高等師範學校交流講義

# 近世幾何學

孫澤瀛編

高等教育出版社

# 高等師範學校交流講義說明

高等師範學校交流講義，是各校比較成熟的自編講義，主要在供教學參考，以提高講課、實驗和實習的質量。它的出版過程，是各校向教育部推薦編寫得較好的講義，交有關出版社出版，新華書店內部發行的。交流講義的內容，因限於編者的水平和出版社的編輯力量，可能還存在某些缺點或錯誤。為了進一步提高講義的質量，從而遴選其中比較優秀的作為試用教科書或教學參考書出版，歡迎使用講義的學校和讀者多多提出補充修正的意見（按講義內讀者意見表填寫），直接寄給出版社，以備修訂時參考。

中華人民共和國教育部

# 目　　錄

## 第三篇 二維幾何學

# 第四篇 三維幾何學

# 序　　言

本書的材料曾作爲華東師範大學數學系三年級近世幾何一科的教材,以及數學科二年級的部份教材。使用以來的結果,還令人相當滿意。因爲目前我國師範學院有關近世幾何的教材還很缺少,所以本書可充爲師範學院數學系教學參考書之用。

本書稱爲近世幾何學,顧名思義,應合乎近世數學的精神。那就是在內容方面以射影幾何學爲主,在方法方面以代數法爲主。因爲射影幾何學的範圍特別廣大,可以包含許多其他的幾何學,例如歐氏幾何學、非歐幾何學、仿射幾何學等。有了它纔可以居高臨下地遍察各種幾何學的聯繫,擴大學生對幾何學的認識。因爲用了代數方法,幾何學與代數學纔可以互相結合,更進一步與分析學也可以發生關係。像這樣地把幾何、代數與分析統一起來而不孤立地單獨研究,正是近代數學的特點。更因爲利用了代數方法,纔可以比較統一地去處理幾何學的問題,並可以闡明幾何學的系統及關聯,有了解析幾何與高等代數作基礎,這種方法應該是可以接受的。

但是本書內也絕不忽視綜合方法。因爲它對於某些幾何問題的處理比較來得簡捷;而且初等幾何的問題如何利用近世幾何的觀點來處理,也有待於綜合法的應用。在已學過初等幾何的基礎上,再引進射影幾何裏的綜合方法,在彼此照應上,也有它的好處。

本書的第一篇通論部份主要是概括地提出幾何學內容的豐富性與範圍的廣大性,使學生曉得以前所學的歐氏幾何學在整個幾何學內所處的地位。這樣一開始就刺激學生在深度與廣度方面去探究幾何學的全貌。

有了以上的刺激作用，本書內容就開始細緻地介紹第二篇的一維射影幾何學作爲以後的準備。有了這些準備後纔進入內容的主要部份；第三篇的二維幾何學，在這裏面以射影幾何學爲主，牽涉到仿射與歐氏幾何學；並且總結性地把這三種幾何學作出比較。這樣纔可使學生對這些幾何學的關聯和系統有概括而清晰的認識。

在這種認識之下，更突出地用二次曲線爲例來闡述它的射影性質、仿射性質與度量性質以配合上述的三種幾何學。講到度量性質時，就引起了度量觀念擴充的要求，因此就發生射影測度的規定。從此很自然地引進非歐幾何學。在概括地介紹了非歐幾何學之後，就有必要把射影、仿射、歐氏與非歐等幾何學再來個總結性的比較，得出它們的關聯與系統。

爲了與二維幾何學比較起見，又引進了第四篇的三維幾何學。在這裏面，三維的點幾何學與平面幾何學有許多地方和二維的點幾何學與直線幾何學相似，所以內容比較簡單一些。最後提到圓幾何學，目的是使學生知道除了熟知的點、線、面可以作爲幾何元素構成幾何學外，還可以用圓作爲幾何元素構成幾何學，因而簡單地引到保角幾何學，藉以擴大學生對幾何學的認識。

在有關章節之末都附得有習題，充作業之用。有時還附有例題，個別較難的習題，連解法都寫出來了，這是爲了減輕作業負擔，並作解題參考之用。在例題與習題裏，隨時可以發現如何利用近世幾何學的觀點去處理初等幾何與解析幾何的問題。像這樣地以初等幾何、解析幾何爲基礎來闡述近世幾何學，同時又把近世幾何學的觀點應用到前兩者去，這是本書的一個特點。

爲了適應各地學生的具體情況起見，本書的內容並不要求全部教完。在必要時可以省去第四章全章、第六十一節全節、第十九章全章不講。這樣的精簡對本書的主要精神與系統不生什麼影響。

因爲蘇聯的師範學院沒有近世幾何一科，所以編者得不到很恰當

的教學大綱供參考，而且為了配合我國師範學院教學計劃中對近世幾何一科的要求，所以編者很冒昧地照自己的安排編了這本書。因為本人的學識淺薄，內容不妥當的地方一定很多，如果讀者能提出批評、指正，這是編者所深切企望的。

末了，編者要感謝華東師範大學數學系的王慧怡同志，她不僅提供了一些習題，並且還幫助編者校讀了原稿，改正了幾處不妥當的地方。

孫澤瀛

1955 年 5 月於上海

# 第一篇　通論

## 第一章　幾何學的一般介紹

### §1. 幾何學的對象

作爲數學中三大部門之一的幾何學所研究的對象是什麽呢？不消說是圖形的性質了。那些性質呢？我們先檢查一下所熟知的歐氏幾何學吧，我們就發現了所研究的性質是與圖形的特定位置無關的。所謂"與特定位置無關"這句話又是什麽意義呢？這就是說一個圖形允許它在所處的空間内任意搬動。因搬動的地點不同，於是就由一個圖形產生了許多其他地點的圖形，這些圖形因爲是由同一圖形搬動而產生的，我們把它當做是不同地點的同一圖形。歐氏幾何學就是研究這些不同地點的同一圖形的性質。換句話說，就是研究圖形在搬動之下不變的性質。

搬動是一種變換，是不是還有其他的變換呢？當然有的，例如把圖形放在燈光的前面，投影到牆壁上去，這時在牆壁上得到另一圖形可說是經過投影變換由原圖形得到的。在這種投影變換（或稱射影變換）之下，研究圖形的不變性質，又是另一種幾何學的對象了，這幾何學就是以後我們所要討論的射影幾何學。

這樣說來：是不是凡有一種變換，就有一種幾何學呢？這又不然，以後我們將要詳細討論到：凡是與一種幾何學相對應的變換，其全體必須組成一個"羣"，相反地，凡是一種變換，其全體能組成"羣"，就可以對這一變換"羣"研究圖形的不變性質而得到相應的幾何學。

因爲變換羣的不同，就有不同的幾何學，目前我們所熟知的，有：

（1）擺動（運動）變換羣——歐氏幾何學，

（2）仿射變換羣——仿射幾何學，

（3）射影變換羣——射影幾何學。

## §2. 幾何學所用的方法

幾何學所用的最原始的方法就是由歐幾里得起一脈相承的所謂“綜合法”。這個方法的精神是純粹建築在幾何基礎上的，與代數和分析無關。它是以一些原始的命題，稱爲公理或公設的，作爲依據，以一定邏輯推理法演繹出一連串的定理。這正是我們所熟知的初等幾何學中所用的方法。

另一種方法是代數法，那是利用坐標的觀念，將圖形與數結合起來，然後利用代數的理論與運算來研究幾何圖形的性質，解析幾何學就是利用這種方法的。

還有一種方法叫分析法，那是利用數學分析的理論與方法來處理幾何圖形的。這時圖形的性質僅限於微小區域內，微分幾何學就是靠這種方法的。

因爲使用的方法不同，所以又有不同名稱的幾何學。

（1）綜合法——綜合幾何學，例如初等幾何學，

（2）代數法——代數幾何學，例如解析幾何學，

（3）分析法——微分幾何學。

## §3. 幾何元素

構成幾何圖形的基本東西，稱爲幾何元素。普通以點作爲幾何元素，一根曲線或一個曲面都看做是由點組成的。如用術語來講，曲線與曲面是點的軌跡，但在高等幾何學的範圍內，除掉點以外，直線、圓、球等都可以作爲幾何元素。例如說一條曲線吧，我們可以把它當做是一

族直線的包絡,這時曲線可以說是由直線組成的。因此,直線就可以看做是幾何元素。同樣地,幾何圖形有時也可以看做是由圓或球所組合的,這時,圓與球就是幾何元素了。

幾何學既然是研究圖形的性質,而圖形的構成是根據幾何元素,因此,由於所取幾何元素之不同,我們有:

(1)點幾何學,

(2)直線幾何學,

(3)圓幾何學,

(4)球幾何學

等等。初等幾何學是屬於點幾何學範圍內的。

## §4. 幾何元素之坐標

爲了使代數方法可以應用到幾何裏去,於是代數裏的基本對象——數,與幾何學裏的基本對象——幾何元素之間就不得不先給以一種關聯,這就是解析幾何學裏所採用的坐標辦法。這種關聯就是數學上的對應關係。凡是一個數或一組數與幾何元素之間成爲一一對應的,那麼,這個數或這組數就稱爲這一幾何元素的坐標。

在普通的解析幾何學裏,我們已經曉得:直線上的點坐標,平面內的點坐標,三維空間內的點坐標了。在第一個情況下,以一個數作爲點的坐標;在第二情況下,以一對數作爲點的坐標;在第三情況下,以三個數所組成的組作爲點的坐標。這些坐標的規定,是先擇取一個坐標系(例如笛氏坐標系)作爲表達形數對應的工具。這一切都是我們所熟知的事情,在此不必多講。

幾何元素既不限於是點,如果取平面內的直線或圓,取三維空間內的平面或球作爲幾何元素時,它們的坐標應如何規定呢?現在分別討論於下:

(1)以平面內的直線爲幾何元素。平面直線的方程式一般可寫成

$$Ax+By+C=0,$$

但是這立刻可化爲

$$ux+vy+1=0,$$

當然，此地的 $u=\frac{A}{C}$, $v=\frac{B}{C}$。根據解析幾何學裏的知識，我們曉得後一方程與平面上不過原點的直線有一一對應的聯繫。可是後一方程是由兩個係數 $u$, $v$ 所決定的，因此平面直線與 $u$, $v$ 有一一對應的聯繫，$u$ 與 $v$ 兩個數所成的數對 $(u, v)$ 就可以當做平面直線的坐標了，稱爲平面直線的坐標，它首先是由卜利克爾(Plücker)所使用的。

從這裏我們看出直線坐標的規定是先有了點坐標的觀念而得出來的，它是點坐標的產物而不是獨立發生的。

(2)以平面內的圓爲幾何元素。有了圓心與半徑就可以決定圓。可是圓心爲平面內的一個點，它是以一對數 $(x, y)$ 作爲坐標的。因此，圓可以用三個數所成的組 $(x, y, r)$ 來決定，這組數裏前面兩個表示圓心坐標，後一個表示半徑。

(3)以空間內的平面爲幾何元素。不過原點的平面方程式可以寫爲

$$ux+vy+wz+1=0,$$

因此，平面的坐標是三個數所成的組 $(u, v, w)$。

(4)以空間內的球爲幾何元素。球是由球心與半徑所決定的。可是球心是空間內的一點，它是以三個數所成的組 $(x, y, z)$ 作爲坐標的。因此，球可以用四個數所成的組 $(x, y, z, r)$ 來決定，這組數裏前面三個表示球心坐標，後一個表示半徑。

## § 5. 幾何學的維

上面我們曾提到，由於幾何元素取法之不同，於是有點幾何學、直線幾何學等等。可是同樣的點幾何學，因爲作爲原始對象的幾何元素可以是直線上的點、平面內的點、空間內的點，於是就有直線上的點幾

何學、平面內的點幾何學與空間內的點幾何學。後面兩種就是一般所稱的平面幾何學與空間(或立體)幾何學。同樣地,我們有平面內的直線幾何學與空間內的直線幾何學。爲了處理方便與統一起見,我們訂下幾何學的"維"。根據"維"的觀念又可把幾何學分成一維幾何學、二維幾何學、三維幾何學等。

什麼是幾何學的"維"呢?這就是作爲原始對象的幾何學元素之活動範圍。嚴格地講,就是它的坐標數目。例如直線上的點幾何學是一維幾何學;平面內的幾何學是二維幾何學,平面內的直線幾何學也是二維幾何學;空間內的點幾何學是三維幾何學,平面內的圓幾何學也是三維幾何學;空間內的球幾何學是四維幾何學。

普通我們說一維空間、二維空間、三維空間,也就是說空間有維的觀點,現在幾何學也有維的觀念,這兩者究竟如何區別呢?關係如何?

爲了說明這一點,我們要先曉得什麼是空間。空間是點所組成的,也可以說空間是點自由活動的範圍,範圍有大小,於是就有不同範圍的空間。一維空間包含在二維空間裏,二維空間包含在三維空間裏。因此我們可以說空間的維,是那構成空間的基本元素——點的活動範圍,或更確切的講,是點活動的自由度,例如說,點活動的自由度是一的話,那就得到一維空間,也就是直線;點活動的自由度是二的話,就得到二維空間,也就是平面。

再看幾何學的維吧,那是幾何元素的活動自由度。幾何元素不限於點,所以幾何學的維可以與所處的空間的維不同,例如平面是二維空間,可是平面內的圓幾何學是三維幾何學。同樣普通簡稱的空間是三維空間,可是它裏面的球幾何學是四維幾何學。

## 習　題

1. 以三維空間內的直線爲幾何元素的幾何學是幾維的?
2. 以平面內的圓錐曲線爲幾何元素的幾何學是幾維的?

### §6. 本書的主要內容

本書的內容係以代數方法爲主，綜合方法爲輔，介紹一維與二維射影的點幾何學與射影的直線幾何學，三維射影的點幾何學與射影的平面幾何學，以及三維的圓幾何學。在講述射影幾何時，我們有時也引進仿射性質與度量性質，作爲比較。此外，對於非歐幾何學概要也當做是射影幾何學的特例，而被引進。在這中間，我們還介紹克萊因根據羣論的幾何學分類法，藉此使讀者了解幾何學的系統。

我們對於射影幾何學特別着重的原因，是因爲它的範圍特別廣大，可以包含許多其他的幾何學，例如歐氏幾何學、非歐幾何學、仿射幾何學等。有了它，我們纔可以居高臨下地遍察其他幾何學間的關聯，擴大讀者對幾何學的認識。

我們對於代數方法特別着重的原因，是因爲有了它，幾何學與代數學纔可以互相結合，更進一步與分析學也可以發生關係。像這樣的把幾何、代數、分析統一起來而不孤立地分別研究，這正是近代數學的趨勢，更因爲利用了代數方法，我們纔可以比較統一地處理幾何學上的問題，更可以闡明幾何學的系統以及各種幾何學的關聯。有了解析幾何學作基礎，我們採取這種方法，應該是可以接受的。

但是我們也絕不忽視綜合方法，因爲它對於某些個別的幾何問題，解決得比較簡捷。在已學過初等幾何學的基礎上，再引進射影幾何內的綜合方法，在彼此照應起見，也有它的好處。

## 第二章 射影幾何學的一般介紹

### §7. 射影幾何學的發生

射影幾何的起源最初是由於繪圖和建築上的需要。當一個畫家要