普通高等教育“十一五”国家级规划教材

线性代数与空间解析几何（第二版）

张志让　刘启宽

高等教育出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

线性代数与空间解析几何

（第二版）

张志让　刘启宽

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育"十一五"国家级规划教材。根据新世纪科技人才对数学素质的要求,针对当前高等院校的教学实际,本书合理地选择了教材内容。值得一提的是,本书的体系结构很有特点,具体体现在:由浅入深的内容次序以及简洁、直观的理论体系;几何与代数的内容有机结合;强调矩阵初等变换的突出作用;把数学建模的思想与方法渗透到教材内容中去,并注重应用背景及应用实例的介绍。本教材易教易学,有利于培养学生的数学素质。

本书的内容包括:矩阵、线性方程组与矩阵初等变换、行列式、空间解析几何与向量运算、n 维向量空间、特征值与特征向量、向量空间的正交性以及二次型。各章均配有适量的习题,其中,第三章、第四章及第八章末附有应用实例,书末附有习题答案。

本书可供一般高等院校理工科非数学类专业使用,也可以供其他院校相近专业使用。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与空间解析几何/张志让,刘启宽. —2 版.
北京:高等教育出版社,2009. 4
ISBN 978 - 7 - 04 - 026271 - 1

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①张…②刘… Ⅲ. ①线性代数 - 高等学校 - 教材②空间几何:解析几何 - 高等学校 - 教材
Ⅳ. O151. 2 O182. 2

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第023588号

策划编辑 王 强 **责任编辑** 李华英 **封面设计** 刘晓翔 **责任绘图** 吴文信
版式设计 范晓红 **责任校对** 胡晓琪 **责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010 - 58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800 - 810 - 0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010 - 58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京宏伟双华印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
		版　　次	2004 年 4 月第 1 版
开　　本	787 × 960　1/16		2009 年 4 月第 2 版
印　　张	15.5	**印　　次**	2009 年 4 月第 1 次印刷
字　　数	270 000	**定　　价**	17.10 元

物料号　26271 - 00

第二版前言

本书第一版作为普通高等教育“十五”国家级规划教材《大学数学基础教程》的分册之一已于2004年出版。根据这四年中我们在教学实践中的使用情况和使用本书的兄弟院校及同行提出的宝贵意见,本版在第一版的基础上对以下几个方面作了增补和修改。

1. 在二次型这一章增加了“用合同线性变换法化二次型为标准形”,以此来介绍另一种化二次型为标准形的方法,而且由此给出了任意二次型(不一定是实二次型)的标准形存在性的证明,从而使这一章在理论上更完整。

2. 为了方便施教,我们增补了部分原来省略了证明的命题的证明过程。例如,第六章中矩阵特征值的相关性质的证明;第七章中关于实对称矩阵对角化的定理的证明等。

3. 第三章和第八章各增加了一个应用实例,以增强学生应用数学知识解决实际问题的意识和能力。

4. 增补了一定数量的习题和例题,其中增加了较多的证明题。

最后,借本书再版之机,对为本书提出宝贵意见的校内外同行表示衷心的感谢,并对高等教育出版社对本书的关心和支持表示诚挚的谢意。

编　者

2008 年 11 月

第一版前言

《线性代数与空间解析几何》是普通高等教育“十五”国家级规划教材《大学数学基础教程》的分册之一。本书介绍了线性代数与空间解析几何的基本知识。内容包括：矩阵、线性方程组与矩阵初等变换、行列式、空间解析几何与向量运算、n维向量空间、特征值与特征向量、向量空间的正交性以及二次型等八章。各章配有适量的习题，第三章、第四章及第八章末附有应用实例，书末附有习题答案。本书教学时数约50学时。

本书根据新世纪科技人才对数学素质的要求，针对当前高等院校的教学实际，选择合理的教材内容与体系结构。本书编者总结多年来的教学实践及教学改革的经验，同时吸收国内外优秀教材的长处，对传统的线性代数与空间解析几何的内容及体系作了较大幅度的调整。本书主要特色体现在：

一、抓住课程本质，选择合理的教材内容与体系结构

在保证教材内容科学性的前提下，本书安排由浅入深的内容次序以及简洁、直观的理论体系；从线性方程组解的三种不同情况出发，直观地建立了相关的定理，大大地降低了向量线性相关性研究的抽象性与复杂性；根据需要构作一些新的引理与定理，不少定理的证明也是很简便的；几何与代数内容的有机结合，使从三维向量空间到n维向量空间的过渡更为自然；同时在空间解析几何部分构作的一些新的例子，成为向量线性相关性及向量空间的正交性等抽象概念的很好的引例。

二、强调矩阵初等变换的突出作用

本书在第二章就介绍矩阵初等变换的概念以及利用它们对矩阵进行消元的一般程序，建立了几个关于它们的性质的定理，并且在尽可能多的场合，反复使用矩阵初等变换来解决相关的计算问题，使它成为贯穿全书的计算工具。同时，不少依赖于矩阵初等变换的理论推导，也显得非常直观、易于理解。

三、把数学建模的思想与方法渗透到教材内容中去，强调数学知识的应用

本书注重应用背景及应用实例的介绍，以培养学生应用数学知识解决实际问题的意识与能力。

四、选择适当的教学定位

本书适应高等教育从“精英教育”到“大众化教育”过渡的需要，主要针对一般高等学校的教学实际，选择适当的教学内容（特别是在例题及习题方面）。

总之，本书教学定位适当；理论体系构思新颖，结构合理，科学性强；强调数学知识的应用；文字通俗易懂，教材内容安排深入浅出，可读性与可施教性强。

本书的第一、二、三、四、五章由张志让（成都信息工程学院）执笔，第六、七、八章由刘启宽（成都信息工程学院）执笔。《大学数学基础教程》编委会的全体成员对本书进行了初审，提出了不少修改意见。本书由中国科技大学数学系李尚志教授及电子科技大学应用数学学院谢云荪教授主审。他们认真地审阅了全书，并提出了重要的修改意见。谨向他们表示衷心的感谢。在编写本书的过程中，我们得到了高等教育出版社对本书的关心和支持，也得到成都信息工程学院计算科学系的同事们的不少帮助，在此一并致谢。

虽然我们努力使本书成为一本具有新意又便于教学的教材，但由于缺乏经验而且水平有限，书中一定会有不少不尽如人意的地方，恳请各位专家及读者提出宝贵意见。

编　者

2003 年 11 月

目　　录

第一章

矩　　阵

矩阵是线性代数的主要研究对象之一.它在数学、物理学、工程技术以及社会科学等领域都有广泛的应用.本章主要介绍矩阵及其运算.

§1　矩阵的概念

一、引例

某计算机公司有 3 个销售部门,共销售 4 种计算机.它在某月内的销售情况如表 1.1 所示:

表 1.1　　单位:台

销售部门 \ 计算机数	1	2	3	4
1	150	200	100	0
2	170	300	50	210
3	320	160	10	230

如果我们用 $a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3,4)$ 表示第 i 个部门销售第 j 种计算机的数量(如 $a_{14}=0,a_{23}=50,a_{32}=160$ 等),那么我们就可以把上述的计算机销售情况表简化成一个 3 行 4 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} 150 & 200 & 100 & 0 \\ 170 & 300 & 50 & 210 \\ 320 & 160 & 10 & 230 \end{pmatrix}.$$

一般地,如果问题所牵涉的数据以表格形式出现,那么这些数据就会常常用上述这种简化的数表来表示.

二、矩阵的定义

定义1　由 $m\times n$ 个数排成的 m 行 n 列的矩形数表

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

称为一个 m 行 n 列矩阵,简称 $m\times n$ 矩阵. 这 $m\times n$ 个数称为矩阵 A 的元素,其中 a_{ij} 表示矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素.

元素是实数的矩阵称为实矩阵;元素是复数的矩阵称为复矩阵. 本书中的矩阵都指实矩阵. (1.1)式可简记为

$$A=(a_{ij})_{m\times n}\quad 或\quad A=(a_{ij}),$$

$m\times n$ 矩阵 A 也记作 $A_{m\times n}$. 例如

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

是一个 3×4 矩阵.

由 m 个关于 n 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一次方程组成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1.2}$$

称为线性方程组. 线性方程组(1.2)的未知量的系数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 可以组成一个 $m\times n$ 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称为方程组(1.2)的系数矩阵. 矩阵 A 添加方程组(1.2)的常数列,就得到一个

$m\times(n+1)$矩阵

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

称为方程组(1.2)的增广矩阵. 反之,如果已知一个线性方程组的增广矩阵,那么我们就可以写出这个方程组.

例 1 写出下列线性方程组的系数矩阵 A 及增广矩阵 B

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \qquad\quad -3x_4=1, \\ 5x_1-3x_2+4x_3+7x_4=0, \\ x_1+6x_2 \qquad\quad +8x_4=3. \end{cases}$$

解 该方程组的系数矩阵及增广矩阵分别是

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 5 & -3 & 4 & 7 \\ 1 & 6 & 0 & 8 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & -3 & 4 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

如果两个矩阵的行数相等,列数也相等,就称它们是同型矩阵. 如果 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{ij})$ 是同型矩阵,并且它们的对应元素都相等,即

$$a_{ij}=b_{ij}\quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

那么就称矩阵 A 与矩阵 B 相等,记作 $A=B$.

三、特殊矩阵

下面我们列举几种常见的特殊类型的矩阵.

只有一行的矩阵

$$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

称为行矩阵,又称为行向量;只有一列的矩阵

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称为列矩阵,又称为列向量.

元素都是零的矩阵称为零矩阵,记作 O 或者 $O_{m\times n}$. 注意:不同型的零矩阵是不同的.

行数与列数相同的矩阵 $A_{n\times n}$ 称为 n 阶矩阵(或称为 n 阶方阵),简记为 A_n. 一个 n 阶矩阵的左上角与右下角之间的连线称为它的主对角线.

主对角线上的元素全为 1，其余位置上的元素全为零的 n 阶矩阵称为单位矩阵，记作 $\boldsymbol{I}$ 或者 $\boldsymbol{I}_n$，即

$$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_n=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}_{n\times n}.$$

主对角线下方的元素全为零的矩阵称为上三角形矩阵；类似地，主对角线上方的元素全为零的矩阵称为下三角形矩阵. 例如，矩阵

$$\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}$$

及矩阵

$$\begin{pmatrix}a&0&0\\b&d&0\\c&e&f\end{pmatrix}$$

分别是上三角形矩阵与下三角形矩阵.

特别地，只有主对角线上才有可能有非零元素（其余位置上的元素全为零）的矩阵称为对角矩阵. 例如，矩阵

$$\begin{pmatrix}a&0&0\\0&b&0\\0&0&c\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

都是对角矩阵.

习题一

1. 设有 A,B,C 三类商品，它们去年和今年的价格如下表所示：

单位：元

年份 价格 / 商品	去年	今年
A	100	200
B	90	50
C	120	150

试用矩阵表示上述表格.

2. 写出下列线性方程组的系数矩阵与增广矩阵.

(1) $\begin{cases} 2x-3y=1, \\ x-2y=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x \quad\quad -3z=0, \\ 2x+3y+z=2, \\ 3x+2y \quad\quad =5. \end{cases}$

3. 写出矩阵 $\boldsymbol{A}=((-1)^{i-j}(i+j))_{2\times 3}$ 的完全形式.

4. 写出既是上三角形矩阵,又是下三角形矩阵的三阶矩阵的一般形式.

§2　矩阵的运算

本节介绍矩阵的线性运算、矩阵的乘法以及矩阵的求逆等矩阵运算及其运算规律.

一、矩阵的线性运算

在 §1 的引例中,如果 3 个部门销售 4 种计算机(单位:台)在某两个月内销售情况的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 150 & 200 & 100 & 0 \\ 170 & 300 & 50 & 210 \\ 320 & 160 & 10 & 230 \end{pmatrix}$$

及

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 100 & 300 & 90 & 10 \\ 130 & 200 & 250 & 200 \\ 280 & 150 & 100 & 170 \end{pmatrix},$$

那么,在这两个月内 3 个部门销售 4 种计算机的销售情况可以由矩阵

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 250 & 500 & 190 & 10 \\ 300 & 500 & 300 & 410 \\ 600 & 310 & 110 & 400 \end{pmatrix}$$

表示,其中矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行第 j 列($i=1,2,3;j=1,2,3,4$)元素恰好是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的第i 行第 j 列元素之和.

定义 2　**设有两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$,那么 $m\times n$ 矩阵**

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

应该注意，只有当两个矩阵是同型矩阵时，这两个矩阵才能进行加法运算.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，记 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})$，那么 $-\boldsymbol{A}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，显然有

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=(-\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}.$$

从而规定矩阵的减法为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

如果 3 个部门销售 4 种计算机（单位：台）在第 1 个月内销售情况的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}150 & 200 & 100 & 0\\ 170 & 300 & 50 & 210\\ 320 & 160 & 10 & 230\end{pmatrix},$$

并且第 2 个月计算机的销售量均比第 1 个月增加 10%，那么在第 2 个月内 3 个部门销售 4 种计算机的销售情况可以由矩阵

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}165 & 220 & 110 & 0\\ 187 & 330 & 55 & 231\\ 352 & 176 & 11 & 253\end{pmatrix}$$

表示，其中 $\boldsymbol{D}$ 的所有元素恰好是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对应元素的 1.1 倍.

定义 3　设有一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，λ 是一个数，那么矩阵

$$\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn}\end{pmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与数 λ 的乘积（简称矩阵的数乘），记作 $\lambda\boldsymbol{A}$.

由定义 3 可知，用数 λ 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 只要把 $\boldsymbol{A}$ 的每一个元素都乘以数 λ 即可.

矩阵的加法及矩阵与数的乘法统称为矩阵的线性运算.

容易证明，矩阵的线性运算满足下列 8 条运算规律（设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为同型矩阵；λ,μ 为数）

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$;

(4) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$;

(5) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;

(6) $\lambda(\mu\boldsymbol{A})=(\lambda\mu)\boldsymbol{A}$;

(7) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$;

(8) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$.

例 2　已知矩阵