



断裂力学中的 数值计算方法及工程应用

解德 钱勤 李长安 © 著



科学出版社

www.sciencep.com

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

断裂力学中的数值计算方法及工程应用

解 德 钱 勤 李长安 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书共分六章,系统介绍了断裂力学中的数值计算方法及工程应用背景。主要内容包括:基本断裂参数数值计算方法、哑节点断裂单元、线状裂纹和面状裂纹的虚拟裂纹闭合法、若干断裂专题以及虚拟裂纹闭合法应用等。书中所有例题均有计算程序供读者参考使用。

本书可供机械、土木、航空航天、船舶与海洋工程、核电、油气管道等领域的工程技术人员和科学研究人员阅读,也可供相关专业的研究生、高年级本科生及教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

断裂力学中的数值计算方法及工程应用/解德,钱勤,李长安著. —北京:科学出版社,2009

ISBN 978-7-03-025167-1

I. 断… II. ①解…②钱…③李… III. 断裂力学-数值计算-计算方法
IV. O346.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 134890 号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 8 月 第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2009 年 8 月第一次印刷 印张: 14 3/4

印数: 1—2 000 字数: 285 000

定价: 60.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈科印〉)

序

工程结构物,特别是重大工程结构物,日益呈现出几何尺寸极端化、作业环境复杂化和功能、用途专门化的特点,其完整性和生命力是保障人员安全和运行正常的基本前提,具有显而易见的社会意义和经济意义。

近些年来,人们越来越重视研究自然灾害的应对策略。其实,工程结构物也存在着“灾害”应对问题。例如,核反应堆、大型舰船、海洋平台、油气管线等重大工程结构物,一旦出现可能导致结构解体的裂纹,就面临结构灾害。只有事前准备好应对预案,才能做到在结构灾害发生后能够及时有效的处置。断裂力学在这方面的研究中会起到不可或缺的作用。

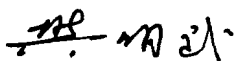
工程结构物在几何形状、材料特性和加载方式上的复杂性,使得对其进行断裂分析时必须依赖数值方法。断裂参数的计算又是断裂分析工作的基本出发点。然而,这方面的专门书籍相当缺乏,在一定程度上影响了工程师们应用断裂力学的兴趣。

解德教授等所著的《断裂力学中的数值计算方法及工程应用》对断裂参数的数值计算作了系统详实的讲解,着重介绍了能够平衡计算精度和计算效率的虚拟裂纹闭合法。在结构体系上,将理论公式、具体算例、程序讲解和应用综述相结合,由点到面逐步展开。在写作方式上,大量的数据图表和计算实例使读者易于掌握核心技术,读完此书后容易进入解决实际问题的阶段。

解德教授在阅读大量文献的基础上,结合自己的科研工作,提出了哑节点断裂单元法,突破了有限元法关于单元的传统定义,编写了有关程序,并结合多方面的工程实际问题计算了大量的实例。解德教授工作扎实、作风严谨,该书体现了他的这些基本素质。这本专著的价值不仅是学术上的,更重要的是在解决工程实际问题中所能发挥的作用。

期待着这本专著的出版将会对断裂力学在工程领域中更加广泛的应用起到积极推动作用。

中国工程院院士
湖北省科协主席



2009年7月于武汉

前 言

本书系统地介绍了断裂力学中的数值计算方法及工程应用背景。全书共分六章。在第一章中,介绍了断裂力学中的三个主要参数(应力强度因子、J 积分和应变能释放率)以及各自对应的数值计算方法,并通过一个典型例题详细讲解了实施这些数值计算方法的具体过程。在第二章中,讲解了哑节点断裂单元的基本思想,同时给出基于商业有限元软件 ABAQUS 的用户自定义单元子程序,供读者参考使用。在第三章和第四章中,分别介绍了针对线状裂纹和面状裂纹的虚拟裂纹闭合法。该方法具有对有限元网格尺寸不敏感和对裂纹尖端无需特殊单元处理的优点,体现了计算精度和计算效率的有效平衡。在第五章中,通过一系列具体例题,讨论如何应用虚拟裂纹闭合法对典型断裂问题进行分析,包括界面裂纹与弯折裂纹、冲击载荷下裂纹的响应、动静态裂纹扩展以及疲劳裂纹扩展等专题。在第六章中,总结了虚拟裂纹闭合法的工程应用情况,涉及材料(金属材料、复合材料等)的断裂分析、粘接接头和加强构件的断裂评价、载荷效应和温度效应以及微机电器件的失效等。以上内容基本上涵盖了断裂力学数值方法的理论基础、计算程序和应用背景等。

本书约 30 万字,约 50 个带有计算程序的典型例题,200 余幅插图,280 多份参考文献。本书凝结了作者们多年来的学习和研究心得,具有鲜明的实用性和很强的针对性。本书的写作特点是理论公式、具体算例、计算程序和文献综述相结合。所有的算例程序都以通用商业软件为平台。通过具体算例,读者很容易掌握方法的本质并为进一步开展自己的研究工作打下基础,可为读者节约大量的程序开发时间。算例程序可通过华中科技大学船舶与海洋工程学院的个人网页下载,链接地址如下:<http://ch.hust.edu.cn/teacher/teacherInto.asp?id=67>。

本书的出版得到国家科学技术学术著作出版基金的资助,作者在此表示衷心的感谢!

限于著者的知识视野和学术水平,书中难免存在不当之处,恳请读者批评指正。

目 录

序

前言

第一章 断裂参数的数值计算方法	1
1.1 断裂力学中的主要参数	1
1.2 断裂模式与裂纹类型	3
1.3 有限宽中心裂纹板及其闭合解	4
1.4 应力强度因子与外推法	7
1.5 J 积分与等效积分区域法	19
1.6 应变能释放率与虚拟裂纹法	27
第二章 哑节点断裂单元	36
2.1 ABAQUS 自定义单元子程序 UEL	36
2.2 虚拟裂纹闭合法的子程序	44
2.3 外推法的子程序	51
2.4 等效积分区域法的子程序	61
第三章 线状裂纹的虚拟裂纹闭合法	69
3.1 虚拟裂纹闭合法的数学解释	69
3.2 平面内任意线状裂纹的断裂单元	80
3.3 经典 I 型问题上的应用	84
3.4 复合型断裂问题	91
3.5 高阶单元和奇异单元	96
3.6 空间中任意线状裂纹的处理	99
第四章 面状裂纹的虚拟裂纹闭合法	101
4.1 面状裂纹的基本计算公式	101
4.2 面状裂纹的哑节点断裂单元	103
4.3 哑节点断裂单元的使用与例题	110
4.4 高阶单元和板壳单元	115
4.5 网格的正交性	118
4.6 空间中任意面状裂纹的处理	121
第五章 若干断裂专题问题	122
5.1 弯折裂纹与界面裂纹	122

5.2	裂纹对冲击载荷的响应	134
5.3	静态裂纹扩展问题	145
5.4	动态运动裂纹问题	153
5.5	疲劳裂纹扩展问题	158
第六章	虚拟裂纹闭合法的应用	161
6.1	复合材料的断裂分析	161
6.2	其他材料的断裂分析	175
6.3	加强构件的断裂分析与评价	180
6.4	动态载荷与循环载荷作用下的断裂响应	192
6.5	温湿效应和热载荷	202
6.6	电子封装与压电材料	204
6.7	杂例	209
参考文献		212

第一章 断裂参数的数值计算方法

经过半个多世纪的发展,断裂力学作为一个研究领域已经相当成熟。断裂力学有助于人们认识和理解材料中裂纹的产生、扩展和最终破坏的过程,并且为结构损伤容限设计提供理论基础。近年来,断裂力学的应用需求也在不断增长。在材料科学方面,除金属材料外,断裂力学还被用来分析复合材料、陶瓷材料、树脂材料和混凝土等其他材料的断裂行为。在结构分析方面,断裂力学正在从对结构构件的评估延伸到微小器件的研究中,例如微机电系统中的界面、薄膜和涂层等。对温度、电磁和腐蚀等复杂物理环境下裂纹响应的研究增强了断裂力学解决实际问题的能力。撞击载荷及循环载荷作用下裂纹的响应以及随后的裂纹扩展分析也需要借助断裂力学中的基本概念。

进行断裂分析的第一步便是断裂参数的计算。本章首先简要介绍三个主要断裂参数及其相应的计算方法。然后从有限宽中心裂纹板这个简单问题出发,说明如何实施这些计算方法的具体步骤。选择 ABAQUS 作为有限元分析平台。当然,所有的计算过程也可在其他的商业有限元软件平台上实施。在随后的章节中,将全面介绍虚拟裂纹闭合法,并针对一些断裂专题进行较为详细的讨论。最后,对虚拟裂纹闭合法的应用实例进行总结,这些实例涵盖了许多方面的工程问题。

1.1 断裂力学中的主要参数

断裂力学中有三个最为基本的参数,即应力强度因子(SIF, K)、路径无关积分(J 积分, J)和应变能释放率($SERR, G$)。应力强度因子描述了弹性裂纹尖端应力场的强弱,此参数的引入消除了由裂纹引起的应力奇异性所带来的数学上的困扰,它的计算依赖于裂纹前端的局部应力场。 J 积分和应变能释放率则是基于能量的参数。 J 积分描述的是由于裂纹的存在所吸收的能量,而应变能释放率描述的则是产生新裂纹面所需要的能量。对于线弹性材料而言,这三个参数完全可以通过材料常数联系起来,并且 J 积分和应变能释放率是等价的。

针对上述三个基本断裂参数,众多学者付出了相当大的努力来探索求解它们的方法。对于一些含裂纹的特殊构型,学者们求得了闭合形式的解(以公式、曲线或图表的形式表达出来)。这些应力强度因子的解已经汇编成了几本应力强度因子手册供工程师参考使用^[1~3]。

这些闭合解对帮助人们认识和应用断裂力学起到了非常巨大的作用。然而,由于现实问题中裂纹体构型及作用载荷的复杂性,能够得到闭合形式的解远不能满足解决实际问题的需要。随着计算机硬件和软件的迅猛发展,用数值方法计算断裂参数就变得切实可行。很多数值方法被尝试用来进行断裂参数计算,例如有限差分法^[4]、边界元方法^[5,6]和最近发展起来的无网格法^[7,8]等。然而,由于缺少商业软件的支持,这些数值方法的工业应用实例相对缺乏。

在过去的半个多世纪里,有限元法成功地应用于许多工业部门^[9]。现在有许多现成的商业软件可供使用,其中广为人知的有 ABAQUS、ADINA、ALGOR、ANSYS、COSMOS、FEMAP、LS-DYNA、MD. NASTRAN、NE. NASTRAN 和 NX. NASTRAN 等。这些商业软件在求解精度和求解效率上经过了严格测试及广泛验证,且大都能处理接触问题,并提供可直接使用的多种材料模型。因此,利用现有的商业有限元软件来进行断裂分析可以极大地减少程序编写和调试的工作量,即直接从有限元软件计算的结果中提取相关信息并用来计算断裂参数。在过去的 40 年里,为了结合有限元分析来计算断裂参数,许多学者进行了不懈的探索,并发展了针对上述三个断裂参数的数值计算技术。

最为直观的早期方法是利用裂纹尖端前沿的单元应力,或裂纹尖端后面的节点位移进行外推,来计算应力强度因子。这种外推方法要求裂纹尖端具有非常细密的网格。因此,为提高计算效率,建议在裂纹尖端使用奇异单元(singular element)或叠折单元(collapsed element),但是这些特殊单元在建模时显得很麻烦,也不便于用来模拟裂纹扩展问题。

引入 J 积分的最初目的是为了处理弹塑性材料的断裂问题。它的计算通常采用等效积分区域法(equivalent domain integral, EDI),即通过散度定理,将 J 积分中的回路积分转变为一个包含裂纹尖端的区域积分。等效积分区域法在和有限元分析结合时比较方便,也不需要裂纹尖端附近使用特殊单元,因而成为计算 J 积分的主要手段。但它的数学表达式相对繁琐,因而在实践中并不容易被工程师广泛采用。此外,用 J 积分分析裂纹扩展问题并不是一项轻松的任务。

对于一个特定长度的裂纹,应变能释放率可以通过两步有限元分析获得。两步有限元分析中采用相同的模型,只不过是裂纹的长度有微小差别。这种两步分析的方法叫做虚拟裂纹扩展法(virtual crack extension technique, VCET)。和 J 积分一样,虚拟裂纹扩展法既可以应用于线性材料断裂问题,也可以处理非线性材料断裂问题。然而虚拟裂纹扩展法需要两次有限元分析,因此它不是分析裂纹扩展问题的有效方法。另一种计算应变能释放率的方法避免了虚拟裂纹扩展法的不足,它只需一步有限元分析结果,此方法叫做虚拟裂纹闭合法(virtual crack closure technique, VCCT)。该方法的基本特点是:①计算过程中只用到裂纹尖端的节点力和裂纹尖端后面的张开位移,而节点力和位移又都是有限元分析的基本量,

因而精度上有一定的保证;②不要求使用奇异单元或叠折单元,对有限元网格尺寸大小也不敏感,计算公式简单明了。由于兼具方法简单且精度可靠的优点,使得它对工程师特别有吸引力,正在被日益广泛的采用,且应用的领域相当广泛。本书将对此方法作重点介绍。

1.2 断裂模式与裂纹类型

有关断裂模式的讨论可在任意一本断裂力学的书籍中找到,这里仅仅做简单的描述。基本的断裂模式有 I 型、II 型和 III 型,如图 1.1 所示。I 型断裂也叫张开型断裂(open mode),是一种最为危险同时也是研究最为深入的断裂模式。II 型和 III 型断裂分别叫滑移型断裂(slide mode)和撕裂型断裂(twist mode)(也叫做滑开型和撕开型),它们都和剪切应力相关,因此也都属于剪切断裂(shear mode)。I 型和 II 型属于面内断裂(in-plane fracture),III 型则属于面外断裂(out-of-plane fracture)。在工程实际中,并不是所有的断裂问题都可以简化为上述三个基本模式之一。因此,存在着复合型断裂(mixed mode),即上述三种基本模式的组合。

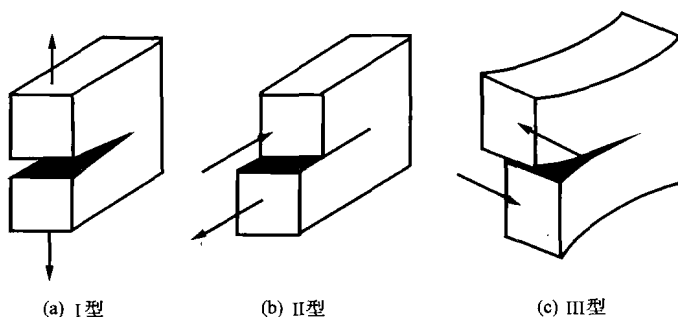


图 1.1 三种基本断裂模式示意图

通常用所处理问题的维数来说明裂纹在空间的构型,如平面内的裂纹叫做二维裂纹,空间内的裂纹叫三维裂纹等。本书只根据裂纹的形态将其分为线状裂纹(line type crack)和面状裂纹(surface type crack)两大类,如图 1.2 所示。线状裂纹通常由一个点,即裂纹尖端(crack tip)来描述。如果线状裂纹处于一个平面内,是二维问题;如果线状裂纹处于空间中,则是三维问题。面状裂纹通常由一条线,即裂纹前沿(crack front)来描述。如果一个面状裂纹处于一个平面内,则该面状裂纹为平面裂纹或称为片状裂纹,否则为一个曲面裂纹。

沿管道方向扩展的裂纹可简化为线状裂纹,而复合材料中的分层则是典型的面状裂纹。许多工程结构中的裂纹可简化为线状裂纹。

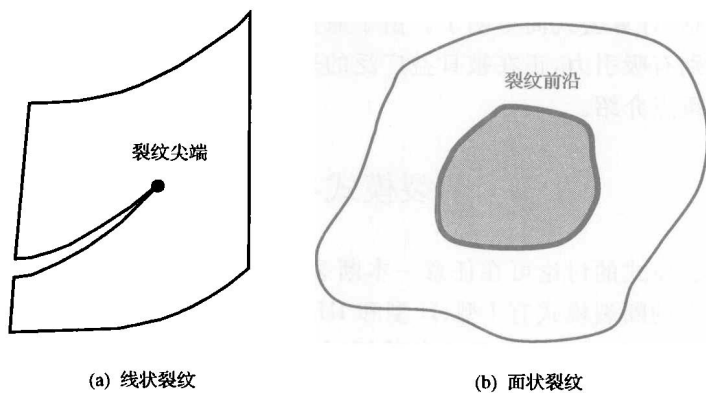


图 1.2 线状裂纹和面状裂纹示意图

1.3 有限宽中心裂纹板及其闭合解

考虑图 1.3 所示的有限宽中心裂纹板。板的高度、宽度和厚度分别用 $2H$ 、 $2W$ 和 B 来表示,中心裂纹的总长为 $2a$ 。在板的远处承受均匀的拉伸应力 σ 。假设板的

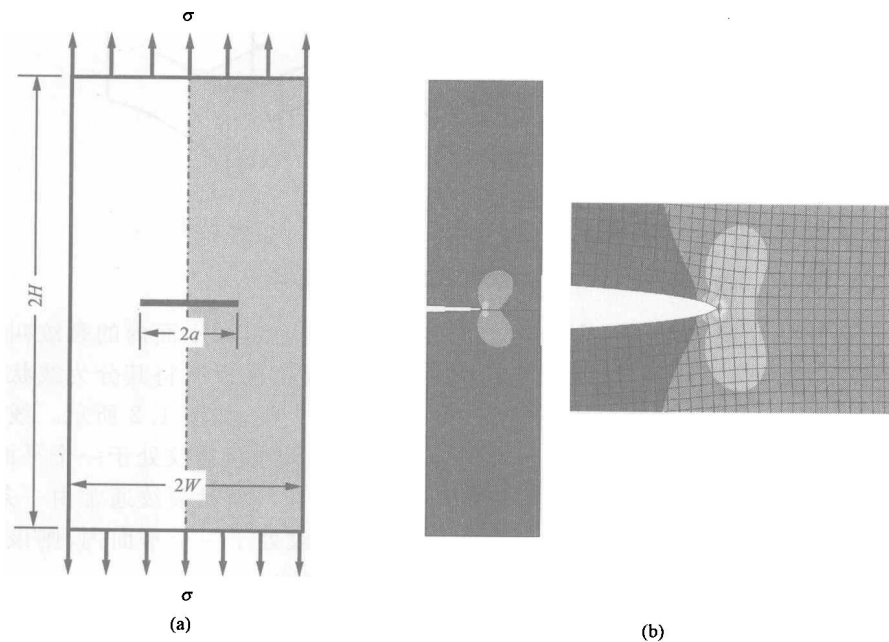


图 1.3 有限宽中心裂纹板模型

材料各向同性、均匀、线弹性,其弹性模量(或称杨氏模量)和泊松比分别用 E 和 ν 来表示。

这是一个典型的 I 型裂纹问题。其应力强度因子 K_I 的计算公式可在许多断裂力学的教科书或手册中找到^[2,10,11]。这些计算公式可以通过求解无限大板中周期排列的裂纹阵问题而得到。典型的三个计算公式为

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \sqrt{\frac{2W}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2W}} \quad (1.1a)$$

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \sqrt{\sec \frac{\pi a}{2W} \left[1 - 0.025 \left(\frac{a}{W} \right)^2 + 0.06 \left(\frac{a}{W} \right)^4 \right]} \quad (1.1b)$$

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \sqrt{\sec \frac{\pi a}{2W}} \quad (1.1c)$$

当 $a/W \rightarrow 0$ 时,公式(1.1)中应力强度因子的值趋于无限大裂纹板时的值,即 $K_I \rightarrow \sigma \sqrt{\pi a}$; 当 $a/W \rightarrow 1$ 时, $K_I \rightarrow \infty$ 。图 1.4 比较了公式(1.1a)、公式(1.1b)和公式(1.1c)。当 $a/W < 0.6$ 时,公式(1.1a)与公式(1.1b)的相对误差在 7% 以内。当 $a/W < 0.9$ 时,公式(1.1c)与公式(1.1b)非常接近,相对误差小于 2%。因此,在绝大部分范围内,公式(1.1b)中的多项式项的贡献很小,因而可以忽略不计。

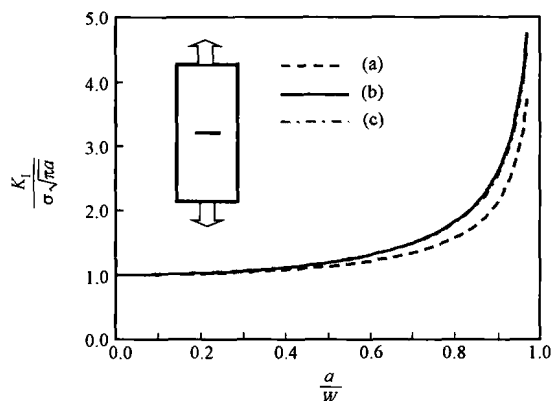


图 1.4 不同计算公式的结果比较

Irwin^[12]通过分析证明,对于各向同性均匀线弹性材料而言,J 积分、应力强度因子 K_I 和能量释放率 G_I 有以下的关系:

$$J = G_I = \frac{K_I^2}{E} \quad (1.2a)$$

$$K_I = \sqrt{EJ} = \sqrt{EG_I} \quad (1.2b)$$

式中:对于平面应力状态, $\bar{E} = E$; 对于平面应变状态, $\bar{E} = E/(1-\nu^2)$; E 和 ν 分别

为材料的弹性模量和泊松比。

[例题 1.1] 假设一块含有中心裂纹的平板,如图 1.3 所示,其几何尺寸为:半宽 $W = 100\text{mm}$,半高 $H = 200\text{mm}$,板厚 $B = 1.0\text{mm}$ 以及半裂纹长度 $a = 20\text{mm}$ 。材料的弹性模量和泊松比分别为 $E = 200 \times 10^3 \text{MPa}$ 和 $\nu = 0.25$ 。该裂纹板承受均匀应力为 $\sigma = 30\text{MPa}$ 。试进行下列计算:

- (1) 应用公式 (1.1) 计算应力强度因子;
- (2) 应用公式 (1.2) 计算 J 积分和能量释放率,假设平面应力条件。

[解答] (1) $\frac{a}{W} = \frac{20}{100} = 0.2$

由公式 (1.1a) 可计算应力强度因子为

$$K_I = 30 \times \sqrt{20\pi} \times \sqrt{\frac{2}{0.2\pi} \tan \frac{0.2\pi}{2}} = 241.8 (\text{MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}})$$

由公式 (1.1b) 可计算应力强度因子为

$$K_I = 30 \times \sqrt{20\pi} \times \sqrt{\sec \frac{0.2\pi}{2}} \times (1 - 0.025 \times 0.2^2 + 0.06 \times 0.2^4) = 243.6 (\text{MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}})$$

由公式 (1.1c) 可计算应力强度因子为

$$K_I = 30 \times \sqrt{20\pi} \times \sqrt{\sec \frac{0.2\pi}{2}} = 243.8 (\text{MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}})$$

- (2) 对应于平面应力状态,有如下关系式:

$$J = G_I = \frac{K_I^2}{E}$$

对应于 $K_I = 241.8 \text{MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}}$, 有

$$J = G_I = \frac{K_I^2}{E} = \frac{241.8^2}{200 \times 10^3} = 0.2924 (\text{N/mm})$$

对应于 $K_I = 243.6 \text{MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}}$, 有

$$J = G_I = \frac{K_I^2}{E} = \frac{243.6^2}{200 \times 10^3} = 0.2968 (\text{N/mm})$$

对应于 $K_I = 243.8 \text{MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}}$, 有

$$J = G_I = \frac{K_I^2}{E} = \frac{243.8^2}{200 \times 10^3} = 0.2973 (\text{N/mm})$$

[结束]

表 1.1 列出了计算结果。正如预期的那样,对于 $a/W = 0.2$ 这个情形,公式 (1.1a)、公式 (1.1b) 和公式 (1.1c) 三者给出的结果很接近。因此,取 $K_I = 243.6 \text{MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}}$ 或 $G_I = J = 0.2968 \text{N/mm}$ 作为将来数值计算的比较依据。

表 1.1 当 $a/W=0.2$ 时,三个计算公式的结果比较

$\frac{a}{W}$	$K_I/\text{MPa} \cdot \sqrt{\text{mm}}$			$G_I(\text{或 } J)/(\text{N/mm})$		
	公式(1.1a)	公式(1.1b)	公式(1.1c)	公式(1.1a)	公式(1.1b)	公式(1.1c)
0.2	241.8	243.6	243.8	0.2924	0.2968	0.2973

从 1.4 节开始,将逐一用前述讨论的数值技术来重复计算这个问题的断裂参数。通过详细的过程和具体的数字来了解这些方法的异同之处,增加感性认识。由于对称性,只对板的四分之一划分有限元网格。仅仅采用常规的四节点平面应力单元(ABAQUS 中的 CPS4 单元),不在裂纹尖端采取任何的特殊处理方式。网格的形式如图 1.3 所示。在宽度方向划分 100 个单元(即每个单元的特征长度为 1mm),使得裂尖位置和单元数目能精确对应。这样做的目的纯粹是为了方便确定裂尖的位置。为了简化过程,突出每种数值方法的基本特征,这里只讨论 I 型问题。

1.4 应力强度因子与外推法

1.4.1 应力强度因子的概念

众所周知,对于线弹性材料而言,裂纹尖端的应力是无穷大(即应力奇异性)的。因此,裂尖前端单元内积分点上的应力值将依赖于有限元的网格尺寸,即网格尺寸越小,所得到的应力值就越高。换句话说,应力值不收敛于网格尺寸。因此,裂纹尖端前的应力值不能作为研究裂纹问题的参数。应力强度因子(stress intensity factor, SIF)概念的引入,就是为了克服这个数学上的固有困难,用来描述裂尖附近应力奇异的严重程度。

图 1.5 表示了沿 X 轴方向裂纹前端的应力分量。弹性理论的分析表明,裂纹尖端处的应力具有 $r^{-1/2}$ 的奇异性。为了消除这个奇异性,引入应力强度因子的概念(相当于应用高等数学中的洛比达法则)。对于 I 型问题而言,其定义为

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} [\sigma_y(r, \theta = 0) \sqrt{2\pi r}] \quad (1.3)$$

式中: σ_y 为裂纹前端垂直于裂纹方向的应力

分量; r 为距离裂纹尖端的极半径; θ 为相对于 X 轴(裂纹方向)的极角。

或者等效地, K_I 也可由裂纹面上垂直于裂纹方向的张开位移分量(v)表达如下:

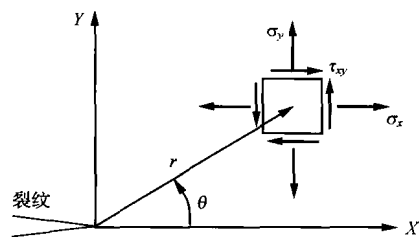


图 1.5 裂纹尖端坐标系与应力分布

$$K_I = \frac{2\mu}{\kappa + 1} \lim_{r \rightarrow 0} \left[v(r, \theta = \pi) \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \right] \quad (1.4)$$

式中: μ 为剪切模量; κ 为膨胀模量, 对于平面应力问题, $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$; 对于平面应变问题, $\kappa = 3 - 4\nu$ 。

1.4.2 基于单元应力的外推法

计算应力强度因子最为直接的方法是基于应力的外推法。从公式 (1.3) 可以看出, K_I 是在裂纹尖端处对应于 $r = 0$ 时的值, 然而直接的数值计算无法达到 $r = 0$ 。因此, 采用外推法来计算 K_I 。其基本思路如下。

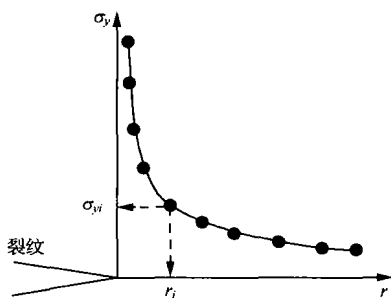


图 1.6 裂尖前端的应力分布示意图

在有限元分析中, 裂纹前端单元中积分点上的应力值 σ_y 和对应的积分点坐标值 r 是很容易直接读取的。在商业有限元软件中都可以直接输出。如果描绘 σ_y 与 r 的关系, 就会得到图 1.6 所示的应力分布曲线。随着单元的细化, 应力值趋于无穷大, 即应力奇异。

虽然不能用数值方法直接计算裂纹尖端处的 K_I 值, 但是裂纹前端那些非奇异的应力值却是已知的。即对应于每一个 $r_i > 0$, 有一个非奇异的应力值 σ_{yi} 以及对应的 K_{Ii} :

$$K_{Ii} = \sigma_{yi} \sqrt{2\pi r_i} \quad (1.5)$$

然后, 可以构造数据对 (r_i, K_{Ii}) , 用最小二乘法 (least square method) 来拟合数据点。最小二乘法假定最佳的曲线拟合时, 数据点与设定曲线之间的方差最小。假定 r_i 和 K_{Ii} 之间可用线性关系来近似, 则有

$$\hat{K}_I = Ar + B \quad (1.6)$$

当 $r = 0$ 时, $K_I \approx \hat{K}_I(r = 0) = B$ 。

从公式 (1.6) 可以看出, 每个数据点处的偏差为 $(\hat{K}_{Ii} - K_{Ii})$ 。根据最小二乘法的意义, 最佳的拟合应该满足要求

$$S = \sum (\hat{K}_{Ii} - K_{Ii})^2 = \sum (Ar_i + B - K_{Ii})^2 = \text{最小值} \quad (1.7)$$

因此, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial A} &= 2 \sum (Ar_i + B - K_{Ii}) r_i = 2 (A \sum r_i^2 + B \sum r_i - \sum r_i K_{Ii}) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial B} &= 2 \sum (Ar_i + B - K_{Ii}) = 2 (A \sum r_i + BN - \sum K_{Ii}) = 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

求解线性方程组 (1.8), 可以得到所拟合直线的斜率 (A) 和截距 (B) 如下:

$$A = \frac{\sum r_i \sum K_{li} - N \sum r_i K_{li}}{(\sum r_i)^2 - N \sum r_i^2} \quad (1.9a)$$

$$K_I \approx B = \frac{\sum r_i \sum r_i K_{li} - \sum r_i^2 \sum K_{li}}{(\sum r_i)^2 - N \sum r_i^2} \quad (1.9b)$$

其截距的物理意义即为所需计算的应力强度因子。下面通过具体例题来说明计算过程。

[例题 1.2] 用基于应力的外推法, 计算例题 1.1 中心裂纹板的应力强度因子。采用通用商业有限元软件 ABAQUS 进行有限元分析时, 其脚本形式的输入程序如下:

```
* HEAD
  [Example 1-2]
  abaqus job = example_1_2
  K-stress based extrapolation technique

* PREPRINT, HISTORY = NO, MODEL = NO, CONTACT = NO, ECHO = YES
*****
**                                PARAMETERS
*****
* PARAMETER
  NE = 100
  B = 1.0
  W = 100
  H = 200
  sig = 30
  YM = 200E3
  XNU = 0.3
**
  NE2 = NE + 2
  NE3 = NE + 3
  NEE = 2 * NE
  NT = NE * 2 * NE
  NL = NT - NE + 1
  NA = NE + 1
  NC = (NE + 1) * (2 * NE + 1)
  NB = NC - NE
*****
**                                MODEL (GEOMETRY AND MATERIAL)
*****
* NODE
  1, 0.0, 0.0
  <NA>, <W>, 0.0
  <NB>, 0.0, <H>
  <NC>, <W>, <H>
* NGEN, NSET = west
  1, <NB>, <NA>
* NGEN, NSET = east
```

```

<NA>, <NC>, <NA>
* NFILL, NSET = nall
  west, east, <NE>, 1
* ELEMENT, TYPE = CPS4
  1, 1, 2, <NE3>, <NE2>
* ELGEN, ELSET = plate
  1, <NE>, 1, 1, <NEE>, <NA>, <NE>
* SOLID SECTION, ELSET = plate, MATERIAL = steel
  <B>
* MATERIAL, NAME = steel
* ELASTIC
  <YM>, <XNU>
*****
**                                BC AND LOAD NSETS
*****
* ELSET, ELSET = north, GEN
  <NL>, <NT>
* NSET, NSET = crack, GEN
  21, 101
* ELSET, ELSET = KELSET, GEN
  21, 29
*****
**                                ANALYSIS HISTORY
*****
* STEP
* STATIC
* BOUNDARY
  crack, 2
  west, 1
* DLOAD
  north, p3, - <sig>
* EL PRINT, FREQ = 0
* NODE PRINT, FREQ = 0
* EL PRINT, ELSET = KELSET
  COORD, S22
* END STEP

```

如图 1.7 所示,选择裂纹前端单元 21 至单元 29 的应力分量参与应力强度因

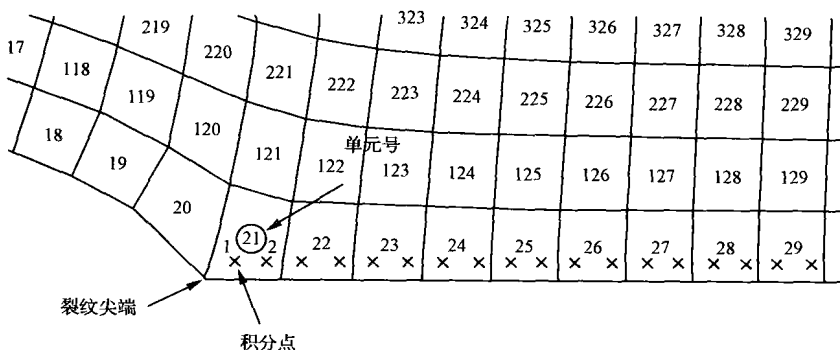


图 1.7 有限元模型中裂尖前端的单元编号