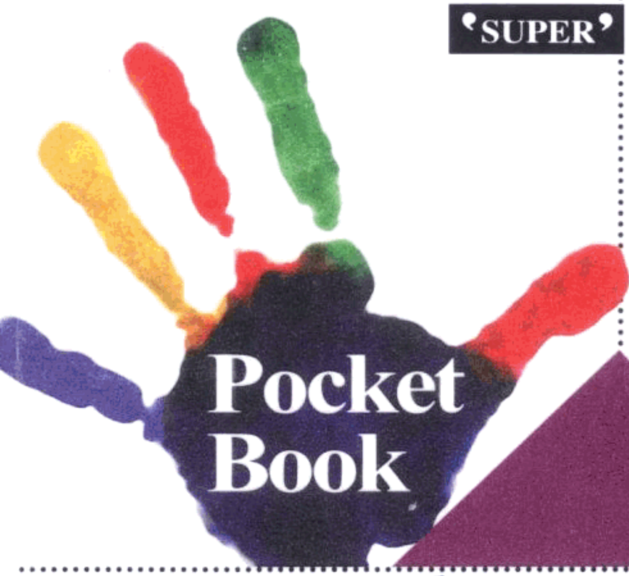
无敌®

'SUPER'

人教版·新课标



绝对暗记

必5修

高中数学

- 小小口袋书　惊喜处处
- 从学习之门轻松出发
- 惊艳知识淬炼之美
- 感受快乐学习
- 幸福面对升学应考

· 紧贴学年教学进度

· 随时随地强化记忆

外文出版社
FOREIGN LANGUAGES PRESS

光照学海

知识无敌

无敌®

绝对暗记 高中数学·必修5

图书在版编目(CIP)数据

无敌绝对暗记. 高中数学．5：必修／赵平易等编著.—北京：外文出版社，2009

ISBN 978-7-119-06086-6

I. 无… II.赵… III. 数学课－高中－教学参考资料
IV. G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第185025号

2009年11月第1版

2009年11月第1版第1次印刷

◆出　　版　外文出版社·北京市西城区百万庄大街24号·邮编：100037

责任编辑　吴运鸿

● 经　　销　新华书店/外文书店

印　　刷　北京市京津彩印有限公司

印　　次　2009年11月第1版第1次印刷

开　　本　1/48，787×1092mm，2.5印张

书　　号　ISBN 978-7-119-06086-6

◆定　　价　9.80元

◆总 监 制　张志坚

作　　者　赵平易　李晓辉

总 编 辑　吴锴鋆

主　　编　陈　茜

执行责编　王占景　金会芳

美术编辑　李可欣　王晓京

美术设计　Kaiyun　李子奇

◆行销企划　北京光海文化用品有限公司
北京市海淀区车公庄西路乙19号
北塔六层　邮编：100048

集团电话　(010) 88018838 (总机)

发 行 部　(010) 88018956 (专线)

订购传真　(010) 88018952

读者服务　(010) 88018838转53、10 (分机)

选题征集　(010) 88018958 (专线)

网　　址　http://www.super-wudi.com

E - mail　service@super-wudi.com

'SUPER'

Pocket Book

人教版

绝对暗记

高中数学

必修 5

外文出版社
FOREIGN LANGUAGES PRESS

contents 目录

高中数学·必修❺

第1章

解三角形

第 1 章 解三角形

◉本章内容：1.1 正弦定理和余弦定理
1.2 应用举例

1.1 正弦定理和余弦定理

必记知识

【必记知识1】正弦定理

1 在一个三角形中，各边的长和它所对角的正弦的比相等，即 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

2 我们要注意正弦定理的结构特点：它首先是一个等比式，其次是各边的长与它所对角的正弦的比，要强调对边对角，它适用于任意三角形.

3 正弦定理可解决两类问题：(1)已知两角和一边，求其他两边和一角；(2)已知两边和其中一边的对角，求另一边的对角.

例1 已知△ABC中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$所对的边分别为a、b、c.

(1)已知$A=45^\circ$，$B=30^\circ$，$a=6$，求b.

(2)已知$A=60^\circ$，$B=45^\circ$，$a=10$，求c.

(3)已知$c=4$，$b=4\sqrt{2}$，$C=30^\circ$，求B.

解 (1) $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，即 $\frac{6}{\sin 45^\circ}=\frac{b}{\sin 30^\circ}$.

$\therefore 6\sin 30^\circ=b\sin 45^\circ$，$\therefore b\times\frac{\sqrt{2}}{2}=6\times\frac{1}{2}$，

$\therefore b=3\sqrt{2}$.

(2) $C=180^\circ-A-B=75^\circ$.

由正弦定理知：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$.

$$\therefore c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{10\times\sin75^\circ}{\sin60^\circ}=\frac{10\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=5\sqrt{2}+\frac{5}{3}\sqrt{6}.$$

(3)由正弦定理知：$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

$$\therefore \sin B=\frac{b\sin C}{c}=\frac{4\sqrt{2}\times\sin30^\circ}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\therefore B=45^\circ$ 或135°.

$\because b>c$，$\therefore B>C$.

故$B=45^\circ$ 或135°.

注意

在运用正弦定理求角时，一定要注意得到$\sin B=a$时，一定要由a的值确定B是否存在，如果存在，是一解还是两解.

【必记知识2】余弦定理

1 余弦定理：三角形任何一边的平方等于其他两边的平方和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍.

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$　或　$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$　或　$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$　或　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

2 余弦定理表述了任意一个三角形中三边长与三个内角余弦之间的数量关系，它的结构是一种循环结构.

它适用于任意三角形.

3 余弦定理可解决三类问题:

(1)已知三边，求三个角;

(2)已知两边和它们的夹角，求第三边和其他两个角;

(3)当已知两边和一边的对角时，也可用余弦定理求解，但一定要注意它有没有解，有几个解的问题.

例2 (1)在$\triangle ABC$中，已知$a=5$，$b=3$，$C=120^\circ$，求c.

(2)在$\triangle ABC$中，已知$a=3\sqrt{3}$，$c=2$，$b=7$，求B.

(3)在$\triangle ABC$中，已知$b=\sqrt{3}$，$c=3$，$B=30^\circ$，求a.

解 (1)$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=5^2+3^2-2\times5\times3\cos120^\circ=49$.

$\therefore c=7$.

(2)$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{(3\sqrt{3})^2+2^2-7^2}{2\times3\sqrt{3}\times2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore B=150^\circ$.

(3)$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，即$(\sqrt{3})^2=a^2+3^2-2a\times3\cos30^\circ$.

$\therefore a^2-3\sqrt{3}a+6=0$，解之得$a=\sqrt{3}$或$2\sqrt{3}$.

注意

在余弦定理公式的选择上，我们更注重从对角的角度去选择公式，如已知$\angle B$，则选择$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$. 特别对于已知两边和一边的对角时，选择余弦定理要比运用正弦定理更加方便快捷，如第(3)小题.

【必记知识3】三角形的面积公式

- 已知$\triangle ABC$的三边分别为a、b、c，它们所对的角分别为$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，则$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B$.

它是一种循环结构，表示三角形的面积等于两边与它们的夹角的正弦值的乘积的$\dfrac{1}{2}$，它是我们十分常用的公式，必须记牢.

例3 若△ABC中，$a=\sqrt{6}$，$b=2$，$c=\sqrt{3}+1$，求$S_{\triangle ABC}$.

解 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{2^2+(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{6})^2}{2\times 2(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{1}{2}$.

$\therefore \angle A=60^\circ$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times 2\times(\sqrt{3}+1)\times\sin 60^\circ=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$.

【必记知识4】解三角形

- 一般地，我们把三角形的三个角和它们的对边分别叫做三角形的元素. 已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫做解三角形.

例4 已知△ABC，根据下列条件，解三角形.

(1) $\angle A=45^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$a=10$；

(2) $\angle A=60^\circ$，$a=\sqrt{3}$，$c=2$；

(3) $a=4\sqrt{3}$，$b=4\sqrt{6}$，$\angle C=45^\circ$.

解 (1) $\because \angle A=45^\circ$，$\angle B=60^\circ$，

$\therefore \angle C=180^\circ-(A+B)=75^\circ$.

$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，$\therefore b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}=\dfrac{10\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}=5\sqrt{6}$.

$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，

$$\therefore c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{10\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ}=\frac{10\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=5(\sqrt{3}+1).$$

故$C=75^\circ$，$b=5\sqrt{6}$，$c=5(\sqrt{3}+1)$.

(2) $\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，$\therefore \sin C=\dfrac{c\sin A}{a}=\dfrac{2\times\sin 60^\circ}{\sqrt{3}}=1$，

$\therefore C=90^\circ$，从而$B=180^\circ-A-C=30^\circ$.

$\therefore b=\dfrac{1}{2}c=1$. 故$B=30^\circ$，$C=90^\circ$，$b=1$.

$(3)c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$=(4\sqrt{3})^2+(4\sqrt{6})^2-2\times4\sqrt{3}\times4\sqrt{6}\times\cos45^\circ$

$=48$,

$\therefore c=4\sqrt{3}$.

$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$, $\therefore \sin A=\dfrac{a\sin C}{c}=\dfrac{4\sqrt{3}\times\sin45^\circ}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore A=45^\circ$，从而$B=90^\circ$.

故$A=45^\circ$，$B=90^\circ$，$c=4\sqrt{3}$.

注 意

求解三角形，其实质就是给出三角形的三角三边中的三个元素，知三求三，但要注意并非任意给出三个元素都能求解三角形，如已知三个角，则这个三角形不可解.

【必记知识5】解三角形的定型问题

- 当由题目条件能确定一个三角形时，即为定型问题，结合三角形全等的判定定理进行理解可知：角角边(即AAS)，角边角(即ASA)，边边边(即SSS)，边角边(即SAS)，为定型问题，它们都只有唯一解.

例5 已知$\triangle ABC$，根据下列条件，解三角形.

(1)$A=45^\circ$，$B=75^\circ$，$b=8$；

(2)$B=60^\circ$，$C=75^\circ$，$a=8$；

(3)$a=2$，$b=\sqrt{3}+1$，$c=\sqrt{6}$；

(4)$a=6$，$c=3\sqrt{3}$，$B=30^\circ$.

解 (1)$\because A=45^\circ$，$B=75^\circ$，$\therefore C=60^\circ$.

$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$,

$\therefore a=\dfrac{b\sin A}{\sin B}=\dfrac{8\times\sin45^\circ}{\sin75^\circ}=\dfrac{8\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=8(\sqrt{3}-1)$.

$\because \dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$,

$\therefore c=\dfrac{b\sin C}{\sin B}=\dfrac{8\times\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ}=\dfrac{8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=12\sqrt{2}-4\sqrt{6}$.

(2) $\because B=60^\circ$，$C=75^\circ$，$\therefore A=45^\circ$.

$\because \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$,

$\therefore b=\dfrac{a\sin B}{\sin A}=\dfrac{8\times\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}=4\sqrt{6}$.

$\because \dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}$,

$\therefore c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}=\dfrac{8\times\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ}=\dfrac{8\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=4(\sqrt{3}+1)$.

(3) $\because \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{6})^2-2^2}{2(\sqrt{3}+1)\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore A=45^\circ$.

$\because \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{2^2+(\sqrt{6})^2-(\sqrt{3}+1)^2}{2\times 2\times\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,

$\therefore B=75^\circ$，$\therefore C=180^\circ-A-B=60^\circ$.

(4) $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$

$=6^2+(3\sqrt{3})^2-2\times 6\times 3\sqrt{3}\times\cos 30^\circ=9$,

$\therefore b=3$.

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{3^2+(3\sqrt{3})^2-6^2}{2\times 3\times 3\sqrt{3}}=0$.

$\therefore A=90^\circ$.

$\therefore C=180^\circ-A-B=60^\circ$.

注意

(1)AAS型：已知两角A、B与一边a，由$A+B+C=180°$及正弦定理，可求出角C，再求出b、c.

(2)SAS型：已知两边b、c和它们的夹角A，由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，可求出a，再用余弦定理求出B、C或用正弦定理及$A+B+C=180°$，求出B、C.

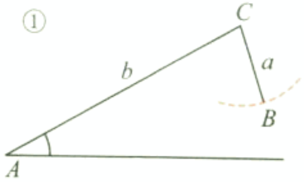
(3)SSS型：已知三边a、b、c，利用余弦定理可求A、B、C.

【必记知识6】解三角形的不定型问题

1 当根据已知条件解三角形时，解的个数是不确定时，即为不定型问题. 不定型问题主要是已知两边与其中一边的对角，即SSA型.

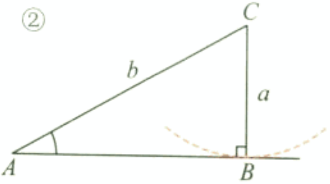
2 在已知△ABC的两边a、b及角A解三角形时，解的情况有下面六种：

①



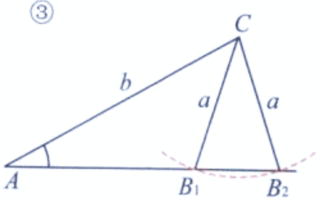
$a<b\sin A$，无解

②



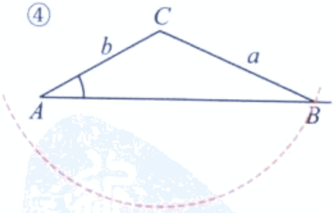
$a=b\sin A$，一解

③



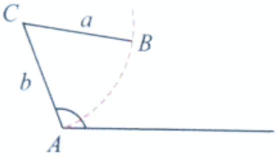
$b\sin A<a<b$，两解

④



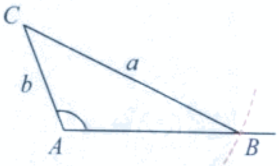
$a\geqslant b$，一解

⑤



$a\leqslant b$，无解

⑥



$a>b$，一解

例6 不解三角形，判断下列三角形解的个数.

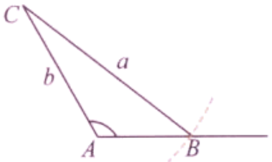
(1) $a=5$, $b=4$, $A=120^\circ$；

(2) $a=7$, $b=14$, $A=150^\circ$；

(3) $a=9$, $b=10$, $A=60^\circ$；

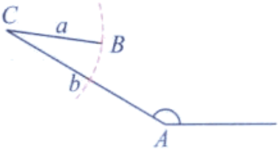
(4) $c=50$, $b=72$, $B=45^\circ$.

解 (1) $\because A=120^\circ$，$a>b$，如图，



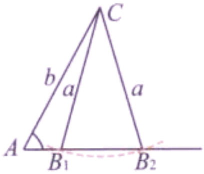
$\therefore \triangle ABC$有一解.

(2) $\because A=150^\circ$，$a<b$，如图，



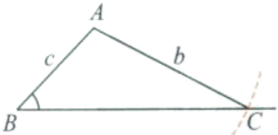
$\therefore \triangle ABC$无解.

(3) $\because A=60^\circ$，$b\sin A<a<b$，如图，



$\therefore \triangle ABC$有两解.

(4) $\because B=45^\circ$，$b>c$，如图，



$\therefore \triangle ABC$有一解.

【必记知识7】三角形形状的判断

1 按边来判断.

- 三角形
  - 等腰三角形
    - 等边三角形
    - 腰和底边不等的等腰三角形
  - 不等边三角形

2 按角来判断.

- 三角形
  - 斜三角形
    - 锐角三角形
    - 钝角三角形
  - 直角三角形

3 我们往往可利用正弦定理、余弦定理及三角恒等变换来判断三角形的形状.

例7 根据下列条件判断三角形的形状.

(1)$B=30°$，$b=50\sqrt{3}$，$c=150$；

(2)$a=6$，$b=7$，$c=8$；

(3)$\sin A\cos B=\cos A\sin B$.

解 (1)$\because \dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，

$$\therefore \sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{150\times\sin30°}{50\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

又$\because b<c$，

$\therefore C=60°$或$120°$.

从而$A=90°$或$30°$.

故$\triangle ABC$为直角三角形或等腰三角形.

(2)$\because$三边中，$c=8$最大，$\therefore \angle C$为$\triangle ABC$中最大内角.

$$\because \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{6^2+7^2-8^2}{2\times6\times7}=\frac{1}{4}>0,$$

$\therefore \angle C$为锐角.

故$\triangle ABC$为锐角三角形.

(3)$\because \sin A\cos B-\cos A\sin B=0$，

即$\sin(A-B)=0$，

$\therefore A-B=0$，$\therefore A=B$.

故$\triangle ABC$为等腰三角形.

注意

利用角来判断三角形时，我们往往只须求出三角形中最大角，若它是锐角，则三角形为锐角三角形；若它是直角，则三角形为直角三角形；若它是钝角，则三角形为钝角三角形.

常见规律

【常见规律1】充分利用$A+B+C=180°$ 的变形

- $A+B+C=180°$ 可变形为$A=180°-(B+C)$或$\frac{A}{2}=90°-\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)$等，还可进一步引申得$\sin A=\sin(B+C)$，$\sin\frac{A}{2}=\cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)$.

在解题过程中，如果能恰当地运用，对我们解题会带来极大的方便.

例8 在$\triangle ABC$中，三个内角满足关系$A+C=2B$，则$\sin A+\sin C$的最大值是多少？

解 $\because A+B+C=180°$，$A+C=2B$，

$\therefore B=60°$，$C=180°-(A+B)=120°-A$.

$\therefore \sin A+\sin C=\sin A+\sin(120°-A)$

$$=\sin A+\sin 120°\cos A-\cos 120°\sin A$$

$$=\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A$$

$$=\frac{3}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A$$

$$=\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right).$$

$\because 0<A<\frac{2}{3}\pi$，

$\therefore \frac{\pi}{6}<A+\frac{\pi}{6}<\frac{5}{6}\pi$.

$\therefore$ 当 $A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，$A=\frac{\pi}{3}$ 时，$\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$ 取到最大值1.

故当 $A=\frac{\pi}{3}$ 时，$\sin A+\sin C$ 的最大值为 $\sqrt{3}$.

【常见规律2】三角形的内角和规律

1 由于任一内角都属于(0°，180°)，所以它们的正弦值都大于0，即 $\sin A>0$，$\sin B>0$，$\sin C>0$；

2 在 $\triangle ABC$ 中，$A>B>C \Leftrightarrow \sin A>\sin B>\sin C$；

3 在 $\triangle ABC$ 中，给定 A、B 的正弦或余弦值，则 C 有解 $\Leftrightarrow \cos A+\cos B>0$.

例9 已知 $\triangle ABC$ 中，$\cos A=\frac{5}{13}$，$\sin B=\frac{3}{5}$，求 $\cos C$.

解 $\because 0<A<\pi$，$\cos A=\frac{5}{13}$，$\therefore \sin A=\frac{12}{13}$.

$\because \sin A>\sin B$，$\therefore A>B$，$\therefore 0<B<\frac{\pi}{2}$.

$\therefore$ 由 $\sin B=\frac{3}{5}$ 可得 $\cos B=\frac{4}{5}$.

$\therefore \cos C=\cos[\pi-(A+B)]=-\cos(A+B)$

$$=-\cos A\cos B+\sin A\sin B=\frac{16}{65}.$$

【常见规律3】利用正弦定理的变式解决问题

由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径），可变形知：

(1) $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$；

(2) $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$；

(3) $\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=2R$.

例10 (1)在 $\triangle ABC$ 中，$\sin A:\sin B:\sin C=5:7:3$，则三角