面向21世纪课程教材
Textbook Series for 21st Century

高等学校经济管理学科数学基础
主编　范培华　胡显佑

线性代数

第三版

中国人民大学　卢　刚　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

面 向 2 1 世 纪 课 程 教 材
Textbook Series for 21st Century

高等学校经济管理学科数学基础
主编　范培华　胡显佑

线性代数

第三版

中国人民大学　卢　刚　主编

高 等 教 育 出 版 社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书是教育部“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的研究成果。作为普通高等院校经济学学科门类和管理学学科门类的数学基础课教材之一，在概念的引入和内容的叙述上，全书力求做到自然直观，通俗易懂，易教易学。本书科学、系统地介绍了线性代数中有关矩阵、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量、二次型、线性空间与线性变换等理论和方法，并讨论了相关的应用例子和经济数学模型。除每节都配有基本练习题外，各章后还配置了精选的综合习题。

本书不仅适合普通高等院校经济类和管理类各专业学生使用，由于在习题的配置上还考虑到本科生未来考研的需要，也可以作为考研的复习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/卢刚主编. —3版. —北京：高等教育出版社，2009.3

ISBN 978-7-04-026127-1

Ⅰ.线…　Ⅱ.卢…　Ⅲ.线性代数-高等学校-教材
Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第015276号

策划编辑　马　丽　**责任编辑**　张耀明　**封面设计**　张　楠
责任绘图　杜晓丹　**版式设计**　余　杨　**责任校对**　姜国萍
责任印制　朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	河北新华印刷一厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
		版　　次	2000年7月第1版
开　　本	787×960　1/16		2009年3月第3版
印　　张	18	**印　　次**	2009年3月第1次印刷
字　　数	340 000	**定　　价**	21.50元

物料号　26127-00

第三版修订说明

本书第二版自2004年3月出版至今已将近5年。在这段时间里，为使这本教材更适合教与学两方面的需要（特别是更加适合自学），我们在自己教学实践的同时，又反复并多方征求了同行和学生们的意见与建议，对第二版教材做了较大的修改。主要体现在以下几个方面：

1. 部分章节顺序做了调整。考虑到各章内容的衔接和教学选择的方便，将原教材的第3章线性空间和线性变换移至第5章，相应地将第4章矩阵的特征值和特征向量，第5章二次型改为第3章和第4章。

2. 习题配置的改进。为便于学生掌握每节的基本概念和基本方法，在每节后选配了基本练习题（§2.2除外），同时在各章后还精选了涉及各节内容的综合性习题（第5章除外）。

3. 增加了一些重要命题或定理的证明，使学生更多地了解并学会线性代数中常用的证明思路和证明方法，在这个过程中逐步培养自己分析问题和解决问题的能力。为使学生更好地掌握基本的计算方法，在举例的同时还列出一般的计算步骤（如线性方程组的消元解法和求向量组的极大线性无关组等计算）。

4. 进一步加强对抽象概念的直观说明。线性组合，线性相关，线性无关，极大线性无关组和秩等概念对初学者来说很难理解和掌握，因此第三版中特别在这些概念的引入和有关结论的解释等方面增加了几何直观的例子和图示。

5. 在习题的提示和参考答案部分，除增加和调整了一些习题外，对绝大部分证明题都给出了更加详细的提示（原教材中部分证明题没有提示），其中一些习题还提出多种证明方法，以供读者自学时参考。

本书第三版的第1，2，5章由卢刚修订，第3，4章由胡显佑修订，全书由卢刚定稿。

一本好的教材，不仅凝聚着作者和编辑的心血，更体现出广大读者的关心和爱护。我们由衷地希望今后一如既往继续得到广大读者的关心和帮助，使这本教材真正达到易教易读，越编越好。

卢　刚　胡显佑

2009年2月

第二版前言

这套教材从第一版发行至今，已被多所高等院校选为经济管理类专业的数学基础课程的教材。不少同仁来信表示鼓励，指出教材中值得探讨的问题，并对如何修改提出了宝贵的意见。在此我们对关心和支持这套教材的广大同仁表示衷心的感谢。

2002年12月高等教育出版社启动了“高等教育百门精品课程教材建设计划”，这套教材的建设被纳入计划之中。在该项目的支持下，我们对这套教材的第一版进行了修订。修订工作主要包括以下几个方面的内容：

1. 订正了原教材中的疏漏以及排版印刷方面的错误；
2. 调整了一部分例题和习题，使其与相应的内容之间搭配更加合理；
3. 调整了一些命题的条件或结论，使其阐释得更加精确；
4.《概率论与数理统计》中数理统计部分作了较大的调整和修改，以适合经济管理类专业的需要。

参加这套教材修订工作的主要为原编写人员。此外，需要说明的是，《概率论与数理统计》中数理统计部分由中国人民大学刘刚同志，北京大学陈奇志同志修改。

在修订过程中，我们广泛地搜集了读者对原教材的意见和建议。希望通过此次修订，使这套教材的质量能在第一版的基础上有所提高。欢迎大家继续批评和指正。

编者

2003年9月

第二版修订说明

《线性代数》分册除再次对全书作了勘误外，内容未作大的改动。增加了一些例题，对部分习题进行了调整，并补充了一些习题的提示或解答，以便读者在学习时参考。

各章建议学时（含习题课学时）：

第一章 16 学时；第二章 20 学时；第三章 8 学时；第四章 12 学时；第五章 14 学时。共计 70 学时。

修订中的不妥之处，希望读者多提宝贵意见。

编者

2003 年 9 月

第一版前言

1996年原国家教委开始组织实施“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”，其中子项目经济学门类数学基础课研究和管理学门类数学基础课研究分别由中国人民大学和北京大学承担。考虑到这两个学科门类数学基础课程的共同点，教育部又将这两个子项目整合为“经济管理学类专业数学基础课程设置与教学内容改革研究”，集中力量合作研究，并成立了以魏权龄教授和范培华教授为项目主持人的课题组。三年来，课题组对国内外高等院校同类专业数学基础课程的现状进行了调查研究，编写了教学大纲，组织了多次有关课程体系、课程内容的研讨会。其中，于1997年7月在长春召开的中国数量经济学年会上，全国40余所院校的教师就经济管理类专业的数学基础课、数量经济分析课程的体系，课程设置、内容等进行了深入的讨论；1998年4月，教育部在京召开的经济管理类专业面向21世纪教学内容和课程体系改革研讨会上，初步确定了数学基础课应包括微积分、线性代数和概率统计三门课程，共16学分。其中，微积分8学分，线性代数3学分，概率统计5学分。

在调查研究和充分讨论的基础上，课题组拟定了《经济管理学科数学基础教学大纲》(草案)，并邀请北京地区部分高校就该大纲进行了讨论。

受教育部委托，北京大学光华管理学院和中国人民大学信息学院共同承担了编写经济管理学科数学基础系列教材的任务。整套教材分为《微积分》、《线性代数》和《概率论与数理统计》三个分册，由魏权龄教授任编写组顾问，范培华教授、胡显佑教授任主编。这套教材的《微积分》分册由朱来义教授主编，参加编写的有朱来义、吴岚、范培华和严守权；《线性代数》分册由卢刚副教授主编，参加编写的有卢刚、胡显佑、崔兆鸣；《概率论与数理统计》分册由龙永红副教授主编，参加编写的有龙永红、张诒兰、成世学、王明进。

根据高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革总体目标的要求，我们在编写这套教材时，主要考虑了下述问题：

1. 为适应我国在21世纪社会主义建设和经济发展的需要，培养“厚基础、宽口径、高素质”的人才，基础课，特别是数学基础课不应削弱，而应适当加强。

2. 考虑到目前绝大多数综合性大学、工科院校都设立了经济或管理学科的有关专业，但各校、各专业方向对数学基础的要求有一定的差异。这套教材应照顾到多数院校教学的实际情况，便于教师和学生使用。

3. 作为一门数学基础课的教材，我们首先注意保持数学学科本身的科学性、系统性，但在引入一些概念时尽可能采用学生易于接受的方式叙述，对个别冗长，繁琐的推理则略去，而更突出有关理论、方法的应用和经济数学模型的介绍。

4. 作为经济管理学科各专业的数学基础教材，我们注意了专业后继课程的需要，并考虑学生继续深造的需要，教材的各章均配备了A，B两组习题。一般，达到A组习题的水平，就已经符合本课程的基本要求。B组习题是为数学基础要求较高的专业或学生准备的。各章中打有“*”号的内容是为对数学基础要求较高的院校或专业编写的，可以作为选学内容或学生自学用。

1999年12月，由教育部高教司聘请了有关专家对教材的初稿进行了审定，参加审稿会的有：北京航空航天大学李心灿教授、清华大学胡金德教授、南开大学周概容教授、（以下以姓氏笔画为序）湖南财经学院苏醒教授、北方交通大学季文铎教授、中央财政金融大学单立波教授、华侨大学龚德恩教授、中南财经大学彭勇行教授。他们对教材初稿提出了许多中肯的建议和具体的修改意见，这对于完善教材是非常有益的，在此向参加审定会的各位教授表示诚挚的谢意。

在各次研讨会上，全国各高校的许多同行都对这一项目和教材提出了极有价值的建议，在此向有关院校的老师们表示衷心感谢。在教材编写过程中，我们得到了教育部高教司的大力支持，得到高等教育出版社有关部门的协助，在此一并致谢。

范培华、胡显佑

2000年3月

郑重声明

目　录

第 1 章

矩　　阵

矩阵是线性代数的一个重要的基本概念和数学工具，广泛应用于自然科学的各个分支及经济分析、经济管理等许多领域．在这一章里，我们将介绍矩阵的运算，方阵的行列式，可逆矩阵，矩阵的初等变换等关于矩阵的基本理论．这些内容是学习后面各章的基础

§1.1　矩阵的概念

一、引例

例 1　假设我们记录 4 名学生甲、乙、丙、丁的 3 门课程（数学、语文、英语）的期末考试成绩．若按满分 100 分评定，期末考试成绩由表 1.1 所示．

表 1.1　期末考试成绩表

课程 / 成绩 / 学生	数学	语文	英语
甲	90	86	95
乙	78	80	70
丙	92	93	96
丁	66	74	75

更简单地，可将这个表记为下面的形式

$$\begin{pmatrix} 90 & 86 & 95 \\ 78 & 80 & 70 \\ 92 & 93 & 96 \\ 66 & 74 & 75 \end{pmatrix}$$

这样的一个矩形数表就称为一个 4 行 3 列或 4×3 的矩阵．

例 2　设某石油公司有三个炼油厂以原油作为主要原料，利用一吨原油生产的燃料油、柴油和汽油数量如表 1.2 所示（单位：t）：

表 1.2

	第一炼油厂	第二炼油厂	第三炼油厂
燃料油	0.762	0.476	0.286
柴　油	0.190	0.476	0.381
汽　油	0.286	0.381	0.571

这些数据按原来的排列顺序可以组成一个 3×3 的数表，并称之为 3 阶矩阵：

$$\begin{pmatrix} 0.762 & 0.476 & 0.286 \\ 0.190 & 0.476 & 0.381 \\ 0.286 & 0.381 & 0.571 \end{pmatrix}$$

其中第一行表示各炼油厂利用一吨原油生产的燃料油数量．其中的不同数值则反映出各炼油厂在工艺和技术上的不同．第二、三行也有类似含义．矩阵的各列反映出各炼油厂生产的各类油品的构成情况．

二、矩阵的概念

由于线性代数中的许多问题，在不同的数集范围内讨论，可能得到不同的结论．为此，需要先引入数域的概念．

定义 1.1 设 F 是由一些数组成的集合，其中包含 0 和 1．如果 F 中的任意两个数（这两个数也可以相同）的和、差、积、商（除数不为零）仍然是 F 中的数，则称 F 为一个**数域**．

根据上面的定义，全体整数组成的集合不是一个数域，因为任意两个整数的商（除数不为零）不一定是整数．而由全体有理数组成的集合 $\mathbf{Q}$、全体实数组成的集合 $\mathbf{R}$ 和全体复数组成的集合 $\mathbf{C}$ 都是数域，分别称为**有理数域**、**实数域**和**复数域**．在本书中主要涉及的数域是实数域 $\mathbf{R}$，故若无特别说明，各章中所涉及的数均为实数．若是指任意数域，则用 F 表示．

下面给出矩阵的定义．

定义 1.2 由 $m\times n$ 个数排成的一个 m 行、n 列的数表，称为一个 $m\times n$ **矩阵**，其中的每一个数称为这个矩阵的**元**，位于第 i 行与第 j 列交叉点上的元称为矩阵的 $(i,\ j)$ 元 $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$．

如例 1 中矩阵的 (1，2) 元为 86，而 (2，1) 元为 78．

通常用大写的英文字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 等表示矩阵，一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，它的 $(i,\ j)$ 元记作 $\boldsymbol{A}(i;\ j)$．如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $(i,\ j)$ 元是 a_{ij}，即 $\boldsymbol{A}(i;\ j)=a_{ij}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，则可将 $\boldsymbol{A}$ 表为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

可简记作 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$.

当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数 m 与列数 n 相等时，称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵或 n 阶矩阵. 显然，一阶矩阵就是一个数.

元全为零的 $m\times n$ 矩阵称为零矩阵，记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$，或在明确行、列数的情况下，记作 $\boldsymbol{O}$.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的元 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 都是数域 F 中的数，则称 $\boldsymbol{A}$ 是数域 F 上的一个 $m\times n$ 矩阵.

本章涉及的矩阵在无特别说明的情况下，均指实数域 $\mathbf{R}$ 上的矩阵.

三、几种特殊的方阵

1. 对角矩阵

形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的 n 阶矩阵，称为**对角矩阵**，其中 a_{11}，a_{22}，…，a_{nn} 位于矩阵的主对角线上（即从左上角到右下角），称为主对角线上的元，而主对角线以外的元全为零. 上述对角矩阵也可以记作

$$\mathrm{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$$

例如

$$\mathrm{diag}(1,-2,3)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. 数量矩阵

当对角矩阵的主对角线上的元都相同时，$\mathrm{diag}(a, a, \cdots, a)$ 称为**数量矩阵**. 特别是当 $a=1$ 时，称 n 阶数量矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

为 n 阶**单位矩阵**，记作 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$.

3. 上三角形矩阵与下三角形矩阵

形如

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

的矩阵，即主对角线左下方的元全为零的 n 阶矩阵，称为**上三角形矩阵**. 类似地，主对角线右上方的元全为零的 n 阶矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为**下三角形矩阵**. 因此，对角矩阵既可以看成是上三角形矩阵，也可以看成是下三角形矩阵.

4. 对称矩阵与反称矩阵

如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的元满足 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶**对称矩阵**. 例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

就是一个 3 阶对称矩阵.

如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的元满足 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶**反称矩阵**. 据此，反称矩阵的主对角线上的元 a_{ii} 也应满足 $a_{ii}=-a_{ii}, i=1,2,\cdots,n$，故 $a_{ii}=0(i=1,2,\cdots,n)$. 例如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

就是一个 3 阶反称矩阵.

练习 1.1

1. 令 $\mathbf{Q}(\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{3}\mid a, b\in\mathbf{Q}\}$，其中 $\mathbf{Q}$ 为有理数域. 证明：$\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ 为一个数域.
2. 最大的数域是哪一个？（即：哪一个数域包含了所有的数域？）

§1.2 矩阵的运算

这一节介绍矩阵的运算及其满足的运算法则. 所讨论的矩阵均为数域 F 上的矩阵.

定义 1.3　设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times r}$，如果满足 $m=s$，$n=r$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为**同型矩阵**. 进一步，若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的元满足 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例 1　设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&-3\\0&4&-2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&x&-3\\y&z&-2\end{pmatrix}$$

已知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，则 $x=1$，$y=0$，$z=4$.

一、矩阵的加法

先看一个例子.

例 2　在上节例 1 中设期末考试成绩矩阵为 $\boldsymbol{A}$，如果又已知该 4 名学生期中考试成绩矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}94&90&97\\83&85&76\\98&95&97\\60&70&72\end{pmatrix}$$

则每个学生各门课程期中与期末考试的成绩之和可表为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}90&86&95\\78&80&70\\92&93&96\\66&74&75\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}94&90&97\\83&85&76\\98&95&97\\60&70&72\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}184&176&192\\161&165&146\\190&188&193\\126&144&147\end{pmatrix}$$

定义 1.4　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$,令

$$\boldsymbol{C}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

则称矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**和**，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

由此可见，两个矩阵的加法就是将它们的对应的元相加. 显然，只有同型的两个矩阵才能相加.

由定义 1.4 可以直接验证，矩阵的加法满足以下四条运算法则

(1) 交换律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

(2) 结合律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；

(4) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,称矩阵

$$\begin{pmatrix}-a_{11}&-a_{12}&\cdots&-a_{1n}\\-a_{21}&-a_{22}&\cdots&-a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\-a_{m1}&-a_{m2}&\cdots&-a_{mn}\end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**，记作 $-\boldsymbol{A}$. 显然有

$$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=(-\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$$

由此可定义矩阵的减法

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\overset{\text{def}}{=\!=}{}^{①}\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$$

上述各式中 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 均为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{O}$ 为 $m\times n$ 零矩阵.

例 3 设 $\boldsymbol{A}=(1,-2,3)$②，$\boldsymbol{B}=(1,1,-1)$，则

$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=(1,-2,3)+(-1,-1,1)=(0,-3,4)$

二、数与矩阵的乘法

定义 1.5 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 为数域 F 上的矩阵，k 是数域 F 中的数. 用数 k 乘以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每个元所得到的矩阵

$$\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

称为**数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积**（或数 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**数乘**），记作 $k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$.

由定义 1.5 可以直接验证数与矩阵的乘法满足以下运算法则

(1) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$；

(2) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；

(3) $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$.

其中 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为数域 F 上的 $m\times n$ 矩阵；k，$l\in F$.

由定义 1.5 可知，$\boldsymbol{A}$ 的负矩阵 $-\boldsymbol{A}$ 也可以看作是用 -1 乘以 $\boldsymbol{A}$，即 $-\boldsymbol{A}=(-1)\boldsymbol{A}$. 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有的元都有公因子 k 时，可将 k 提到矩阵外面. 例如

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

数量矩阵 $\mathrm{diag}(a, a, \cdots, a)=a\boldsymbol{E}$.

例 4 在上节例 1 与本节例 2 已知数据的基础上，又设该 4 名学生的各门课程平时成绩矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 90 & 80 & 90 \\ 80 & 80 & 70 \\ 90 & 90 & 100 \\ 70 & 80 & 80 \end{pmatrix}$$

---

① 符号“$\overset{\text{def}}{=\!=}$”表示“定义为”. 以后不再重复说明.

② 对于 $1\times n$ 矩阵，一般用逗号将各个元隔开，以避免混淆.