高等学校教学用書

高等数学教程

第一卷 第一分册

A. K. 伏拉索夫著

商 务 印 書 館

高等学校教学用書

高等数学教程

第一卷　第一分册

A. К. 伏拉索夫著
东北工学院数学教研組譯

商务印書館

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико—теоретической литературы）出版的伏拉索夫（А. К. Власов）著“高等數學教程”（Курс высшей математики）第一卷1952年第五版修訂版譯出的。原書經蘇聯高等教育部審定爲高等工業學校教學參考書。

本書共二卷，第一卷中譯本分上下兩個分册出版。

參加本書翻譯工作與校訂工作的爲童勤謨、柳孟輝等二十九位同志。

高　等　数　学　教　程

第一卷　第一分册

东北工学院数学教研組譯

★版權所有★

商　務　印　書　館　出　版

上海河南中路二一一號

（上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號）

新　華　書　店　總　經　售

商　務　印　書　館　上　海　廠　印　刷

(13017·4)

1953年9月初版	開本 850×1168 1/32
1956年5月3版	字數 211,000
1956年11月上海第3次印刷	印數 15,001—18,000
印張 7 12/16	定價(8) ¥ 0.90

第一版序言

這本"高等數學教程"是我在莫斯科商業專科學校和美術、彫刻建築學校的建築科任教時，爲我的聽衆所寫的講義。對於這些專業興趣不是集中在數學的學生來說，數學的學習祇是一種手段，並非是自足的目的。但是自然科學和工藝技術向數學所提出的那些要求，是不能僅化爲單純的收集些有應用價值的公式而已。數學是不可以把它當作萬應靈方大全那樣來研究的。數學不僅就其自足的意義而且就其作爲輔助手段的意義來說，都在於養成一種數學思維的習慣。受過數學訓練的頭腦，即使在所儲備的知識很少的時候，仍然能夠把這些知識運用到適當的目的上去。而若沒有數學思維的習慣，就是有定理和公式的大量積蓄，也祇是無目標的，身外的，不需要的財富。

一本講義應該追求的目的就是要啓發學習者的思想達到能夠獨立工作，因而不得不超出考試大綱和要求的範圍，才能使學生發覺在聽講時所接觸到的一些思想，在講義中已經發揮得淋漓盡致了，並且在其中還可以找得出以問題和練習形式出現的獨立工作材料。爲了將學習者在學習數學時引入這種必要的獨立工作，本書中有許多解答問題的例子，這些問題既具有實際或理論的興趣，同時又適合本書數學觀念的發展過程。同樣的目的，使我們或多或少保持着敍述的特點——從具體到抽象，反過來運用抽象到具體；本書也非常注意於預先說明問題的提出本身及其意義，然後才跟隨着問題的開展。

本教程分爲兩卷。第一卷包括：(1)平面及空間解析幾何；(2)微分和積分的第一部份。在這第一部份內，建立了分析的基本概念，如函數的概念（一個自變量的），極限理論，導函數，微分和積分的概念及其

幾何意義；指出了求微分和積分的方法(並沒有詳盡的討論到有理分式和超越函數的積分法）以及積分在幾何方面的應用。微分和積分的第二部份（有理分式和超越函數的積分，多變量函數，將函數展成級數等等)構成第二卷的內容，在這裏也涉及到分析學在幾何方面的應用。因此，第一卷的任務是基本原理和方法的建立，而第二卷則是它們的發展。

A. 伏拉索夫　1914年6月6日，莫斯科

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

原出版者聲明

已故 A. K. 伏拉索夫教授的這本教程有着十分豐富的教學優點。著者在不甚大的篇幅中，用簡單明瞭的形式向讀者介紹了高等數學——諸如解析幾何，微分和積分，高等代數等等——的基礎知識。本書主要的是供高等工科學校的學生使用。但是，對於並非以數學爲基礎課程的高等學校（例如大學裏的化學，地理以及經濟系等）來說，採用本書作爲參考書也是很合適的；同樣它也可供師範專科學校作爲教學參考書之用。在初讀時，第四章的 § 10, 11, 以及 § 15 可以略去，這對後面材料的理解並無妨害。

H. A. 格拉高萊夫教授參與了本書校訂工作的大部分，其中第二卷最後三章的原文（由於原著者的去世所未完成者）也是由格拉高萊夫教授所續成的。Д. A. 雷依闊夫教授指導了本版以及前此諸版的全部校訂工作，他並對於本書原文做了一系列重大的修正和更動。

第一分册　目錄

引　　論

數學的價值及其基本概念的概述

§1. 數學和自然科學及和實用科學的關係

自然科學家，不論他是爲了理論上的興趣或是爲了實用的目的而研究自然時，只要循着精確研究的道路前進，就必然要碰到這樣的數量關係，它們是不能擱在簡單算術範圍之內的。

把直接研究的結果加以概念化或者建立各種各樣的理論時，在開始他是爲一些簡單的關係所限制，但是在理論上對經驗材料作進一步的加工處理就將遇到各種數量之間的關係，而爲了表達和研究這些關係，就要求有一套完整的數學語言。這樣看來，這套完整的語言常常就是一把不可缺少的鑰匙來爲它的主人打開門來，使他看得見所建立理論的遠景。因此，自然科學家都應該懂得數學語言。

另一方面，工程師，技師，建築師在創造他們的作品時，要力圖很好地利用自然界中的材料以達到爲人們服務的目的。在他們這種意圖當中，首先要注意的一個就是：給與其對象以怎樣的形式，或者把它們安排成怎樣的順序，才能使得其中的種種數量分配得最合適，最便利，最節省人們的勞動。而能以達到這種要求的可能性又是決定於對象的形式和各種數量兩者之間所存在着的關係。要想表達和研究這些關係就必須有一套完整的數學語言。工程師，技師，建築師卽使不是比自然科

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.

學家更好,至少也得與他是同等程度的數學家。數學給他們一種工具,使他們由描圖和計算,一開頭就能預知他們的創作將具有什麼形式,並且在其中,力,質量以及其他種種的量在分配上是否合理。

數學,有它自己所追求的理論目的,但是對於他們來說,數學卻只是一種輔助科學。實用家應當懂得這種作為輔助工具的,如何實際地來運用數學計算的語言,應當學會使用各種數值表,圖式計算(諾模術),速算法和各種圖表等等。總之,實用家應當從理論中首先取出他所需要的。但是,要想能夠從數學中取出所需要的,他就必須面向數學的基本概念,就應該學會在他自己的問題中,用數學的方式來思考,也就是要會將數學的研究方法用到他自己的問題上去。

學習任何一種輔助科學時,最大的困難就是在於養成對這門科學的興趣,而驟然看來,這種興趣與學習者最切近的興趣又相去甚遠。我們不能像看待現成的藥方大全一樣來看待數學,也不能像學習這種大全一樣來學習數學,而只能這樣來學習:它的價值不在於獲得像這樣的一些知識,其中大部分可能是對他沒有直接用處的,而是在學習時獲得一種構成這些知識的概念和方法來思考的素養。

對所學習的科學的旨趣的理解可以作為獲得這種素養最初的推動力,反之,所獲得的素養也會加深我們對數學的旨趣和目的的理解。但是從什麼開始呢?引導到研究數學的最初的興趣到那兒去找呢?一想到數學時,在我們頭腦中所引起的是:數和計算,量和度量,幾何圖形和作圖等基本概念。

首先我們應該懂得:這些名詞的意義是什麼,在此將引起那些問題和困難,那些新的觀念需要聯系到這些概念上去,才能養成對數學的進一步的興趣。

我們的任務不在於遵循哲學的或純知識的目標從各方面分析它的

基礎。我們的目標只在於闡明基本概念的發生過程以及指出數學觀念逐漸形成的途徑。

§2. 數和計算

在數學中，所謂數，是表示一非常複雜的概念的。這個概念是適應理論與實際的要求經逐漸擴充而形成的。首先，由計數組成某一集合的物件，形成**整數**的概念。於是數就表示了這個集合在其相應的——數量的——方面的特性。計數又賦予數的概念另一種性質，就是順序的性質，也就是，數是一個在以某種順序排列的集合中最後一個元素所佔有的位置的記號。數的這個概念就是它的一般概念的雛形，而作爲初步運算(對於數的初步算法)的計數就是關於數的運算的一般概念的雛形，也就是關於計算的一般概念的雛形。

按照數的概念在量和順序方面的性質，在數與數之間**大於**，**等於**，**小於**諸關係的看法上，可以建立兩種觀點。從一種觀點來看，這是量本身之間的關係，從另一個觀點來看，是被比較的數在確定的順序中，所佔位置的分佈情形。

§3. 對於整數的正運算。計算法則

關於整數的正運算，加法和乘法，(按照這些運算的原始定義，可歸結於簡單的計數)，就是結合的計數：以一個整數加另一個整數，以一個整數乘另一個整數，歸根到底就是計數。爲這種運算所具有的性質，同時也就是集合和計數的基本性質或者這些性質的邏輯推論，它們構成下列的基本計算法則，這些法則在擴充數的概念的過程中，起着根本的作用。

A. 加法的基本法則。

1．兩個整數的加法，沒有任何限制，是永遠可以完成的——兩個整數的和仍是整數。

2．兩個整數的加法是一意的運算，卽僅存在有一個整數，它是兩個給定整數的和。

3．**締結律：** $a+(b+c)=(a+b)+c$，卽，一個數與另外兩個數的和相加，可以先與和的第一項相加，然後將所得的結果再與和的第二項相加。

4．**交換律：** $a+b=b+a$，卽，和數不因項的交換而改變。

5．**單向律：** 如果 $a>b$，則 $a+c>b+c$，卽和數隨着項的增大而增大。

對於乘法，也有同樣的法則，但是有不同的內容。

5．乘法的基本法則。

1．一個數乘以另一個數是永遠可以完成的——兩個整數的積仍是整數。

2．一個數乘以另一個數是一意的運算，卽，僅存在有一個數，它是一個整數乘以另一個整數的乘積。

3．**締結律：** $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$，卽，一個數乘以另外兩個數的乘積，可將它先乘以這個乘積的被乘數，然後將所得結果再乘以乘數。

4．**交換律：** $a\cdot b=b\cdot a$，卽，交換被乘數與乘數，其積不變。

5．**單向律：** 如果 $a>b$，則 $ac>bc$，卽，乘積隨着一個因子的增大而增大。

最後，加法與乘法是以所謂分配律聯繫起來的。

6．**分配律：** $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$，卽，一個數乘以另外兩個數的和，可分別乘以和的每一項，然後相加所得之積。

這些法則，在算術的邏輯構造中，有着決定性的意義，而在算術的

初等敍述中，也有主要的意義，因爲數的運算的理論是依據於它們的，將這些運算化爲加法和乘法的基本表的理論也是依據於它們的。

§4. 反運算和數的概念的推廣途徑

反運算——整數的減法和除法，首先就不服從第一個法則：這些運算僅在某些被減數和減數，被除數和除數所必須服從的條件下，才能完成。爲了將這些運算的限制條件解除，就必須引入新的數，就必須推廣數的概念，因此，一方面引入**分數**，另一方面引入**零**和**負數**。

這些新的概念的內容可以不同的方式表示出來——或者較爲抽象，或者較爲具體，這要看在推廣數的概念時，依照着怎樣的趨勢來推廣。但是從具體出發將更爲符合本教程的目的，因此，我們今後對新的數將一直採取較爲具體的說明方式。

§5. 分數

如果由各別的個體（單位）所組成的集合這一概念出發，則爲了定義分數，就必須引入合成單位的概念，即可分成部分的單位的概念。合成單位的概念在計數法中已經有：十，百，千等等就是合成單位的例子。這樣，就有引入分數的可能性。分母表徵對應的單位部分，而分子的作用與整數原來的作用一樣。

在引入分數後，就必須規定對於它們的運算，且必須建立表示它們自己之間的以及它們與整數之間的關係的特徵，而這些關係用話來說就是：大於，等於，小於，並且還必須指明對於分數的計算法則是與對於整數的相同。自此以後，整數和分數就可統一在數的同一個範疇中了。

§6. 量和度量。有理數和無理數

對於連續量的研究會引到更廣泛的結果。這種量的例子就是長度,面積,體積,時間,質量和重量等等。

單位的可分性是包含在這種量的概念之中。數乃是度量連續量(例如,長度)時所得到的。度量的辦法不是前述引導到數的簡單計數,而是在於首先將所度量的量分爲小部分,它們是等於其他一個取作度量單位的同類量,其次,是將剩餘部份分爲小單位,按照所取的計算系統,例如將它分爲原來單位的十分之一,百分之一等等,最後,是在於計算所得到的單位以及度量單位的小單位。在度量的結果中,所得到的數表示所度量的量對於取作度量單位的量的比。在這個意義下,數可以定義爲兩個同類量的比,就是定義爲所度量的量對於度量單位的比。

但是在度量兩個量時,可能有二種情形:所度量的量與作爲單位的量可能是可通約的或者是不可通約的。

在可通約的情形下,度量的運算能夠進行到底❶。最後,沒有剩餘部份,且在這個情形,在度量的結果中,得出有理數❷(即整數和分數),它表出所度量的量對於度量單位的比。

在不可通約的情形下,度量的運算不可能有止境,而是無窮運算過程。但是,在這種情形下,所謂表示所度量的量對度量單位的比的“數”應怎樣來理解呢?在將所度量的量分割成爲等於度量單位和它的小單位如十分之一,百分之一等等的部分時,可以止於有任意大小的小單位,

❶ 如果必須將剩餘分成單位的十進小部分,即將度量的結果表成爲十進分數,則在可通約時,也可以有度量的運算要繼續到無限的情形,即當所度量的量對度量的比是以無窮循分數表出時就是。但是,如引入分單位的另外小部分,而不是十進的,便可避免這個無窮程序。

❷ 兩個同類量,例如線段,的比,古時的幾何學家,按希臘文稱之爲 λογος(發音如羅果斯,字面的意義是“字”),而在拉丁的譯文中,稱之爲 ratio(發音如拉其阿,字面的意義是“理性”)。

丟掉對應的剩餘部分，而計算所得到的部分；這樣就得到前述意義下的數，就是對應較小的量的有理數；如果加上一個大於剩餘部份的小單位，則就有一個對應較大的量的有理數。這些有理數是近似地表示所度量的量對於度量單位的比——一種是盈的，另一種是虧的。第一類的每一數都小於第二類的任意數。在繼續度量的過程中，盈近似值是遞減的，而虧近似值是遞增的。在所度量的量和度量單位不可通約的情形下，虧近似值是遞增的，且沒有最後的值，也即是沒有最大值，而盈近似值是遞減的，且沒有最後的值，也即是沒有最小值。在可通約的情形下，有理數是精確的表示所度量的量和度量單位的比，而且也是一些近似值的最大值和另外一些近似值的最小值，因此，這個數就將一類近似值與另一類近似值分開來。

在不可通約的情形下，每一有理數具有下面兩個性質中的一個且只有一個：或者它小於第二類的任意近似值（盈），或者它大於第一類的任意近似值（虧）。在可通約的情形下，關於每一有理數也可與以上同樣來說，僅僅是那個精確表示所考慮的比的數除外：它是同時小於任意的盈近似值，也大於任意的虧近似值。因此，度量方法本身，不管它是有限運算過程（可通約的情形），或是無窮運算過程（不可通約的情形），都將所有的有理數分爲兩類，能使每一個有理數屬於一個類，而僅僅在可通約的情形下，那個精確表示所度量的量與度量單位的比的數可以隨意歸到兩類中的任意一類。在上一個情形，不僅度量的方法，還有度量結果的數本身，將所有有理數區分爲兩類，按照**德狄欽特**的說法，即在有理數域中引起一個**分劃**。在不可通約的情形呢，雖然在有理數域中引起分劃的數不存在，但是分劃的本身，分有理數爲兩類的劃分，由度量的方法得出的劃分卻是存在的。將有理數分爲兩類的這樣的劃分奠定了推廣“數”的概念的基礎。對於一個線段以另一與其不可通約的線

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com