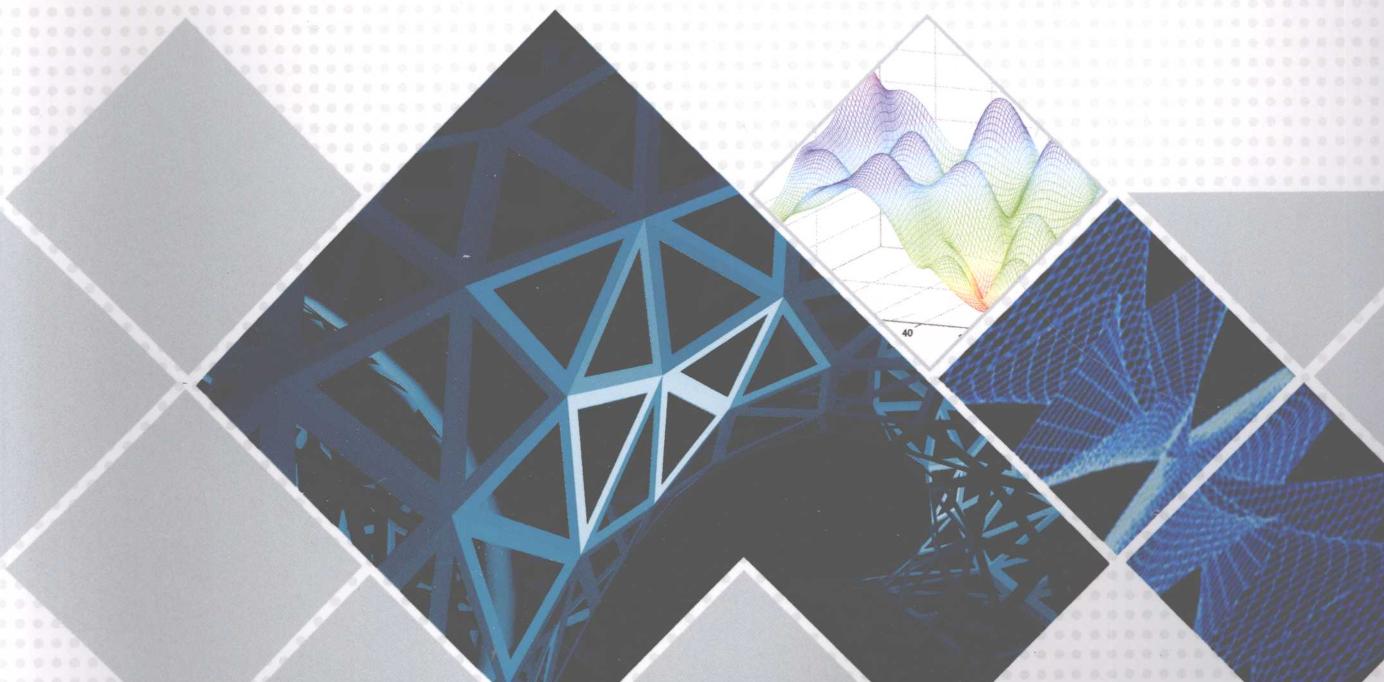
高等教育“十一五”规划教材
公共基础课系列教材

高等数学（上册）

黄坚 主编



科学出版社
www.sciencep.com

高等教育“十一五”规划教材

公共基础课系列教材

高等数学

（上册）

黄　坚　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书分上、下两册，上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何，下册内容包括多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、常微分方程等．书中每节都配有习题，每章配有总习题．附录中还介绍了辅助计算的数学软件，以引导学生计算数学题时使用．

本书结构严谨，概念与例题叙述直观清晰，应用问题贴近生活实际，通俗易懂，可供独立学院非数学专业的理工类学生使用，也可作为普通高等院校非数学专业的教材．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学（上册）/黄坚主编．—北京：科学出版社，2009
（高等教育“十一五”规划教材・公共基础课系列教材）
ISBN 978-7-03-025209-8

Ⅰ．高…　Ⅱ．黄…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 140922 号

责任编辑：沈力匀　张・斌/责任校对：耿　耘
责任印制：吕春珉/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2009 年 8 月第　一　版　开本：787×1092　1/16
2009 年 8 月第一次印刷　印张：10 1/2
印数：1—4 000　字数：250 000

定价：18.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）
销售部电话 010-62134988　编辑部电话 010-62135235（HP04）

高等教育“十一五”规划教材（应用型）
编写指导委员会

前　言

我国高等教育已经逐步进入“大众化”阶段，根据独立学院“应用型人才”的培养目标，以及计算机的广泛应用和数学软件的普及，传统的教材已经不能适应教育改革和发展的需要。因此，我们总结多年本科数学教学经验，在探索独立学院数学教学发展趋势并分析独立学院学生学习特点的基础上，为高等院校独立学院非数学专业的理工类学生编写这本教材.

本教材是依据教育部制定的“高等数学课程教学基本要求”编写而成，以实用、适用为度，兼顾数学知识体系为原则，重在讲数学思想、数学方法、数学应用，以培养学生分析问题和解决问题的能力，并充分考虑到高等数学课程教学时数减少的趋势，适当调整了编写内容. 本书主要体现如下特点：

(1) 以知识模块的实用背景引入概念，研究计算方法，探讨知识模块的广泛应用，强调对基础知识的介绍，内容简明实用.

(2) 数学理论以应用为目的，对理论的要求以能理解及够用为度，淡化对数学理论的深入研究.

(3) 内容不求大而全，不追求高难度的计算技巧，重在数学思想、数学方法及数学应用，让学生学习起来像摘树上的苹果，“跳一跳就能够得着”，学生学起来好学，教师教起来好教.

(4) 对计算量大的数学问题，注意引导学生利用数学软件辅助计算，以便从烦琐的计算中解脱出来.

(5) 例题由浅入深，通俗易懂，贴近生活实际，讲解直观有效而不失严密，适合独立学院学生的基础特点及教学要求.

书中打 * 号部分可作为选学内容.

本教材是多所院校合作的结晶，参加编写的人员还有桂林理工大学博文管理学院何宝珠、广西大学行健文理学院黄宗文、广西工学院鹿山学院梁道源、广西师范学院师园学院周玉兴、桂林电子科技大学信息科技学院袁媛、广西大学行健文理学院蒋婵、广西工学院鹿山学院庞琳娜等. 附录部分由桂林电子科技大学信息科技学院余文质提供.

由于水平所限，书中难免有不足之处，请广大师生不吝赐教，以期不断改进.

目　　录

(上册)

第1章　函　　数

§1.1　函数的概念及简单性态

函数是现代数学的基本概念之一，也是高等数学的主要研究对象，本章除了复习中学已经学习过的函数有关知识以外，还将介绍极坐标与参数方程的概念.

1.1.1　区间与邻域

定义 1.1　介于两个实数 $a,b(a<b)$ 之间的全体实数，称为**区间**，a,b 为区间的端点，$b-a$ 称为**区间的长度**.

区间的分类如下：

(1)开区间：

$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$，

$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$，$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$.

(2)闭区间：

$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$.

(3)半开半闭区间：

$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$，　　$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$，

$(-\infty,b]=\{x\mid -\infty<x\leqslant b\}$，　$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\}$.

定义 1.2　以 a 为中心，$\delta>0$ 为半径的开区间，称为**点 a 的 δ 邻域**，记为 $U(a,\delta)$，如图 1.1(a)所示.

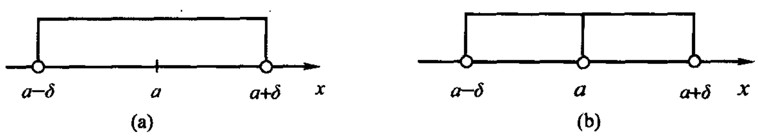


图 1.1

a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 可以用集合或不等式表示为

$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$.

点集

$$\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$$

称为**点 a 的 δ 去心邻域**，如图 1.1(b)所示，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

根据邻域的定义可知，以 a 为中心的任何开区间都是 a 的邻域. 一般地，如无须特别指明邻域的半径时，a 的某一邻域可简记为 $U(a)$.

1.1.2 函数的定义

在自然界和人类社会中，存在着诸多变化的量(变量). 例如，在密闭容器内，当温度不变时，气体的压强会随容器的容积而变化；某城市一天的温度会随时间而变化. 但这些变量并不是孤立的，而是相互联系并遵循某种规律. 函数就是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型.

定义 1.3 设 x 和 y 是两个变量，D 是 R 的非空子集. 如果对于每个 $x \in D$，按照对应法则 f，总有确定的 y 值与之对应，则称 **y 是 x 的函数**，记为

$$y = f(x), x \in D.$$

其中 x 为**自变量**，y 为**因变量(或函数)**，D 称为函数的**定义域**.

$f(x_0)$ 表示当 $x = x_0 (x_0 \in D)$ 时的函数值. 当 x 取遍 D 的所有值时，对应的函数值构成的集合称为函数的**值域**.

函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 与对应的法则 f 是构成函数的两大要素，它们一经确定，则该函数就完全确定下来. 所以两个函数相等的充要条件是它们的定义域和对应法则完全相同.

例 1.1 求函数 $y = \sqrt{1 - x^2}$ 的定义域、值域，并画出其图像.

解 由 $1 - x^2 \geqslant 0$ 得定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,1]$，图像为半圆(图 1.2).

例 1.2 求函数 $y = \dfrac{\sqrt{3-x}}{\lg(x^2-1)}$ 的定义域.

解 由 $\begin{cases} 3 - x \geqslant 0 \\ x^2 - 1 > 0 \\ \lg(x^2 - 1) \neq 0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x \leqslant 3 \\ x > 1 \text{ 或 } x < -1 \\ x \neq \pm\sqrt{2} \end{cases}$，

在数轴上如图 1.3 所示.

所以，函数的定义域为 $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 3]$.

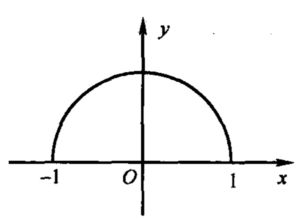


图 1.2

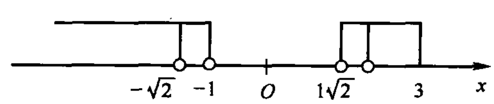


图 1.3

根据函数表达式的不同，可将函数分为显函数、隐函数和分段函数三种.

(1) 显函数：y 由 x 的解析式直接表示，例如 $y = x^3 + 3$.

(2) 隐函数：y 和 x 之间的对应关系由方程 $F(x,y) = 0$ 确定，例如函数 $y = f(x)$ 由方程 $e^x \cos(x + y) = 1$ 确定.

(3) 分段函数：$y = f(x), x \in D$，在 D 的不同范围内具有不同的数学表达式.

例如

绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases},$$

其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$，如图 1.4 所示.

符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases},$$

其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{-1,0,1\}$，如图 1.5 所示.

取整函数

$$y=[x],$$

表示不超过 x 的最大整数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\boldsymbol{Z}$，如图 1.6 所示，比如

$$[\mathrm{e}]=2,[\pi]=3,[-3.5]=-4,[\sqrt{2}]=1.$$

狄利克雷函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\in\boldsymbol{Q}\\ 0, & x\in\overline{\boldsymbol{Q}}\end{cases},$$

其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{0,1\}$，它没有直观的图形表示.

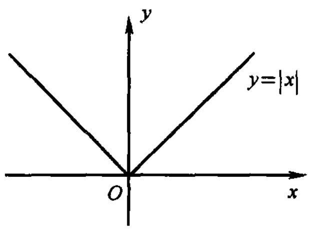


图 1.4

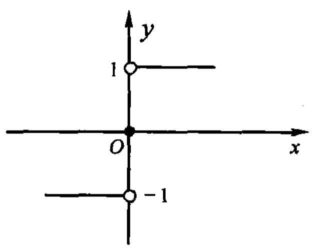


图 1.5

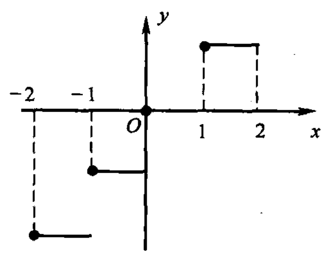


图 1.6

1.1.3 函数的简单性态

显然，反映自然现象和社会现象中变量间的依从关系的函数五花八门，各不相同，但可以借助函数的一些简单形态，研究函数的变化规律.

1. 有界性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，若存在实数 m 和 $M(m<M)$，使对于 D 中的一切 x，都有

$$m\leqslant f(x)\leqslant M$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是**有界函数**，m 为下界，M 为上界. 若 m,M 都不存在，则称函数为**无界函数**.

函数 $f(x)=\sin x, f(x)=\cos x, f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ 都是定义域内的有界函数，因为在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内，有 $|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，$\left|\frac{x}{1+x^2}\right|<1$.

函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内有界，在 $(0,1)$ 内无上界，但有下界.

2. 单调性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，对于 D 中的任意 $x_1<x_2$，若

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 是区间 D 上的**单调增加函数**；若

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称 $f(x)$ 是区间 D 上的**单调减少函数**.

函数的单调性总是与区间相联系. 例如 $f(x)=x^2$，在 $(-\infty,0)$ 上为单调减少函数，而在 $(0,+\infty)$ 上为单调增加函数，但在 $(-\infty,+\infty)$ 上为非单调函数.

对较复杂的函数，用定义判断函数的增减性有较大的困难. 在此不作过多介绍，在本书第 4 章，我们将用导数判断函数的单调增减性.

3. 奇偶性

从函数 $y=x^2, y=\frac{1}{x^2}, y=\sqrt[3]{x^2}$ 的图形中，我们发现，它们的图形都是关于 y 轴对称，此类函数我们称为偶函数；而函数 $y=kx, y=x^3, y=\frac{1}{x}$ 的图形都是关于坐标原点对称，此类函数称为奇函数，下面从代数的角度描述函数的奇偶性.

定义 1.6 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，对任意的 $x\in D$，若

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**；若

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于坐标原点对称.

三角函数中，$y=\sin x, y=\tan x, y=\cot x$ 都是奇函数，$y=\cos x$ 为偶函数.

例 1.3 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$；　　(2) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

解 (1) 函数定义域为 $(-\infty,+\infty)$，因为

$$f(-x)=\frac{e^{-x}+e^{-(-x)}}{2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2) 函数定义域为 $(-\infty,+\infty)$，因为

$$
\begin{aligned}
f(-x) &= \ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2}) = \ln(-x+\sqrt{1+x^2}) \\
&= \ln\frac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}} \\
&= \ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} = -\ln(x+\sqrt{1+x^2}),
\end{aligned}
$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

4. 周期性

定义 1.7　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在正数 $T>0$，使得对于一切的 $x\in D$，都有

$$f(x\pm T)=f(x),$$

其中 $x\pm T\in D$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的一个周期.

由定义可知，若 T 是 $f(x)$ 的周期，且 $x\pm nT\in D$（n 为非零整数），则 nT 也是 $f(x)$ 的周期，这是因为

$$f(x)=f(x\pm T)=f[(x\pm T)\pm T]=f(x\pm 2T)=\cdots=f(x\pm nT).$$

由此可见，满足 $f(x\pm T)=f(x)$ 的 T 是无穷多个的，所以周期函数的周期通常指的是最小正周期. 但常量函数 $y=C$ 没有最小正周期.

函数 $\sin x,\cos x$ 的周期为 2π，函数 $\tan x,\cot x$ 的周期为 π；而函数 $|\sin x|$，$|\cos x|$ 的周期都是 π，$|\sin x|+|\cos x|$ 的周期是 $\frac{\pi}{2}$.

一般地，正弦型函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期为 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$，正切型函数 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$ 的周期为 $T=\frac{\pi}{|\omega|}$，其中，A,ω,φ 均为常量.

习题 1.1

1. 写出以点 -4 为中心，以 $\frac{1}{3}$ 为半径的邻域和去心邻域表示式，并用含绝对值不等式表示.

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{3x-x^3}$；　　(2) $y=\arcsin(2x+1)$；

(3) $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$；　　(4) $y=\ln(2x+1)+\sqrt{4-3x}$.

3. 计算下列各函数在给定点处的值：

(1) $f(x)=x^2-2x+5$，求 $f(-2),f(x+h),f(2x),f\left(\dfrac{1}{h}\right)(h\neq 0)$.

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\left(1-\dfrac{t-x}{\sqrt{t^2-2tx+x^2}}\right),t>1$，求 $f(-1),f\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<10\\ 1+x^2, & 10\leqslant x<20\\ x-10, & 20\leqslant x\leqslant 30\end{cases}$，做出此函数的图形,并求 $f(0)$,$f(5)$,$f(25)$ 的值.

5. 若 $f(x)=\sqrt{x}$，证明

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x}}.$$

6. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}$；　(2) $y=|x\sin x|e^{\cos x}$；

(3) $f(x)=\sin 2x-\cos x+1$；　(4) $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$；

(5) $f(x)=\ln\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；　(6) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$.

7. 证明:任何一个定义在 $(-a,a)(a>0)$ 内的函数都可以表示成一个奇函数和一个偶函数之和.

§1.2 初等函数

1.2.1 反函数

就关系而言,一般是双向的,函数关系亦如此.但当两个变量 x,y 存在依赖关系时,哪个是自变量,哪个是因变量(函数),有时并不是确定的,而是由具体问题决定.

例如,正六面体的边长为 x,体积为 V.若由边长确定体积 V,则 x 是自变量,V 是因变量(函数),且

$$V=x^3.$$

反之,若由体积求边长时,则 V 是自变量,x 为函数,且

$$x=\sqrt[3]{V}.$$

我们称 $x=\sqrt[3]{V}$ 是 $V=x^3$ 的**反函数**(事实上,两者互为反函数).

定义 1.8 设 $y=f(x)$ 是 D 上的一一对应函数,值域为 W.若对于任意的 $y\in W$,由 $y=f(x)$ 可求出唯一确定的 $x\in D$,记为 $x=f^{-1}(y)$,则称 $x=f^{-1}(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数.

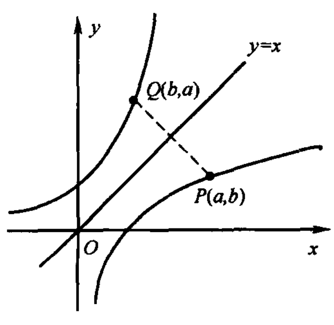


图 1.7

习惯上,把 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(x)$ 写成 $y=f^{-1}(x)$.例如,$y=2x+3$ 的反函数为 $x=\dfrac{y-3}{2}$,即 $y=\dfrac{x-3}{2}$.

只有一一对应的函数才有反函数;在同一坐标系内,$y=f(x)$ 及 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称(图 1.7).

例 1.4 求 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数,并指出反函数的定义域.

解　由 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$ 得

$$2^x y+y=2^x \quad \text{即} \quad 2^x=\frac{y}{1-y},$$

求得 $x=\log_2\frac{y}{1-y}$，所以 $y=\frac{2^x}{2^x+1}$ 的反函数是 $y=\log_2\frac{x}{1-x}$，其定义域由 $\frac{x}{1-x}>0$ 求出，$x\in(0,1)$.

1.2.2　基本初等函数

基本初等函数包括六类：常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数. 这是中学数学的重要内容，在此仅作简要归纳.

(1) **常量函数** $y=C$（常量）.

常量函数是一条平行于 x 轴的直线，它在 y 轴上的截距为 C.

(2) **幂函数** $y=x^\alpha$.

常用的幂函数有 $y=x, y=x^2, y=\sqrt{x}, y=x^3, y=\frac{1}{x}$，它们的图像如图 1.8 所示.

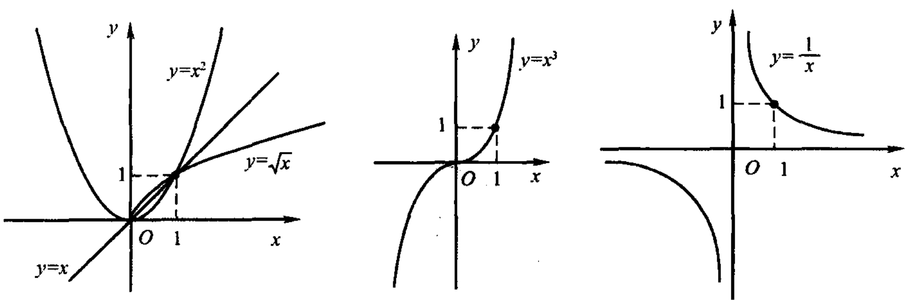


图 1.8

(3) **指数函数** $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$. 最常用的指数函数为 $y=e^x$.

(4) **对数函数** $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$. 最常用的对数函数为 $y=\lg x$ 与 $y=\ln x$.

指数函数 $y=a^x$ 和对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数，它们的图像关于直线 $y=x$ 对称. 当 $a>1$ 时，它们都是增函数；$0<a<1$ 时，它们都是减函数. 图 1.9 为指数函数的图像，图 1.10 为对数函数的图像.

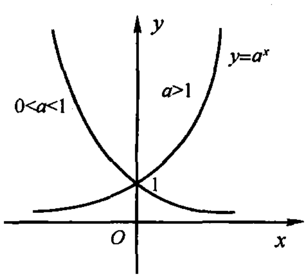


图 1.9

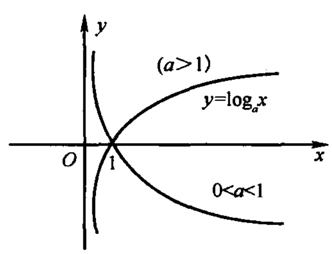


图 1.10

(5) **三角函数**(表 1.1).

常用的三角函数有 $y=\sin x$(图 1.11), $y=\cos x$(图 1.12), $y=\tan x$(图 1.13), $y=\cot x$(图 1.14), $y=\sec x$, $y=\csc x$.

表 1.1

函数	定义域	值域	奇偶性	周期
$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$y\in[-1,1]$	奇函数	2π
$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$	$y\in[-1,1]$	偶函数	2π
$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$	$y\in(-\infty,+\infty)$	奇函数	π
$y=\cot x$	$x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$	$y\in(-\infty,+\infty)$	奇函数	π

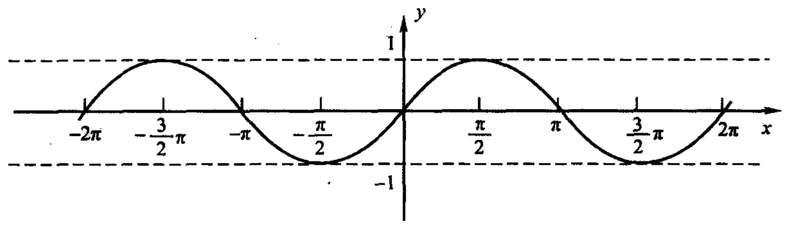


图 1.11

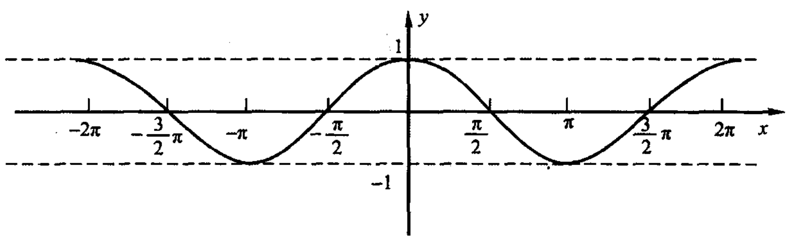


图 1.12

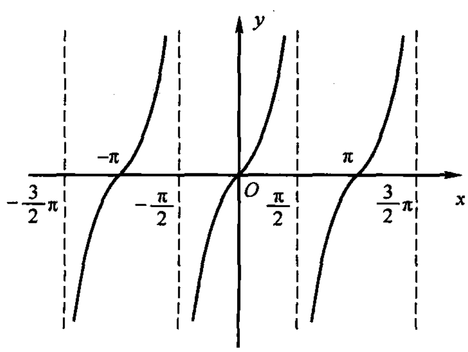


图 1.13

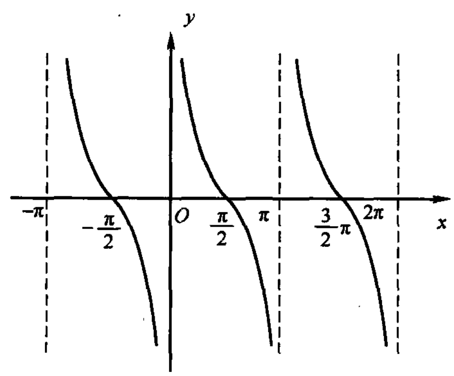


图 1.14

三角函数值的符号图如图 1.15 所示.

常用的与三角函数有关的公式: