华大助学 重难点手册

重难点手册

★四千万学子的制胜宝典
★八省市名师的在线课堂
★十六年书业的畅销品牌

新课标

配人教A版

高中数学
选修 2-3

蔡上鹤 主审
汪江松 主编

华中师范大学出版社

重难点手册

配人教A版

高中数学

选修 2-3

主　审　蔡上鹤
主　编　汪江松

★四千万学子的制胜宝典
★八省市名师的在线课堂
★十六年书业的畅销品牌

华中师范大学出版社

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

重难点手册——高中数学选修 2-3（配人教 A 版）/汪江松 主编. —2 版.
—武汉:华中师范大学出版社,2009. 8
ISBN 978-7-5622-3919-2
Ⅰ. 重…　Ⅱ. 汪…　Ⅲ. 数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 051622 号

重难点手册——高中数学选修 2-3（配人教 A 版）

主编:汪江松　　**责任编辑**:史小艳
责任校对:王　炜　　**封面设计**:新视点
编辑室:第一编辑室　　**咨询电话**:027－67867361
出版发行:华中师范大学出版社 ©
社址:湖北省武汉市珞喻路 152 号　　**邮编**:430079
销售电话:027－67867371　027－67863040　027－67867076
传真:027－67863291　　**邮购电话**:027－67861321
网址:http://www.ccnupress.com　　**电子信箱**:hscbs@public.wh.hb.cn
印刷: 仙桃市新华印务有限公司　　**督印**:章光琼
字数:280 千字
开本:880mm×1230mm　1/32　　**印张**:9
版次:2009 年 8 月第 2 版　　**印次**:2009 年 8 月第 1 次印刷
定价:15.00 元

欢迎上网查询、购书

体例特色与使用说明

新课标： 贯彻新课标精神，定位新课标“三维”目标，贴近新课标高考大纲要求，注重学习规律和考试规律的整合，全面提升考试成绩和综合素质。

大突破： 突破传统的单向学习模式，将教材知识、拓展知识和隐性方法类知识植入新课堂，立体凸现学科知识结构和解题方法规律，破解高考“高分”瓶颈。

课程目标点击

全面展示每课(节)的“知识与技能、过程与方法以及情感态度与价值观”三位一体的目标要求，使同学们明确努力的方向和应达到的程度，便于自我评价和相互评价。

重点难点突破

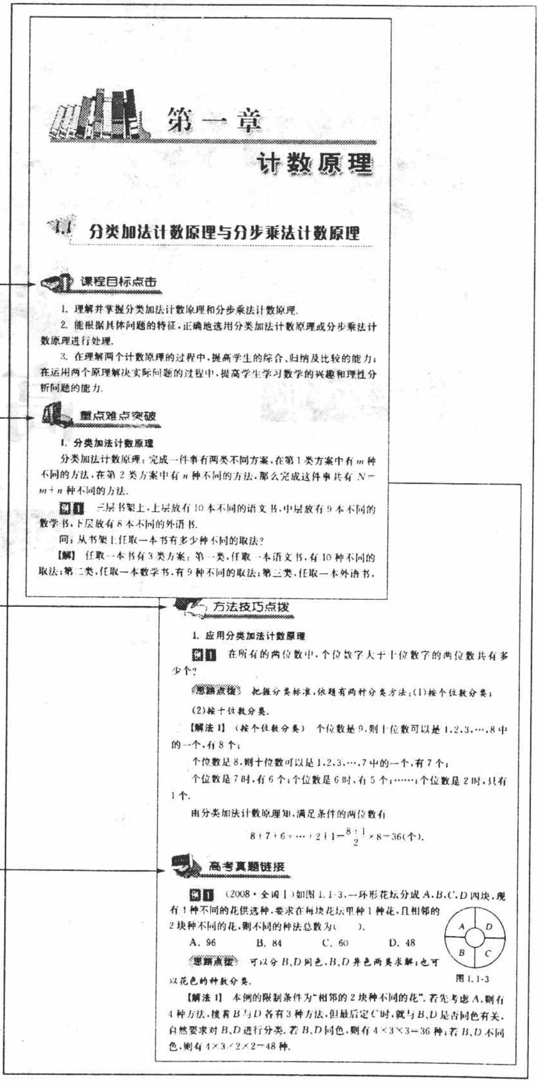
把握学生思维情感的发展脉络，恰到好处地指出每课(节)的重点、难点与疑点，各个击破，扫清学生学习中的一切障碍，全力提高学生的学习效率。

方法技巧点拨

精选典型例题，通透讲解，并从中总结解题方法与技巧，点拨解题规律，启发学生思维，使学生深刻透彻地把握知识结构，培养学生灵活运用知识的能力。

高考真题链接

多角度深入剖析最近几年高考题，加深学生对所学知识的理解，激发学生深入探究学习的兴趣。



第一章

计数原理

1.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理

课程目标点击

1. 理解并掌握分类加法计数原理和分步乘法计数原理.

2. 能根据具体问题的特征，正确地选用分类加法计数原理或分步乘法计数原理进行处理.

3. 在理解两个计数原理的过程中，提高学生的综合、归纳及比较的能力；在运用两个原理解决实际问题的过程中，提高学生学习数学的兴趣和理性分析问题的能力.

重点难点突破

1. 分类加法计数原理

分类加法计数原理：完成一件事有两类不同方案，在第1类方案中有 m 种不同的方法，在第2类方案中有 n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m+n$ 种不同的方法.

例1 三层书架上，上层放有10本不同的语文书，中层放有9本不同的数学书，下层放有8本不同的外语书.

问：从书架上任取一本书有多少种不同的取法？

【解】 任取一本书有3类方案：第一类，任取一本语文书，有10种不同的取法；第二类，任取一本数学书，有9种不同的取法；第三类，任取一本外语书，

方法技巧点拨

1. 应用分类加法计数原理

例1 在所有的两位数中，个位数字大于十位数字的两位数共有多少个？

思路点拨 把握分类标准，依题有两种分类方法：(1)按个位数分类；(2)按十位数分类.

【解法1】（按个位数分类） 个位数是9，则十位数可以是1，2，3，…，8中的一个，有8个；

个位数是8，则十位数可以是1，2，3，…，7中的一个，有7个；

个位数是7时，有6个；个位数是6时，有5个；……；个位数是2时，只有1个.

由分类加法计数原理知，满足条件的两位数有

$$8+7+6+\cdots+2+1=\frac{8+1}{2}\times 8=36(\text{个}).$$

高考真题链接

例1 (2008·全国Ⅰ)如图1.1-3，一环形花坛分成 A，B，C，D 四块，现有4种不同的花供选种，要求在每块花坛里种1种花，且相邻的2块种不同的花，则不同的种法总数为(　　).

A. 96　　B. 84　　C. 60　　D. 48

图1.1-3

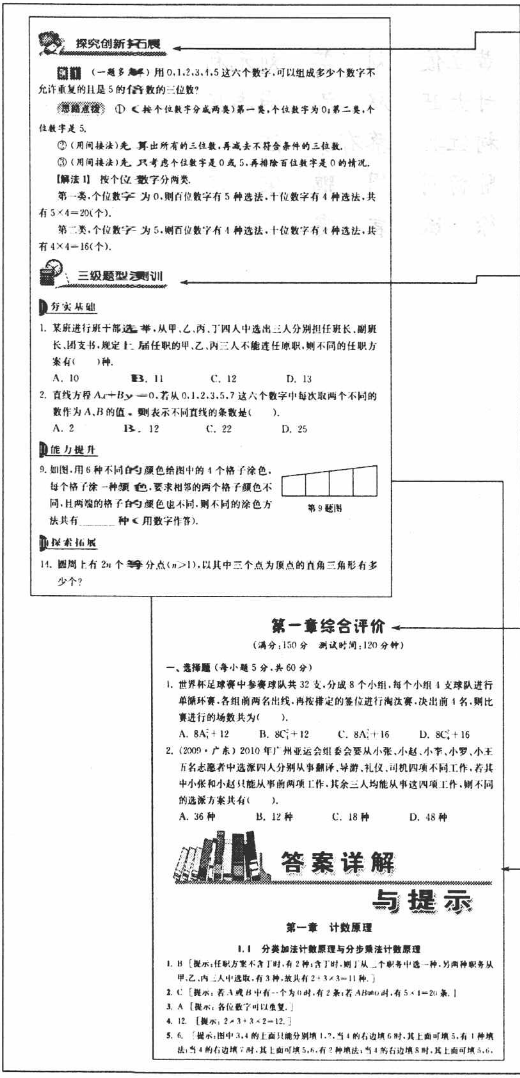
思路点拨 可以分 B、D 同色，B、D 异色两类求解；也可以花色的种数分类.

【解法1】 本例的限制条件为“相邻的2块种不同的花”，若先考虑 A，则有4种方法，接着 B 与 D 各有3种方法，但最后定 C 时，就与 B、D 是否同色有关，自然要求对 B、D 进行分类. 若 B、D 同色，则有 $4\times3\times3=36$ 种；若 B、D 不同色，则有 $4\times3\times2\times2=48$ 种.

——新课标《数学重难点手册》新突破

讲实用： 完全同步于新教材，导—学—例—训四位一体，落实课程内容目标和考纲能力要求，揭密高考解题依据和答题要求，破解重点难点。

大品牌： 十多年的知名教辅品牌，一千多万学子的全程参与，十余万名一线教师的倾力实验，堪称学习规律与考试技术深度融合的奇迹，缔造着使用效果显著、发行量惊叹的神话。



探究创新拓展

例1 （一题多解）用0，1，2，3，4，5这六个数字，可以组成多少个数字不允许重复的且是5的倍数的三位数？

思路点拨 ①（按个位数字分成两类）第一类，个位数字为0；第二类，个位数字是5.

②（用间接法）先算出所有的三位数，再减去不符合条件的三位数.

③（用间接法）先只考虑个位数字是0或5，再排除百位数字是0的情况.

【解法1】 按个位数字分两类.

第一类，个位数字为0，则百位数字有5种选法，十位数字有4种选法，共有5×4=20(个).

第二类，个位数字为5，则百位数字有4种选法，十位数字有4种选法，共有4×4=16(个).

三级题型测训

Ⅰ 夯实基础

1. 某班进行班干部选举，从甲、乙、丙、丁四人中选出三人分别担任班长、副班长、团支书，规定上届任职的甲、乙、丙三人不能连任原职，则不同的任职方案有(　　)种.

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 13

2. 直线方程 $Ax+By=0$，若从0，1，2，3，5，7这六个数字中每次取两个不同的数作为A、B的值，则表示不同直线的条数是(　　).

A. 2　　B. 12　　C. 22　　D. 25

Ⅱ 能力提升

9. 如图，用6种不同的颜色给图中的4个格子涂色，每个格子涂一种颜色，要求相邻的两个格子颜色不同，且两端的格子的颜色也不同，则不同的涂色方法共有______种（用数字作答）.

第9题图

Ⅲ 探索拓展

14. 圆周上有2n个等分点(n>1)，以其中三个点为顶点的直角三角形有多少个？

第一章综合评价

（满分：150分　测试时间：120分钟）

一、选择题（每小题5分，共60分）

1. 世界杯足球赛中参赛球队共32支，分成8个小组，每个小组4支球队进行单循环赛，各组前两名出线，再按排定的签位进行淘汰赛，决出前4名，则比赛进行的场数共为(　　).

A. $8A_4^2+12$　　B. $8C_4^2+12$　　C. $8A_4^2+16$　　D. $8C_4^2+16$

2. （2009·广东）2010年广州亚运会组委会要从小张、小赵、小李、小罗、小王五名志愿者中选派四人分别从事翻译、导游、礼仪、司机四项不同工作，若其中小张和小赵只能从事前两项工作，其余三人均能从事这四项工作，则不同的选派方案共有(　　).

A. 36种　　B. 12种　　C. 18种　　D. 48种

答案详解与提示

第一章　计数原理

1.1　分类加法计数原理与分步乘法计数原理

1. B［提示：任职方案不含丁时，有2种；含丁时，则丁从三个职务中选一种，另两种职务从甲、乙、丙三人中选取，有3种，故共有2+3×3=11种.］

2. C［提示：若A或B中有一个为0时，有2条；若AB≠0时，有5×4=20条.］

3. A［提示：各位数字可以重复.］

4. 12.［提示：2×3+3×2=12.］

5. 6.［提示：图中3，4的上面只能分别填1，2，当4的右边填6时，其上面可填5，有1种填法；当4的右边填7时，其上面可填5，6，有2种填法；当4的右边填8时，其上面可填5，6，

探究创新拓展

体现特色栏目的全新面貌，融入新课标的全新理念，给出具有探究性的命题，为学生提供自主探索、相互交流的专有平台。

三级题型测训

立足于消化教材，注重基本题型的训练，以中档题为出发点，帮助同学们更深刻地领会相应知识点，逐步养成灵活的解题能力和应用能力，并精心挑选了少量高考拔高题与竞赛题，使学生在收到立竿见影的学习效果的同时，体验到探索拓展的广阔空间。

章末综合评价

选择新颖、典型、难度适中的试题进行检测，引领主干知识，使您在考试中立于不败之地！

答案详解与提示

附有三级题型测训和各章综合评价的参考答案，并对全部试题给出了提示和解答过程。

《数学重难点手册》编委会

主　编　汪江松

编　者　汪江松　黄立俊　刘　芸　刘元利
齐凤玲　甘大旺　赵　泓　谢志庆
杨志明　柯红兵　蔡有缘　汪　丹
胡燕丽　陈留闯　周　鹏　宋　庆
徐更生　徐　斌　袁　雯

目　录

第一章

计数原理

1.1 分类加法计数原理与分步乘法计数原理

课程目标点击

1. 理解并掌握分类加法计数原理和分步乘法计数原理.

2. 能根据具体问题的特征,正确地选用分类加法计数原理或分步乘法计数原理进行处理.

3. 在理解两个计数原理的过程中,提高学生的综合、归纳及比较的能力;在运用两个原理解决实际问题的过程中,提高学生学习数学的兴趣和理性分析问题的能力.

重点难点突破

1. 分类加法计数原理

分类加法计数原理:完成一件事有两类不同方案,在第1类方案中有m种不同的方法,在第2类方案中有n种不同的方法,那么完成这件事共有$N=m+n$种不同的方法.

例1 三层书架上,上层放有10本不同的语文书,中层放有9本不同的数学书,下层放有8本不同的外语书.

问:从书架上任取一本书有多少种不同的取法?

【解】 任取一本书有3类方案:第一类,任取一本语文书,有10种不同的取法;第二类,任取一本数学书,有9种不同的取法;第三类,任取一本外语书,

有8种不同的取法.

所以从书架上任取一本书共有

$$10+9+8=27$$

种不同的取法.

注意 (1)用分类加法计数原理中的每一类方案都能独立完成“这件事”，而且用每一类方案中的每一种方法也能独立完成“这件事”.

(2)一般地，完成一件事有n类不同方案，在第1类方案中有m_1种不同的方法，在第2类方案中有m_2种不同的方法，……，在第n类方案中有m_n种不同的方法，那么完成这件事共有$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$种不同的方法.

2. 分步乘法计数原理

分步乘法计数原理：完成一件事需要两个步骤，做第1步有m种不同的方法，做第2步有n种不同的方法，那么完成这件事共有$N=m\times n$种不同的方法.

例2 三层书架上，上层放有10本不同的语文书，中层放有9本不同的数学书，下层放有8本不同的外语书.

问：从书架上任取语文、数学、外语书各1本，有多少种不同的取法？

【解】 完成这件事可分为三个步骤：第1步取语文书，有10种不同的方法；第2步取数学书，有9种不同的方法；第3步取外语书，有8种不同的方法.

这三个步骤缺一不可，依分步乘法计数原理知，从书架上任取语文、数学、外语书各1本，共有

$$10\times9\times8=720$$

种不同的取法.

注意 (1)分步乘法计数原理中的任何一步都不能完成“这件事”，并且每一步无论采用哪种方法都不影响其他步方法的选取，即步与步之间保持“独立性”，但完成整个事件时，步与步之间又保持“连续性”(一步也不能少).

(2)一般地，完成一件事需要n个步骤，做第1步有m_1种不同的方法，做第2步有m_2种不同的方法，……，做第n步有m_n种不同的方法，那么完成这件事共有$N=m_1\cdot m_2\cdot\cdots\cdot m_n$种不同的方法.

3. 应用两个计数原理应注意的问题

(1)正确区别“分类”与“分步”

①分类加法计数原理和分步乘法计数原理的共同点是：回答的都是有关

做一件事的不同方法种数的问题. 不同点是:分类加法计数原理针对的是"分类"问题,其中各种方法相互独立,用其中任何一种方法都可以做完这件事;分步乘法计数原理针对的是"分步"问题,各个步骤中的方法相互依存,只有各个步骤都完成才算做完这件事.

②"完成一件事有 n 类不同方案",这里是对完成这件事情的所有办法的分类. 分类时,首先要根据问题的特点确定一个合适的分类标准,然后在此标准下进行分类;其次,分类时要注意:完成这件事情的任何一种方法必须属于某一类,并且分别属于不同两类的两种方法是不同的方法. 只有满足这些条件,才可以用分类加法计数原理.

"完成一件事需要 n 个步骤",这是指完成这件事情的任何一种方法都要分成 n 个步骤. 分步时,首先要根据问题的特点确定一个分步的可行标准;其次,分步时要注意满足:必须并且只需连续完成这 n 个步骤后,这件事情才算圆满完成. 只有满足这些条件,才能使用分步乘法计数原理.

(2) 两个计数原理的综合运用

例 3 三层书架上,上层放有 10 本不同的语文书,中层放有 9 本不同的数学书,下层放有 8 本不同的外语书.

问:从书架上任取两本书,且这两本书属不同的学科,共有多少种不同的取法?

【解法 1】 完成这个事件可分为三种类型:取语文、数学书各一本;取语文、外语书各一本;取数学、外语书各一本.

每一类中,完成事件又分两个步骤,如第一类中先取语文书 1 本,第二步取数学书 1 本,依分步乘法计数原理,第一类中有 10×9 种不同的取法;

同理,第二类中有 10×8 种不同的取法;

第三类中有 9×8 种不同的取法.

再依分类加法计数原理知,从书架上任取两本属不同学科的书的方法共有

$$10\times9+10\times8+9\times8=242(\text{种}).$$

【解法 2】 完成这个事件可分为两种类型:取语文书和不取语文书.

取语文书时,可分两步:第一步先取语文书,有 10 种不同的方法;第二步取数学书或外语书(再次分类),有 $9+8$ 种方法. 依分步乘法计数原理,有 $10\times(9+8)$种不同的方法.

不取语文书时分两步:第一步取数学书,有 9 种不同的方法;第二步取外语书,有 8 种不同的方法. 依分步乘法计数原理,有 9×8 种不同的方法.

再依分类加法计数原理,共有方法数为

$$10\times(9+8)+9\times8=242(\text{种}).$$

反思 解法 1 是先分类,再对每一类中进行分步;解法 2 也是先分类再分步,但对某些类中的分步过程还得分类.像这种分类、分步混合题,无论是分类还是分步,必须做到标准明确、不重不漏.

方法技巧点拨

1. 应用分类加法计数原理

例 1 在所有的两位数中,个位数字大于十位数字的两位数共有多少个?

思路点拨 把握分类标准,依题有两种分类方法:(1)按个位数分类;(2)按十位数分类.

【解法 1】(按个位数分类) 个位数是 9,则十位数可以是 1,2,3,…,8 中的一个,有 8 个;

个位数是 8,则十位数可以是 1,2,3,…,7 中的一个,有 7 个;

个位数是 7 时,有 6 个;个位数是 6 时,有 5 个;……;个位数是 2 时,只有 1 个.

由分类加法计数原理知,满足条件的两位数有

$$8+7+6+\cdots+2+1=\frac{8+1}{2}\times8=36(\text{个}).$$

【解法 2】(按十位数分类) 依题意知,十位数只能为 1,2,3,…,8,共 8 类.

十位数是 1 时,个位数可为 2,3,4,…,9 中的一个,有 8 个;

十位数是 2 时,个位数可为 3,4,5,…,9 中的一个,有 7 个;

十位数是 3 时,有 6 个;十位数是 4 时,有 5 个;……;十位数是 8 时,有 1 个.

由分类加法计数原理知,满足条件的两位数有

$$8+7+6+\cdots+2+1=36(\text{个}).$$

例 2 三边长均为正整数,且最大边长为 7 的三角形的个数是多少?

思路点拨 由“三角形两边之和大于第三边”,“三角形两边之差小于第

三边”,列出不等式组,再分类解之.

【解】 因为三边长均为正整数,不妨设另外两边长分别是 a,b,所以

$$\begin{cases}1\leqslant a\leqslant b\leqslant 7,\\ b-a<7<b+a.\end{cases}$$

故按分类加法计数原理,对 a 进行分类:

当 $a=1$ 时,$7-1<b<7+1$, $\therefore b=7$,有 1 个三角形;

当 $a=2$ 时,$7-2<b<7+2$, $\therefore b=6,7$,有 2 个三角形;

当 $a=3$ 时,$7-3<b<7+3$, $\therefore b=5,6,7$,有 3 个三角形;

……

当 $a=7$ 时,$7\leqslant b\leqslant 7$, $\therefore b=7$,有 1 个三角形.

从而最大边长为 7 的三角形的个数为 $1+2+3+4+3+2+1=16$(个).

2. 应用分步乘法计数原理

例 3 将 5 封信投入 3 个邮筒,不同的投法共有多少种?

思路点拨 将 5 封信视为有序的分步投放.

【解】 不妨将 5 封信分 5 步进行投放.

第 1 步,第一封信有 3 种投入邮筒的方法;

第 2 步,第二封信有 3 种投入邮筒的方法;

……

第 5 步,第五封信也有 3 种投入邮筒的方法.

根据分步乘法计数原理,不同的投法共有 3^5 种.

例 4 从$\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$中,任取 3 个不同的数作为抛物线的方程 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$的系数,使抛物线过原点,且顶点在第一象限,这样的抛物线共有多少条?

思路点拨 分步从集合中选取三个元素作为方程的系数,但应注意 $a\neq 0$,$c=0$ 这两个条件.

【解】 由题意可知,应分 3 步来完成“确定抛物线”的任务,即依次确定系数 a,b,c.

由抛物线过原点,得 $c=0$.由顶点在第一象限,得 $a<0,b>0$.

由题意可知,a 有 3 种,b 有 3 种,c 有 1 种,由分步乘法计数原理,可得共有抛物线 $3\times 3\times 1=9$(条).

方法总结

对于两个原理的理解在于"分类"、"分步",可结合电学中的"并联"或"串联"加以理解.分类加法计数原理类似于电学中的"并联"(每条线路都能通电),即每"类"方法都能完成该事件.分步乘法计算原理类似于"串联"(每条线路都不能独立完成通电),即每步都不能独立完成该事件.

3. 两个计数原理的实际应用

例5 在由开关组 A 与 B 所组成的电路中如图 1.1-1(a),(b),要接通电源,使电灯发光的方法各有多少种?

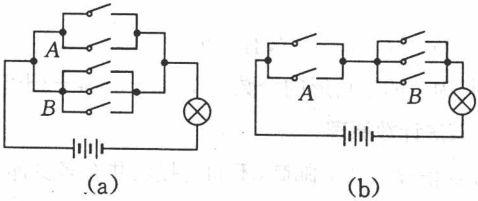


图 1.1-1

思路点拨 如图(a),合上开关组 A、B 中任一开关,电灯即发光,故用分类加法计数原理;如图(b),只有先合上开关组 A 中的任一个开关,再合上 B 的任一个开关,电灯才发光,故用分步乘法计数原理.

【解】 因为开关组 A 中有 2 个开关,开关组 B 中有 3 个开关,

(1)如图(a),应用分类加法计数原理,所以共有 $2+3=5$ 种使电灯发光的方法.

(2)如图(b),应用分步乘法计数原理,所以共有 $2\times3=6$ 种使电灯发光的方法.

例6 已知直线 $ax+by+c=0$ 中,a,b,c 的值是集合$\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$中的 3 个不同的元素,并且该直线的倾斜角为锐角,求这样的直线的条数.

思路点拨 根据 c 是否为 0 来进行分类,其中当 $c=0$ 时注意排除重复的直线,当 $c\neq0$ 时注意分步计数.

【解】 设直线的倾斜角为 θ,因 θ 为锐角,所以 $\tan\theta=-\frac{a}{b}>0$,即 a,b 异号.

(1) 当 $c=0$ 时,$\because$ a、b 异号,$\therefore$ a 有 3 种取法,b 有 3 种取法,排除 2 个重

复($3x-3y=0$,$2x-2y=0$ 与 $x-y=0$ 为同一直线).

$a>0,b<0$ 时的情况与 $a<0,b>0$ 时的情况下得到的直线相同,

故这样的直线有 $3\times3-2=7$(条).

(2) 当 $c\neq0$ 时,a 有 3 种取法,b 有 3 种取法,c 有 4 种取法,其中任两条直线均不相同,故这样的直线有 $3\times3\times4=36$(条).

$a>0,b<0$ 时的情况与 $a<0,b>0$ 时的情况下得到的直线相同.

从而符合条件的直线有 $7+36=43$(条).

4. 合理选用"树形图"与"表格法"

对于既要用分类加法计数原理,又要用分步乘法计数原理的较为复杂的问题,可以根据题意合理地画出"树形图"或列表格,使问题的解决更直观、更方便.

例 7 同室四人各写一张贺年卡,先集中起来,然后每人从中拿一张别人送出的贺年卡,则四张贺年卡不同的分配方法有多少种?

思路点拨 可用"树形图"直观分析,并考虑一题多解.

【解法 1】 设四张贺卡分别记为 A,B,C,D. 由题意,某人(不妨设 A 卡的供卡人)取卡的情况有 3 种,据此将卡的不同分配方式分为三类,对于每一类,其他人依次取卡分步进行. 为了避免重复或遗漏现象,用"树形图"表示如下:

B—A—D—C;B—C—D—A;B—D—A—C

C—A—D—B;C—D—A—B;C—D—B—A

D—A—B—C;D—C—A—B;D—C—B—A

故共有 9 种不同的分配方法.

【解法 2】 将同室四人分别记为 A,B,C,D,然后利用四个人取卡的情况分步来确定.

第一步,四个人中的任意一人(例如 A)先取一张,则由题意知共有 3 种取法;第二步,由第一人取走的贺卡的供卡人取,也有 3 种取法;第三步,由剩余的两个中的任一人取,只有一种取法;第四步,最后一人取,只有一种取法. 由分步乘法计数原理,共有 $3\times3\times1\times1=9$(种)不同的分配方法.

【解法 3】 设四人 A、B、C、D 所写的贺年卡分别是 a、b、c、d. 当 A 拿贺年卡 b 时,则 B 可拿 a、c、d 中任何一张,即 B 拿 a,C 拿 d,D 拿 c;或 B 拿 c,C 拿 d,D 拿 a;或 B 拿 d,C 拿 a,D 拿 c,所以 A 拿 b 时有三种不同的分配方法,同理 A 拿 c,d 时都各自有三种不同的分配方法,这时对 A 的分类完成. 用分类加法计数原理,共有 $3+3+3=9$(种)不同的分配方法.

5. 简单涂色问题

例 8 如图 1.1-2,用 5 种不同的颜料给 4 块(A、B、C、D)涂色,要求共边两块颜色互异,求有多少种不同的涂色方案?

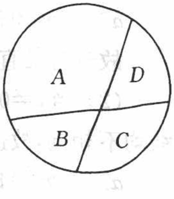


图 1.1-2

思路点拨 可以采用分类法,也可采用分步法,应注意两种方法同时运用.

【解法 1】 按涂色种类进行分类.

第一类:涂 4 种颜色,接下来分步,分四步:A 有 5 种涂法,B 有 4 种涂法,C 有 3 种涂法,D 有 2 种涂法.

∴ 共有 $5\times4\times3\times2=120$(种).

第二类:涂 3 种颜色,则 A、C 颜色相同或 B、D 颜色相同.

若 A、C 颜色相同,有 5 种涂法;B 有 4 种涂法,D 有 3 种涂法.

∴ 共有 $5\times4\times3=60$(种).

若 B、D 颜色相同,同理也有 60 种不同涂法.

∴ 共有 $60+60=120$(种).

第三类:涂 2 种颜色,则 A、C 颜色相同且 B、D 颜色也相同.

∴ A、C 有 5 种涂色方法,B、D 有 4 种涂色方法.

∴ 共有 $5\times4=20$(种).

根据分类加法计数原理,共有 $120+120+20=260$(种)不同的涂色方案.

【解法 2】 按 A、C 颜色相同或不同进行分类.

(1) 若 A、C 颜色相同:A 有 5 种涂色方法,B 有 4 种涂色方法,D 有 4 种涂色方法,故共有 $5\times4\times4=80$(种).

(2) 若 A、C 颜色不同:A 有 5 种涂色方法,C 有 4 种涂色方法,B 有 3 种涂色方法,D 有 3 种涂色方法,故共有 $5\times4\times3\times3=180$(种).

∴ 根据分类加法计数原理,共有 $80+180=260$(种)不同的涂色方案.

方法总结

在应用两个原理解决较复杂问题时应注意:

(1)认真审题,分析题目的条件、结论,特别要理解题目中所讲的“事情”是什么,完成这件事情的含义和标准是什么.

(2)明确完成这件事情是“分类”还是“分步”,还是既要“分类”又要“分步”,要处理好“类中有步”、“步中有类”的关系.

(3)做到:明确事件要求—分类不重不漏—分步步骤完整.

高考真题链接

例 1　(2008·全国Ⅰ)如图 1.1-3,一环形花坛分成 A,B,C,D 四块,现有 4 种不同的花供选种,要求在每块花坛里种 1 种花,且相邻的 2 块种不同的花,则不同的种法总数为(　　).

A. 96　　B. 84　　C. 60　　D. 48

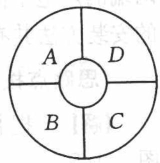


图 1.1-3

思路点拨　可以分 B、D 同色,B、D 异色两类求解;也可以花色的种数分类.

【解法 1】　本例的限制条件为"相邻的 2 块种不同的花".若先考虑 A,则有 4 种方法,接着 B 与 D 各有 3 种方法,但最后定 C 时,就与 B、D 是否同色有关,自然要求对 B、D 进行分类.若 B、D 同色,则有 $4\times3\times3=36$ 种;若 B、D 不同色,则有 $4\times3\times2\times2=48$ 种.

因此共有 84 种方法.

【解法 2】　按照选用的花色的种数也可以进行分类.显然,至少需要 2 种花,而用 4 种花就是一个简单的全排列,可分为 3 类:选用 2 种花,有 $C_4^2A_2^2$(或 A_4^2)种;选用 3 种花,有 $C_4^3C_3^1C_2^1A_2^2$ 种;用 4 种花,有 A_4^4 种.因此共有 $C_4^1C_3^1+C_4^3C_3^1C_2^1A_2^2+A_4^4=84$(种).

答案　B

反思　解法 2 可作为学完排列、组合之后的新解法.

例 2　(2007·福建,文)某通讯公司推出一组手机卡号码,卡号的前七位数字固定,从"×××××××0000"到"×××××××9999"共 10 000 个号码.公司规定:凡卡号的后四位带有数字"4"或"7"的一律作为"优惠卡",则这组号码中"优惠卡"的个数为(　　).

A. 2 000　　B. 4 096　　C. 5 904　　D. 8 320

思路点拨　可考虑用"排除法".

【解】　卡号后四位每位上数字从 0～9 有 10 种选择,其中不带"4"且不带"7"的有 8 种.

依分步乘法计数原理知,卡号后四位不带"4"且不带"7"的共有 $8\times8\times8\times8=4\ 096$(个),

所以符合"优惠卡"条件的号码个数为 $10\ 000-4\ 096=5\ 904$(个).

答案　C