张嘉林 主编

GAODENG SHUXUE

高等数学

全国高等农业院校教材

全国高等农业院校教学指导委员会审定

中国农业出版社

中华农业科教
基金资助

ISBN 7-109-06247-3

9 787109 062474 >

ISBN 7-109-06247-3/O·

定价：19.70 元

013-43
200005

开始

目录

$\max(x_1, x_2, x_3; x_{10})$

x_{i-1} x_i

Figo

Beckham

Zidane.

家母痛哭游子泪

浪子痛恨家母骂

老母痛哭游子泪

浪子痛哭慈母骂

第一章

函数、极限与连续

极限概念是高等数学中一个最重要和最基本的概念之一，微积分学中的一些基本概念以及微积分的一些运算与性质的论证都要用到极限. 学习高等数学首先要过好极限关，要掌握好极限的概念、运算及基本性质. 本章首先复习函数，然后介绍函数的极限和函数的连续性概念.

§1.1　变量与函数

函数概念是高等数学中最基本的概念之一. 函数是高等数学的研究对象，是客观世界中变量之间依从关系的反映，是许多科学技术中表达自然规律的基本概念. 读者在中学已经学过一些有关函数的知识，我们将在初等数学的基础上对函数概念作进一步讨论.

一、常量与变量

当我们研究或观察某种自然现象或技术过程时，经常会遇到各种不同的量. 例如：在物理学中有质量、温度、力、速度等；在化学中有原子量、分子量、溶解度、摩尔浓度等;在几何中有长度、面积、体积等. 其中有些量在所研究的过程中保持不变，这种量叫做常量. 另外有些量在这个过程中可取得各种不同的数值，这种量叫做变量.

例如，某物体自某一高度自由下落时，物体的质量保持不变，是常量；物体与地面的距离以及物体的下落速度都在变化，是变量.

又例如，在圆的半径增长的过程中，圆的直径、圆的周长、圆的面积都是变量；而圆的周长与其直径之比却是一个常量(数 π).

值得注意的是，我们说一个量是常量或变量，都是指在某一确定的现象或过程中来说

的．同一个量在某种情况下可以看成是常量，而在另一种情况下又可能是变量．例如，半径为 r 的圆，半径保持不变．在沿着一条平面直线滚动的过程中，圆的面积 πr^2 是一个常量；在当圆心固定，半径增大的过程中，则圆的面积就变成一个变量了．

在高等数学中，为了研究问题方便，有时把常量看成是取同一个值的变量，即把常量当做一种特殊形式的变量来看待．

常量一般用字母 a、b、c 等表示，而变量用字母 x、y、z 等表示．

因为变量 x 的每一个值都是一个数，因而可以用数轴上的一个点来表示．如果一个量是常量，则用数轴上的一个定点 a 来表示；如果一个量是变量，则用数轴上的动点 x 来表示．

二、区间与邻域

一个变量能取到的全部数值组成的集合，叫做这个变量的变化范围(或变域)．在高等数学中所遇到的变域往往是一个区间．假定 a、b 为两个已知实数，且 $a<b$，则一切适合不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合，叫做一个**闭区间**，记为 $[a, b]$，a、b 称为区间的**端点**；一切适合不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的集合，叫做一个**开区间**，记为 (a, b)．类似地可以定义**半开区间** $(a, b]$、$[a, b)$ 以及**无限区间** $[a, +\infty)$、$(a, +\infty)$、$(-\infty, b]$、$(-\infty, b)$、$(-\infty, +\infty)$ 等．各种区间的几何意义是很明白的．例如闭区间 $[a, b]$ 代表数轴上点 a 与点 b 之间的一个线段，端点 a、b 包括在内；而半开区间 $(a, b]$ 则是上述线段去掉左端点后的线段．

设 a 与 $\delta(\delta>0)$ 是两个实数，则满足不等式

$$|x-a|<\delta$$

的全体实数叫做**点 a 的 δ 邻域**，点 a 为该邻域的中心，δ 为邻域的半径．由于上述绝对值不等式等价于

$$a-\delta<x<a+\delta$$

因此，满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的全体实数就是开区间 $(a-\delta, a+\delta)$．因此点 a 的 δ 邻域可以用以 a 为中心，以长度为 2δ 的开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 表示．

三、函数概念

一切事物都在运动和发展之中．当我们考察某个自然现象或生产过程时，往往会遇到多个变量．各个变量之间也不是彼此孤立的，它们之间相互联系相互依赖，并且具有一定的规律．在高等数学里讨论的，主要是两个变量之间的一种确定的依赖关系，即所谓函数关系．下面通过几个实例来加以说明．

例 1　圆的面积 s 与圆的半径 r 互相联系着，它们有如下的关系式

$$s=\pi r^2 \tag{1—1—1}$$

每给定一个半径(半径 r 可以在区间 $(0, +\infty)$ 内任意取值)就确定一个圆面积，即圆面积的大小随着圆半径的变化而变化．公式(1—1—1)表示 s 与 r 之间的对应关系．

例 2　物体在空中自由下落时，如果忽略空气阻力不计，则落体所经过的路程 s 将随着时间 t 的变化而变化，其关系式是：

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \qquad (1—1—2)$$

其中重力加速度 $g=9.8\text{m/s}^2$．假定物体开始下落的时刻为 $t=0$，物体着地的时刻为 $t=t_0$，则当 t 在闭区间$[0, t_0]$上任意取定一个数值时，由(1—1—2)式就可以确定 s 的相应数值(如表 1-1)．

表 1-1

时间 t(s)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	……
路程 s(m)	0	1.255	4.9	11.025	19.6	30.625	44.1	……

在直角坐标系中，画出 s 和 t 的对应关系的图形是一条如图 1-1 所示的曲线．

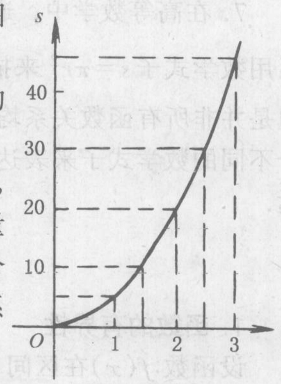

图 1-1

上面的公式(1—1—2)、表 1-1 及图 1-1 都表示了自由落体的运动规律．

例 3　铁路上包裹的运费决定于里程与重量，当里程固定时，运费 y 将随着包裹重量 w 的变化而变化．例如，假设当包裹重量不超过 50kg 时，每公斤运费为 0.5 元；超过 50kg 时，超过部分每公斤运费为 0.8 元．此时包裹重量 w 与运费 y 之间的依从关系可表示为：

$$y=\begin{cases}0.5w & w\leqslant 50\\ 50\times 0.5+(w-50)\times 0.8 & w>50\end{cases} \qquad (1—1—3)$$

这里包裹重量 w 与运费 y 之间的依从关系不可能用一个解析式子表示．但对于任意的 $w>0$，均有唯一确定的 y 与之对应．与前面两个例子不同的只是当 w 在不同范围内取值时，对应关系不一样．

从上述三个例子我们看到在某些特定过程中，有关变量之间是相互联系相互制约的．这种量与量之间的相互制约关系称为函数关系．下面给出函数的定义．

定义　设 x 与 y 是同一变化过程中的两个变量．如果对于变量 x 在它的变域 D 内所取的每一个值，按照一定的规律，y 有唯一确定的值与之对应，我们就说变量 y 是定义在变域 D 上的变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$．这时变量 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，自变量的变域称为**定义域**，因变量的取值范围(即 y 的变域)称为函数的**值域**．如果 a 是函数 $y=f(x)$在定义域 D 中的一个值，就称函数 $y=f(x)$在点 $x=a$ 处有定义．函数 $y=f(x)$在点 $x=a$ 的对应值叫做函数在该点的**函数值**，记作 $f(a)$．

关于函数定义，说明以下几点：

1．我们这里所讲的函数是指单值函数，也就是说，对于每一个 x 值只能对应变量 y 的一个值．

2．我们所研究的量 x 与 y，它们都在实数范围内变化，超出了实数范围就认为是没有意义的．

3．由函数定义可知，要确定一个函数，必须知道函数的定义域和自变量与因变量之

间的对应法则，这就是说，定义域和对应法则是确定函数的两个要素．对于两个函数，只有当它们的定义域和对应法则都相同时，它们才是相同的．

4．常数 A 可以看作是变量 x 的函数．即不论变量 x 取什么值，量 y 永远取值 A，可写为 $y=A$．

5．将有序数 x_1，x_2，…，x_n，…记作 $\{x_n\}$，叫做**数列**．数列 $\{x_n\}$ 可以看作定义在全体正整数上的函数，记作 $x_n=f(n)$．

6．通常一个函数都可以用坐标平面上的曲线表示出来．以自变量的数值为横坐标、因变量的相应值为纵坐标的点描出的轨迹，称为**函数的图形**．这种图形能够醒目地表达出变量之间的函数关系．

7．在高等数学中，通常用一个数学表达式来表示函数关系．例 1 中 s 与 r 的函数关系用数学式子 $s=\pi r^2$ 来描述，例 2 中 s 与 t 的函数关系用数学式子 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 来描述等．但是并非所有函数关系均可由一个数学式子表示．如例 3 中 y 与 w 的函数关系分别用两个不同的数学式子来表达(这类函数称为分段函数)．而有的函数甚至无法用数学式子来表达．

四、函数的几种特性

1．函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 Ⅰ 内有定义，若存在正数 M，对于任一 $x\in$ Ⅰ，有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 Ⅰ 内**有界**．若这样的 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在区间 Ⅰ 内**无界**．

若函数 $f(x)$ 在区间 Ⅰ 内有界，则称 $f(x)$ 在区间 Ⅰ 内为**有界函数**．

例如函数 $y=\sin x$，对于 $(-\infty,\ +\infty)$ 内的任一 x，都有 $|\sin x|\leqslant 1$ 成立．这里取 $M=1$(当然也可以取大于 1 的任何数作为 M，而 $|\sin x|\leqslant M$ 成立)．所以 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 内有界．而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,\ 2)$ 内有界，但在 $(0,\ 1)$ 内无界．

2．函数的单调性

设函数在区间 Ⅰ 内有定义，如果对于区间 Ⅰ 内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 Ⅰ 内是**单调增加的**；如果当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 Ⅰ 内是**单调减少的**．一个函数如果在区间 Ⅰ 内是单调增加的(单调减少的)，则称此函数为单调增(减)函数，单调增函数与单调减函数统称为**单调函数**．

例如函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数，但在区间 $(-\infty,\ 0)$ 内单调减少，在区间 $(0,\ +\infty)$ 内单调增加．

又例如 $y=x^3$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 内单调增加，它是一个单调函数．

3．函数的奇偶性

如果函数 $y=f(x)$ 对于定义域内任一 x，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**．奇函数的图形关于原点对称．

如果函数 $y=f(x)$ 对于定义域内任一 x，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**．

偶函数的图形关于 y 轴对称.

例如 $f(x)=x^3$ 是奇函数，因为

$$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(-x)$$

又例如 $f(x)=x^2$ 是偶函数，因为

$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(-x)$$

函数 $y=\sin x$ ，$y=\dfrac{1}{x}$ 为奇函数．函数 $y=\cos x$ ，$y=\sqrt{1-x^2}$ 为偶函数．函数 $y=\sin x+\cos x$ ，$y=x^2(1-x)$ 既非奇函数，又非偶函数.

4．函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个不为零的常数 T，使得对于定义域 D 内的任何 x 值恒满足

$$f(x+T)=f(x)$$

则称函数 $f(x)$ 为**周期函数**．称 T 为 $f(x)$ 的一个**周期**．显然当 T 为函数 $f(x)$ 的一个周期时，则 $\pm 2T$ 、$\pm 3T$ 、$\pm 4T$ 、……也都是 $f(-x)$ 的周期，通常我们所说的周期函数的周期是指**最小正周期**.

例如，函数 $y=\sin x$ ，$y=\cos x$ ，是以 2π 为周期的周期函数．$y=\mathrm{tg}x$ ，$y=\mathrm{ctg}x$ 是以 π 为周期的周期函数.

tanx. cl

对于周期函数，只要知道它在长度为 T 的任一区间 $[a，a+T]$ 上的图形，再将所作图形按周期延拓，就可得到该函数的全部图形.

五、反 函 数

设有相互依赖的两个变量 x 和 y ，在建立它们的函数关系时，可以根据研究的需要选取 x 为自变量，y 作为因变量，得一函数关系

$$y=f(x) \qquad (1—1—4)$$

我们假定它的定义域是 D ，值域是 M ．但是，有时根据需要，希望改用 y 作为自变量，而把 x 看作因变量．如果对于 y 在 M 中的每个值，由关系式(1—1—4)恰可唯一确定出 x 在 D 中的一个值．那么按照前述函数定义，x 就是 y 的一个函数，记作

$$x=g(y) \qquad (1—1—5)$$

这时 y 是自变量，x 是因变量，定义域为 M ，值域为 D ，函数 $x=g(y)$ 叫做函数 $y=f(x)$ 的**反函数**．而 $f(x)$ 叫做**直接函数**．习惯上我们总是把自变量记作 x ，因变量记作 y ，所以常常把(1—1—5)中的 x 、y 对调．这样(1—1—4)的反函数(1—1—5)就可以改写为

$$y=g(x) \qquad (x\in M) \qquad (1—1—6)$$

$y=f(x)$ 的反函数也可以记成 $y=f^{-1}(x)$.

反函数有以下几个性质：

1．函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数.

2．$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域与值域对调.

3．$y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

习题 1—1

1. 点 $M(x, y)$是曲线 $y=x^2$ 上动点(如图 1-2). 问(1)弧$\overset{\frown}{OM}$的长度是不是 x 的函数? (2)图上阴影部分的面积是不是 x 的函数?

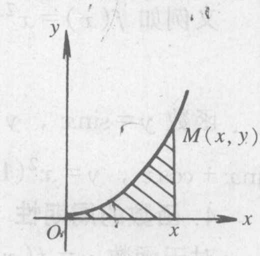

图 1-2

2. 将下列不等式用区间的记号表示:

(1) $-3<x\leqslant 6$;　　(2) $(x-2)(x+1)<0$;

(3) $0<|x-3|<5$;　　(4) $|3x-2|\geqslant 4$.

3. 下列函数是否表示同一函数? 为什么?

(1) $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $x+1$;　　(2) $\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}$ 与 $\sec x$;

(3) $\mathrm{e}^{\ln 3x}$ 与 $3x$;　　(4) $\sqrt{x^4-3x^2}$ 与 $x\sqrt{x^2-3}$.

4. 求下列函数的定义域:

$1-x>0$

$x+4>0$

(1) $y=\dfrac{2x}{x^2+3x-4}$;　　(2) $y=\sqrt{x^2-9}$;

(3) $y=\ln(1-x)+\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$;　　(4) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$;

$x>0$

$-1\leq x\leq 1$

(5) $y=\ln x+\arcsin x$;　　(6) $y=\sqrt{\lg\left(\dfrac{5x-x^2}{4}\right)}$.

5. 作出函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-1} & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x+3 & 1<x<3\end{cases}$ 的图形, 并指出其定义域.

6. (1)设 $f(x+1)=x^2+4x-3$, 求 $f(x)$;

(2)设 $g\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$, 求 $g(x)$.

7. 如图 1-3 , 试将内接于抛物线弓形的矩形面积 A 表示为 x 的函数.

8. 将一块半径为 R 的圆形铁皮, 自中心处剪去圆心角为 α 的扇形后, 把剩下的部分围成一个锥形漏斗(如图 1-4). 求漏斗的容积 V 与角 α 的函数关系.

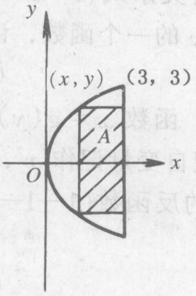

图 1-3

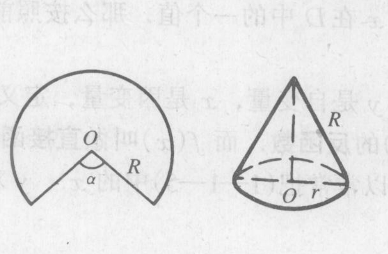

图 1-4

9. 指出下列函数中, 哪些是奇函数? 哪些是偶函数? 哪些是非奇非偶函数?

(1) $y=x-\dfrac{x^3}{6}$;　　(2) $y=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$;

(3) $y=\dfrac{1}{\cos^3 x}$;　　(4) $y=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\cos x$;

(5) $y=x(x-1)(x+1)$；　　(6) $y=x+\cos x$.

10. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty, +\infty)$ 内的任意函数，证明：

(1) $f(x)+f(-x)$ 为偶函数；

(2) $f(x)-f(-x)$ 为奇函数.

§1.2　初等函数

一、基本初等函数

所谓基本初等函数就是指常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数，这些函数在中学的数学课程中都已经学过，这里仅对这些函数的有关性质作简要的复习．对于这些函数的图形，建议读者作一些回忆．

1. 常数函数

$$y=C$$

这是所有函数中最简单的一类，对于任何 x，它始终取同一个值．定义域是 $(-\infty, +\infty)$，图形为平行于 x 轴且在 y 轴上的截矩为 C 的直线．

2. 幂函数

$$y=x^{\mu}\ (\mu \text{ 为任意给定的实数})$$

常见的幂函数有 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\frac{1}{x}$，$y=\frac{1}{x^2}$，$y=\sqrt{x}$ 等．

幂函数 $y=x^{\mu}$ 的定义域与 μ 有关．例如 $\mu=2$ 时，$y=x^2$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$．$\mu=\frac{1}{2}$ 时，$y=\sqrt{x}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$，$\mu=-1$ 时，$y=\frac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0)$ 与 $(0, +\infty)$．然而不论 μ 取何值，$y=x^{\mu}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内总有意义，且当 $\mu>0$ 时，图形过 $(0, 0)$ 及 $(1, 1)$ 点，在 $(0, +\infty)$ 内是单调增函数；当 $\mu<0$ 时，图形过 $(1, 1)$ 点，在 $(0, +\infty)$ 内是单调减函数．

3. 指数函数

$$y=a^x\ (\text{常数 } a>0,\ a\neq 1)$$

这一类函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，图形通过 $(0, 1)$ 点．当 $a>1$ 时，函数 $y=a^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增函数；当 $0<a<1$ 时，函数 $y=a^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调减函数．

在科技领域中常用以 e 为底的指数函数 $y=e^x$，其中 $e=2.71828\cdots\cdots$ 是一个无理数．

4. 对数函数

$$y=\log_a x\ (\text{常数 } a>0,\ a\neq 1)$$

这一类函数的定义域为 $(0, +\infty)$，图形过 $(1, 0)$ 点．当 $a>1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 内是单调增函数；当 $0<a<1$ 时，函数 $y=\log_a x$ 在 $(0, +\infty)$ 内是单调减函数．

在对数函数 $y=\log_a x$ 中，当 $a=10$ 时，$y=\log_{10} x$ 简记为 $y=\lg x$，叫做常用对数函数；当 $a=e$ 时，$y=\log_e x$ 简记为 $y=\ln x$，叫做自然对数函数．

对数函数 $y=\log_a x$ 与指数函数 $y=a^x$ 互为反函数.

5. **三角函数** $y=\tan x$ $y=\cot$

常用的三角函数有正弦函数 $y=\sin x$，余弦函数 $y=\cos x$，正切函数 $y=\mathrm{tg}x$，余切函数 $y=\mathrm{ctg}x$ 以及正割函数 $y=\sec x$，余割函数 $y=\csc x$.

$y=\sin x$，$y=\cos x$ 的定义域均为$(-\infty, +\infty)$，都是以 2π 为周期的周期函数，并且都是有界的. 正弦函数 $y=\sin x$ 为奇函数，在区间$\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right]$(其中$k=0$，$\pm1$，$\pm2$，…)上为单调增函数，在区间$\left[\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{3}{2}\pi+k\pi\right]$(其中 $k=0$，±1，±2，…)上为单调减函数. 而余弦函数 $y=\cos x$ 在区间$[(2k-1)\pi, 2k\pi]$上(其中$k=0$，±1，±2，…)为单调增函数，在区间$[2k\pi, (2k+1)\pi]$(其中 $k=0$，±1，±2，…)上为单调减函数.

$y=\mathrm{tg}x$，$y=\mathrm{ctg}x$ 都是奇函数，都是以 π 为周期的周期函数. 正切函数 $y=\mathrm{tg}x$ 的定义域为除去$x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$(其中 $k=0$，±1，±2，…)的全体实数，且在$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$(其中 $k=0$，±1，±2，…)内为单调增函数. 余切函数 $y=\mathrm{ctg}x$ 的定义域为除去$x=k\pi$(其中 $k=0$，±1，±2，…)的全体实数，且在$((k-1)\pi, k\pi)$(其中 $k=0$，±1，±2，…)内为单调减函数.

6. **反三角函数**

反三角函数是三角函数的反函数，由三角函数及反函数的性质，容易得到反三角函数的性质.

反正弦函数 $y=\arcsin x$，定义域为$[-1, 1]$，值域为$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，它是奇函数，在定义域$[-1, 1]$内为单调增函数.

反余弦函数 $y=\arccos x$，定义域为$[-1, 1]$，值域为$[0, \pi]$，无奇偶性，在定义域$[-1, 1]$内为单调减函数.

反正切函数 $y=\mathrm{arctg}x$，定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，它是奇函数，在定义域$(-\infty, +\infty)$内为单调增函数.

反余切函数 $y=\mathrm{arcctg}x$，定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$(0, \pi)$，无奇偶性，在定义域$(-\infty, +\infty)$内为单调减函数.

二、复合函数

定义 设 y 是 u 的函数，即 $y=f(u)$. 而 u 又是 x 的函数，即 $u=\varphi(x)$. 且$\varphi(x)$的值域的全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内. 那么，y 通过 u 而得到的 x 的函数

$$y=f(u)=f[\varphi(x)]$$

叫做 x 的**复合函数**. x 是自变量，u 叫做**中间变量**.

复合函数的中间变量可以不止一个. 有的复合函数可由两个或更多个中间变量复合而成的. 例如，设 $y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=\mathrm{tg}x$，

则
$$y=\sqrt{\ln \operatorname{tg} x}$$
是经过两个中间变量 u 和 v 复合而成的.

初等函数

三、初等函数

初等函数是由一个式子所表示的函数，这个式子是由基本初等函数经过有限次四则运算以及有限次的函数复合步骤而构成的. 例如：

$$y=\sin^2 x+\cos^3 x\ ,\ \ y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$y=\operatorname{arctg}\sqrt{1-x^2}\ ,\ \ y=x\operatorname{tg}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$$

在初等函数的定义中，明确指出是用一个式子表示的函数，如果一个函数必须用几个式子表示(如分段函数)，则它就不是初等函数，例如

$$y=\begin{cases} x & 0<x<1 \\ 2 & x=1 \\ 2-x & 1<x\leqslant 2 \end{cases}$$

就不是初等函数，而称为**非初等函数**，在高等数学中所讨论的函数绝大多数都是初等函数.

习题1—2

1. 设 $f(x)=x^2$，$\varphi(x)=e^x$，求复合函数 $f[\varphi(x)]$、$\varphi[f(x)]$、$f[f(x)]$的表达式.

2. 下列各函数是由哪些简单函数复合而成的？

(1) $y=\sin 5x$；　(2) $y=\ln\cos x$；　$u=g(x)=\cos x$　$y=f(x)=\lg x$

(3) $y=a^{x^2+1}$；　(4) $y=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$；　$y=f(x)=\operatorname{tg}^2 x$　~~$y_2=g(x)=\frac{x}{2}$~~

(5) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$；　(6) $y=\log_a \sin e^{-x+1}$.

3. 设函数 $y=f(x)$的定义域为[0，1]，求函数 $f(\sin x)$的定义域.

$\varphi(x)=-x+1$　$y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$　$y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

$\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}$

§1.3　数列的极限

$\varphi_2(x)=e^x$

$0\leqslant\sin x\leqslant 1$　$\sin x$

高等数学主要研究的是函数的极限，而数列的极限只是函数极限的一种特殊情况. 数列的极限在中学数学课中已经学过，本节只对数列的极限作一个简要的回顾. 掌握好数列极限的概念，有助于对函数极限概念的理解与掌握.

对于给定的数列$\{x_n\}$，重要的是要研究当 n 无限增大时(记为 $n\to\infty$，读作 n 趋向无穷大)，数列$\{x_n\}$的变化趋势. 即当 $n\to\infty$时，x_n 是否能无限接近某一个确定的数值？如果能，这个数值又等于多少？我们先看一个例子.

例 1　考察数列

单调有界必有极限　$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \cdots,\ \frac{n}{n+1}\cdots \qquad (1—3—1)$$

当 n 无限增大时的变化趋势．

解　数列(1—3—1)的一般项为

$$x_n=\frac{n}{n+1}$$

容易看出随着 n 的不断增大，x_n 将逐渐接近于 1．这就是说："当 n 无限增大时，数列(1—3—1)无限趋近于 1．"

由于

$$|x_n-1|=\left|\frac{n}{n+1}-1\right|=\left|-\frac{1}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}$$

而 $|x_n-1|$ 表示数轴上点 x_n 的位置与点 $a=1$ 的距离．因此当 n 足够大时，$|x_n-1|$ 即 $\frac{1}{n+1}$ 可以足够的小．这样上述所谓"当 n 无限增大时，数列(1—3—1)无限趋近于 1"的说法，可叙述为"当 n 充分大时，数列 x_n 与 $a=1$ 可以任意的靠近，要多近就能有多近"．或者说："当 n 充分大时，$|x_n-1|$ 可以任意的小，要多小就有多小．"

上述两种对数列(1—3—1)变化趋势的叙述都是描述性的，下面我们用精确的数学语言来刻画这一事实：

对于任意给定的无论多么小的正数 ε，当 n 充分大以后(记作第 N 项以后)的一切 x_n 都满足

$$|x_n-1|<\varepsilon$$

例如，若给 $\varepsilon=\frac{1}{10}$，欲使 $|x_n-1|=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{10}$，只需 $n>10-1$(可取 $N=9$)，即只要上述数列从第 10 项起，后面的一切项

$$x_{10}，x_{11}，x_{12}，\cdots$$

都能使不等式

$$|x_n-1|<\frac{1}{10}$$

成立．

同样地，若给定 $\varepsilon=\frac{1}{1000}$．只要当 $n>999$(可取 $N=999$)，即从第 1000 项起，后面的一切项

$$x_{1000}，x_{1001}，x_{1002}，\cdots$$

都能使不等式

$$|x_n-1|<\frac{1}{1000}$$

成立．

这样，不论给定的 ε 是多么小的正数，总存在一个正整数 N，使得对于 $n>N$ 的一切 x_n，即从第 $N+1$ 项起，后面的一切项

$$x_{N+1}，x_{N+2}，x_{N+3}，\cdots$$

不等式

$$|x_n-1|<\varepsilon$$