科 學 譯 叢

——理論及應用力學：第3册——

各向異性體數學彈性力學

M. M. 弗里德曼 作

中 國 科 學 院 出 版

科 學 譯 叢

—— 理論及應用力學：第 3 冊 ——

各向異性體數學彈性力學

M. M. 弗里德曼 作

胡 海 昌 譯

中 國 科 學 院 出 版

1953 年 7 月

科 學 譯 叢

—— 理論及應用力學：第3册 ——

各向異性體數學彈性力學

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД (ОБЗОР)

(原載 Прикладная Математика и Механика, 1950, Том 14.)

原作者　M. M. Фридман
翻譯者　胡　海　昌
出版者　中　國　科　學　院
印刷者　北　京　新　華　印　刷　廠
發行者　中　國　圖　書　發　行　公　司

書號：53025(理)02　　1953年7月初　版
(京)3,301—8,320　　1953年11月第二次印刷
字數：24,300　　定　價：2,800元

目　錄

各向異性體數學彈性力學*†

M. M. 弗里德曼原著

本文把發表在蘇聯的各向異性體數學彈性力學的研究工作作一概述。內容包括下列各項問題：平面問題、廣義平面形變、稜桿底扭轉和彎曲、迴轉體底軸對稱形變。各向異性薄板底彎曲問題，已在 Г. Ю. 詹湟里傑[13]底概述性的著作中說明**。至於穩定問題則需要一篇單獨的概述，因此不在本文中討論。但是作者仍把有關的文獻收集在後面。本文包括下列三部份：

---

*原載 *Прикладная математика и механика* 第 14 卷 (1950)，第 321—340 頁。——譯者註

†最近二十餘年來，蘇聯學者探討了各向異性體數學彈性力學底許多基本問題，這些工作是 Г. В. 高盧索夫和 Н. И. 穆斯海里什維里在各向同性體彈性力學底平面問題上的研究進一步的發展和推廣。Г. В. 高盧索夫和 Н. И. 穆斯海里什維里兩人底研究，在國際學術界上十分著名。蘇聯學者關於各向異性體彈性力學的許多著作，已在許多主要的研究性的刊物上概述過。

然而最近幾年來，一批國外作者，主要是英國作者，重複了蘇聯學者早已獲得的結果，並把它當作自己底結果來發表。

例如 A. E. Green, C. J. Taylor, A. S. Stevenson, S. Holgate (*Proceedings of the Roy. Soc., London, Ser. A*, Vol. 173, pp. 162, 173, 1939; Vol. 184, N. 997, N. 998, 1945; Vol. 185, N. 1000, 1946) 重複了 С. Г. 列赫尼茨基用高盧索夫·穆斯海里什維里底方法所求得的結果，而把這個方法歸功於他們底同伴。於是爲了鞏固已得的結果，這些作者就彼此相互引證。

像這類"科學方向"出現在英國古老有名的出版物上是有失體面的。

本概述底基本目的，在於給青年科學工作者把發表在蘇聯科學刊物上關於各向異性體彈性力學的著作，作了一個介紹。

**已經由本文譯者譯成中文，見中國科學院出版的科學譯叢，理論及應用力學第2册，"蘇聯厚板與薄板力學工作的概述"（1953 年 7 月出版）。——譯者註

第一部份是平面問題的建立和解答存在及唯一性的證明等工作的概述。

第二部份討論平面問題底各種有效的解法。

第三部份專門討論廣義平面形變；稜桿底扭轉和彎曲；迴轉體底軸對稱形變。

一. 各向異性體數學彈性力學底平面問題

(一) 各向異性體彈性力學底基本方程

各向異性體彈性力學底基本方程是平衡方程

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+X=0,\\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+Y=0;\\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+Z=0,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

和表示廣義虎克定律的方程

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x}=a_{11}\sigma_x+a_{12}\sigma_y+a_{13}\sigma_z+a_{14}\tau_{yz}+a_{15}\tau_{xz}+a_{16}\tau_{xy},\\
&\frac{\partial v}{\partial y}=a_{21}\sigma_x+a_{22}\sigma_y+a_{23}\sigma_z+a_{24}\tau_{yz}+a_{25}\tau_{xz}+a_{26}\tau_{xy},\\
&\frac{\partial w}{\partial z}=a_{31}\sigma_x+a_{32}\sigma_y+a_{33}\sigma_z+a_{34}\tau_{yz}+a_{35}\tau_{xz}+a_{36}\tau_{xy},\\
&\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=a_{41}\sigma_x+a_{42}\sigma_y+a_{43}\sigma_z+a_{44}\tau_{yz}+a_{45}\tau_{xz}+a_{46}\tau_{xy},
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=a_{51}\sigma_x+a_{52}\sigma_y+a_{53}\sigma_z+a_{54}\tau_{yz}+a_{55}\tau_{xz}+a_{56}\tau_{xy},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=a_{61}\sigma_x+a_{62}\sigma_y+a_{63}\sigma_z+a_{64}\tau_{yz}+a_{65}\tau_{xz}+a_{66}\tau_{xy}.$$

在一均匀、直線性各向異性的物體，規定各向異性狀態的係數 a_{kj} 都是常數。係數 a_{kj} 在六維空間內構成一組二級對稱張量，因此在變換坐標軸時係依照已知的規律而變換。在普遍場合下，36 個係數 a_{kj} 中獨立不等的有 21 個。假如在均匀彈性體內的任一點，都有一彈性對稱面與 xy 面平行，那麼

$$a_{14}=a_{15}=a_{24}=a_{25}=a_{34}=a_{35}=a_{46}=a_{56}=0, \tag{1.3}$$

於是獨立彈性係數等於 13 個。假如經過均匀彈性體內的任一點，都有三個互相垂直的彈性對稱面，各跟 x, y, z 軸垂直，那末除（1.3）外，尙有

$$a_{16}=a_{26}=a_{36}=a_{45}=0, \tag{1.4}$$

於是獨立彈性係數等於 9 個。最後假定經過均匀彈性體內的任一點，都有一平面跟 xy 面平行，其上的任一方向對彈性言皆爲等效，那麼除（1.3）和（1.4）外，尙須增加

$$a_{23}=a_{13},\quad a_{22}=a_{11},\quad a_{55}=a_{44},\quad a_{66}=2(a_{11}-a_{12}), \tag{1.5}$$

於是在一橫貫各向同性的物體,獨立彈性係數等於 5 個。

廣義虎克定律的分析研究，見於 П. 別赫切列夫（П. Бехтерев）底著作[6,7]中。數種物質的彈性係數 a_{kj} 的數值，

記錄在著作[5,12,53,54,56,66,76]中。我們要特別提出，在 A. H. 米慶斯基（A. H. Митинский）底文章裏[54]，曾對木材底彈性係數作過討論。

（二） 平面形變

均勻、各向異性的無限柱底平面形變問題，首先由 C. Γ. 列赫尼茨基（C. Γ. Лехницкий）加以研究[20,21,24]。

考慮一均勻、各向異性的無限柱，並假定：(i) 柱內每一點，都有一彈性對稱面，與柱之母線垂直；(ii) 作用於柱的體積力和表面力無沿母線方向的分力，亦不沿母線方向而變更。在上述假設下，該柱的狀態即爲平面形變：柱底正截面經形變後並不彎曲，任意二正截面亦無相對轉動。取柱底某一正截面爲 xy 平面，取 z 軸使與母線平行，此外爲了簡便起見假定沒有體積力，於是

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y),\quad w=0,$$

$$\tau_{yz}=0,\quad \tau_{xz}=0,\quad \sigma_z=-\frac{a_{13}\sigma_x+a_{23}\sigma_y+a_{36}\tau_{xy}}{a_{33}},$$

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\quad \sigma_y=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y},\tag{1.6}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial x}=\beta_{11}\sigma_x+\beta_{12}\sigma_y+\beta_{16}\tau_{xy},\\ \frac{\partial v}{\partial y}=\beta_{21}\sigma_x+\beta_{22}\sigma_y+\beta_{26}\tau_{xy},\\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\beta_{16}\sigma_x+\beta_{26}\sigma_y+\beta_{66}\tau_{xy}.\end{gathered}\tag{1.7}$$

這裏 $\beta_{kj} = a_{kj} - a_{k3}\, a_{3j} / a_{33}$ $(k, j = 1, 2, 6)$。應力函數 F 適合四階偏微分方程

$$\beta_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2\,\beta_{26} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + (2\,\beta_{12} + \beta_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} -$$

$$-2\,\beta_{16} \frac{\partial^4 F}{\partial x\, \partial y^3} + \beta_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0. \qquad (1.8)$$

特性方程

$$\beta_{11}\, \mu^4 - 2\,\beta_{16}\, \mu^3 + (2\,\beta_{12} + \beta_{66})\, \mu^2 - 2\,\beta_{26}\, \mu + \beta_{22} = 0 \qquad (1.9)$$

決無實根。命 μ_1, μ_2, $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$ 為特性方程 (1.9) 底四根。倘使 μ_1, μ_2, $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$ 等四根各不相等，那麼方程 (1.8) 底通解可以寫成下面的形式:

$$F(x, y) = 2Re\,[F_1(z_1) + F_2(z_2)]. \qquad (1.10)$$

這裏 $F_1(z_1)$ 和 $F_2(F_2)$ 是變數 $z_1 = x_1 + iy_1 = x + \mu_1 y$ 和 $z_2 = x_2 + iy_2 = x + \mu_2 y$ 底任意函數，各在區域 S_1 和 S_2 中是分析的。倘使特性方程 (1.9)底根成對相等，那麼 (1.9) 式極易簡化為雙調和方程，後者底通解是所熟知的。此後假定方程 (1.9) 底根各不相同。

應力張量底分量 σ_x, σ_y, τ_{xy} 和位移矢量底分量 u, v 有下列諸公式:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2Re\left[\mu_1^2\, \Phi_1'(z_1) + \mu_2^2\, \Phi_2'(z_2)\right], \\ \sigma_y &= 2Re\left[\Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2)\right], \qquad (1.11) \\ \tau_{xy} &= -2Re\left[\mu_1\, \Phi_1'(z_1) + \mu_2\, \Phi_2'(z_2)\right], \end{aligned}$$

$$u = 2Re\left[p_1\Phi_1(z_1) + p_2\Phi_2(z_2)\right] - \omega y + u_0, \quad (1.12)$$

$$v = 2Re\left[q_1\Phi_1(z_1) + q_2\Phi_2(z_2)\right] + \omega x + v_0.$$

這裏

$$\Phi_k(z_k) = \frac{dF_k(z_k)}{dz_k}, \qquad (k = 1, 2).$$

$$p_k = \beta_{11}\mu_k^2 + \beta_{12} - \beta_{16}\mu_k,$$

$$q_k = \beta_{12}\mu_k - \beta_{26} + \beta_{22}/\mu_k.$$

倘在柱底表面已知外力，函數 Φ_1 和 Φ_2 必須適合下列邊界條件：

$$2Re\left[\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)\right] = f_1 + C_1,$$
$$2Re\left[\mu_1\Phi_1(z_1) + \mu_2\Phi_2(z_2)\right] = f_2 + C_2, \quad (1.13)$$

其中 f_1 和 f_2 是已知函數，C_1 和 C_2 是複常數。倘在柱底表面已知位移，那麽 Φ_1 和 Φ_2 必須適合下列邊界條件：

$$2Re\left[p_1\Phi_1(z_1) + p_2\Phi_2(z_2)\right] = g_1,$$
$$2Re\left[q_1\Phi_1(z_1) + q_2\Phi_2(z_2)\right] = g_2, \quad (1.14)$$

其中 g_1 和 g_2 是已知函數。

倘柱截面 S 是一單聯通區域，那麽函數 Φ_1 和 Φ_2 是各在區域 S_1 和 S_2 內的單值分析函數。倘 S 是一多聯通區域，那麽一般地說來，Φ_1 和 Φ_2 是各在區域 S_1 和 S_2 內的多值分

析函數。多值性的處理，可由應力張量和位移矢量在區域 S 中的單值性所完全決定。

(三) 廣義平面應力狀態

均匀各向異性柱底平面形變問題，在數學上與各向異性薄板底廣義平面應力問題相同，亦首先由 C. Г. 列赫尼茨基加以研究[20,21,25]。

考慮一均勻各向異性等厚的薄板。取板底中截面爲 xy 面，取 z 軸使與 xy 面垂直。假定：(i) 板內每一點都有一彈性對稱面與中截面平行；(ii) 板受分佈於板側面的外力而產生形變。這些外力分佈在與 xy 面平行的一平面上，對中截面對稱，並且沿厚度的變化很小。在上述假設下，薄板底應力形變狀態足能用應力張量和位移矢量沿厚度的平均值來表示。關於應力張量和位移矢量沿厚度的平均值，有關係式 (1.6) 和 (1.7) 以及方程 (1.8)，只須用 a_{ki} 代替原式中的 β_{ki}。與平面形變的情形相似，廣義平面應力底特性方程 (1.9) 亦無實根。再如上節假定特性方程底根各不相等，C. Г. 列赫尼茨基求得應力張量和位移矢量沿厚度的平均值底公式 (1.11) 和(1.12)，只須用 a_{ki} 代替原式中的諸 β_{ki}。

(四) 各向異性體彈性力學平面問題底解答底存在與唯一性

各向異性體彈性力學平面問題解答底存在和唯一性，首先由 C. Г. 米赫林[57] 證明。對於由一足夠圓滑的邊緣所圍成的單聯通區域內的彈性力學底平面問題，C. Г. 米赫林將它化爲一組四個希伯核的奇異積分方程。再應用熟知的正常化的方法，C. Г. 米赫林再將此組奇異積分方程化爲一組同等的第

二類弗蘭特歐姆積分方程，後者底唯一的解答，提供了彈性力學中所設問題底解答。

之後，Г. Н. 沙文[69]證明了單聯通無限區域內的各向異性體彈性力學平面問題解答底存在和唯一定理，他還對單聯通有限區域內的存在和唯一定理，作了另一證明[70]。

Д. И. 雪爾門[81,82,83]指出了若干求解多聯通區域內的各向異性體彈性力學平面問題的方法。

今討論這些方法中的一種。

設各向異性體在平面 $z = x + iy$ 上佔據一多聯通區域 S，其邊界 L 包括 $m+1$ 個簡單閉合曲線 l_1，l_2，$\cdots l_{m+1}$。再假定作用於任一邊界 l_k 上的外力底合力等於零。倘在某一邊界 l_k 上的外力底合力不等於零，亦易簡化爲上述的情形。Д. И. 雪爾門將各向異性彈性力學底平面問題化爲下列第二類弗蘭特歐姆積分方程：

$$\begin{aligned}
&\overline{\omega(t_0)} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\omega(t)}\, d\lg \frac{\bar{t}_1 - \bar{t}_{10}}{t_2 - t_{20}} + \\
&\quad + \frac{\mu_1 - \bar{\mu}_2}{\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2}\,\frac{1}{2\pi i}\int_L \omega(t)\, d\lg \frac{t_1 - t_{10}}{t_2 - t_{20}} + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m+1}\left(\frac{\mu_1 - \bar{\mu}_2}{\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2}\,\frac{b_k}{t_{10} - a_k} + \frac{\bar{b}_k}{\bar{t}_{10} - \bar{a}_k}\right) = \\
&\quad = \frac{(1 - i\bar{\mu}_2)\,[f(t_0) + c_j] - (1 + i\bar{\mu}_2)\,[\overline{f(t_0)} + \bar{c}_j]}{2i\,(\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2)}, \qquad (1.15)
\end{aligned}$$

式中 $w(t)$ 是未知函數，$f(t)$ 是已知函數，t 和 t_0，t_1 和 t_{10}，t_2 和 t_{20} 是在 L，L_1，L_2 上各點的複座標；這裏 L_1，L_2 是區

域 S_1, S_2 底邊界，b_k 和 c_k 是未知函數 $w(t)$ 底某泛函數，a_k 是用某一方式決定的常數。弗蘭特歐姆積分方程（1.15）有唯一的解答適合所有的條件。

二. 各向異性體彈性力學平面問題底有效解法

如上節所指出，在著作[57,69,70,80－84]中，提出了求解在一十分普遍的區域內的彈性力學平面問題底方法。然而應用這些一般性方法來求解具體的問題，常常遇到巨大的困難。因此便自然地引起了找尋另外一些比較不普遍但是更有效的解法。

現在實用上重要的許多問題，即指出了這些解法。它們或者從直接選擇應力函數得到，或者應用複變函數理論底方法得到。後者是一個寶貴的工具，正和各向同性問題的情形相似。

(一) 初級解答

我們先指出若干能用初級方法求解的問題。選擇整式的函數，C. Г. 列赫尼茨基[20]討論了下列各項問題：

(1) 各向異性梁底單純彎曲。

(2) 一端固定的各向異性梁，在另一端担負一外力的作用。

(3) 一端固定的各向異性梁，担負置於上側的均佈載荷所產生的彎曲。

(4) 兩端支承的各向異性梁，在置於上側的均佈載荷作用下的彎曲。

之後，上述的若干問題又為 A. A. 庫爾杜摩夫[16]用他種方法解決。

更複雜一些的問題是各向異性斜劈形的懸臂梁底彎曲問

題。C. Г. 列赫尼茨基選用 $F = r^n \Phi_n(\theta)$（式中 r, θ 爲極坐標）形式的應力函數，解決了下列各項問題：

（1）斜劈在置於頂點的外力作用下的彎曲。

（2）斜劈在置於頂點的力偶作用下的彎曲。

（3）斜劈在置於上側的均佈載荷作用下的彎曲。

C. Г. 列赫尼茨基[32]還指出了柱型各向異性的曲梁底單純彎曲、柱型各向異性的曲梁在橫力作用下的彎曲，以及柱型各向異性的管在均佈內外壓力作用下的應力分佈狀態等問題底初等解法。後者在特定的各向異性狀態，亦曾由聖維那求得。柱型各向異性轉動盤底應力分佈問題，由 Г. C. 格盧什可夫[15]所解決。能用初等方法求解的問題，還有關於橢圓形各向異性轉動盤底應力分佈問題。這個解答由 C. Г. 列赫尼茨基求得[42]，他甚至將應力沿板厚底變化亦考慮在內。

末了，我們欲指出正交各向異性 (ортотропный) 半無限體底彈性力學平面問題解答，由 C. Г. 列赫尼茨基[20]用一福里哀積分求得。

（二） 應用複變函數理論所得的解答

在 1936 年，C. Г. 列赫尼茨基[22]找得了無限區域中有一橢圓洞的各向異性體彈性力學平面問題底有效解法。自從建立了各向異性體彈性力學底基本方程，並證明該組方程底解答底存在和唯一後，這一解答就在各向異性體彈性力學進一步的發展中獲得。今詳細討論這一解法。

順着橢圓空洞主軸的方向取座標軸。設橢圓洞邊界底方程是 $z = a\cos\theta + ib\sin\theta$，跟隨 $z = x + iy$ 平面，再考慮由 z

平面經一遠交變換而得的平面 $z_1=x+\mu_1 y$ 和 $z_2=x+\mu_2 y$. 經這一變換後，在 z 平面上的已知橢圓 Γ 變換而成爲在 z_1 和 z_2 平面上的橢圓 Γ_1 和 Γ_2。用下列函數將 z 平面上橢圓 Γ 底外域和 z_1, z_2 平面上橢圓 Γ_1, Γ_2 底外域變換在 z_1 平面上單位圓 γ 底外域

$$z=\frac{a+b}{2}\zeta+\frac{a-b}{2}\frac{1}{\zeta},$$

$$z_k=\frac{a-i\mu_k b}{2}\zeta+\frac{a+i\mu_k b}{2}\frac{1}{\zeta},\quad (k=1,2) \tag{2.1}$$

我們便得橢圓 Γ, Γ_1, Γ_2 上遠交對應的各點對應於單位圓圓周 γ 上的同一點，邊界條件 (1.13) 經過保角變換後，變爲單位圓圓周上的邊界條件。在 Γ_k 外，$\Phi_k(z_k)$ 的形式是

$$\Phi_k(z_k)=A_{k0}+A_k \lg\frac{z_k+\sqrt{z_k^2-a^2-\mu_k^2 b^2}}{a-i\mu_k b}+$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}A_{km}\left(\frac{a-i\mu_k b}{z_k+\sqrt{z_k^2-a^2-\mu_k^2 b^2}}\right)^m. \tag{2.2}$$

這樣再將邊界條件 (1.13) 右端的已知部份展成級數

$$f_k=\alpha_k\lg\sigma+\alpha_{k0}+\sum_{m=1}^{\infty}(\alpha_{km}\sigma^m+\overline{\alpha_{km}}\,\overline{\sigma^m})\quad (k=1,2)$$

(式中 $\sigma=e^{i\theta}$)，將函數 (2.2) 代入邊界條件 (1.13)，並再比較同次 σ 底係數，便求得一組方程式以定係數 A_k 和 A_{km}。係數 A_{km} 可直接由此組方程式求出。從已得的方程式求 A_k,

尙須增加保證應力張量和位移矢量都是單值的條件。在 С. Г. 列赫尼茨基底著作[23,25,27,29,35]中，已將求得的解答對實用上重要的問題作了許多應用。另外一些特殊場合，曾由 Г. Н. 沙文[67] 和 И. И. 法也爾別格[78]研究過。

在 1939 年，Г. Н. 沙文[71]指出了無限區域內有一橢圓空洞的各向異性體彈性力學平面問題底另一解法。將橢圓 Г 和 Γ_1, Γ_2 底外域變換在單位圓底內域，並再依照變換後的邊界條件 (1.13) 的實數部份，應用開拓分析函數的錫華茨公式於此邊界條件，Г. Н. 沙文便求得了所設問題底一個形式緊縮的解答。在同一文中，Г. Н. 沙文應用錫華茨公式於半無限面，求得半無限面各向異性體彈性力學平面問題的解答如下：

$$\begin{aligned}\Phi_1(z_1) &= \frac{i}{2\pi(\mu_1-\mu_2)}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu_2 f_1 - f_2)\frac{1+z_1 x}{x-z_1}\frac{dx}{1+x^2},\\ \Phi_2(z_2) &= -\frac{i}{2\pi(\mu_1-\mu_2)}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu_1 f_1 - f_2)\frac{1+z_2 x}{x-z_2}\frac{dx}{1+x^2}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

之後，Г. Н. 沙文應用這些公式以求解若干各向異性體彈性力學底接觸問題。

一個實心橢圓底各向異性體彈性力學底平面問題底解答，首由 С. Г. 列赫尼茨基[26]在 1937 年求得。在橢圓 Γ_k 內，函數 $\Phi_k(z_k)$ 可以用一特定的多項式展開成級數如下：

$$\Phi_k(z_k) = A_{k0} + A_{k1} z_k + \\ + \sum_{m=2}^{\infty} A_{km}\left[\left(z_k - \sqrt{z_k^2 - a^2 - \mu_k^2 b^2}\right)^m + \left(z_k + \sqrt{z_k^2 - a^2 - \mu_k^2 b^2}\right)^m\right]. \tag{2.4}$$

在 Γ_k 底邊界上，級數（2.4）變爲 σ 底冪級數。再將邊界條件（1.13）底右端亦展成 σ 底冪級數，作者便求得了一組關於未知係數底方程。此組方程在適合平衡條件時，必有唯一的解答。

兩年之後，П. П. 科法立夫[17]聯合應用 Н. И. 穆斯海里什維里所建議用以解有關的各向同性問題底方法，和 С. Г. 列赫尼茨基用以解無限區域中有橢圓洞的各向異性問題底方法，求得了實心橢圓的各向異性體彈性力學平面問題底另一解答。在平面 z 上由橢圓 Γ 所圍成的區域，在 z_1 和 z_2 平面上相當於由橢圓 Γ_1 和 Γ_2 所圍成的區域。在區域 $S_k\,(k=1,2)$ 作一截縫 l_k 以聯接大主軸上 $z_k=c_k$, $z_k=-c_k\,(c_k{}^2=a^2+\mu_k{}^2b^2)$ 的兩點。函數（2.1）將有一截縫的區域 S_k 變換成一環，使橢圓 Γ_k 相當於外面的單位圓 γ，截縫 l_k 相當於裏面半徑小於一的圓。函數 $\Phi_k(z_k)$ 在區域 S 中是單值並分析的，經變換後，變爲在環中是單值並分析的函數，因此可以展開成級數：

$$\Phi_k(z_k)=\sum_{-\infty}^{+\infty}A_{km}\left(\frac{z_k+\sqrt{z_k^2-a^2-\mu_k^2b^2}}{a-i\mu_k b}\right)^m. \tag{2.5}$$

從函數 $\Phi_k(z_k)$ 在截縫 l_k 上下兩側底數值必須相等的條件，得上式中係數底關係式

$$A_{k(-m)}=\left(\frac{a+i\mu_k b}{a-i\mu_k b}\right)^m A_{km}. \tag{2.6}$$

將邊界條件（1.13）右端已知部份展成福里哀級數，將函數