$\varphi(x)$ 的函数值包含在 $f(u)$ 的定义域内，则通过变量 u，y 成为 x 的函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，并称它是由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**，变量 u 称为**中间变量**，其定义域是使 $u=\varphi(x)$ 的函数值包含在 $y=f(u)$ 的定义域内所对应的 x 取值的全体.

例如，函数 $y=\arcsin(1-x^2)$ 是由 $y=\arcsin u$ 和 $u=1-x^2$ 复合而成的，其定义域由 $|1-x^2|\leqslant 1$ 解得 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$，即 $x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

应当注意的是，并不是任意两个函数都能复合成一个复合函数的. 例如，$y=\arcsin u$ 和 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数，因为 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 和 $u=2+x^2$ 的值域 $[2,+\infty)$ 的交集是空集，即 $u=2+x^2$ 值域不在 $y=\arcsin u$ 的定义域内，它们不能构成复合函数.

复合函数不仅可以由两个函数复合而成，也可以由三个及以上函数复合而成. 相对于复合函数而言，我们把基本初等函数和多项式称为简单函数.

【例 1.2.1】 分析下列复合函数的结构，将其拆为简单函数：

(1) $y=\sqrt{\sin\frac{x}{2}}$； (2) $y=e^{\tan(x^2+1)}$； (3) $y=\ln\ln x$.

解 (1) $y=\sqrt{\sin\frac{x}{2}}$ 由 $y=\sqrt{u}$、$u=\sin v$ 和 $v=\frac{x}{2}$ 复合而成；