航海类专业数学

习题全解

任　英　主编

大连海事大学出版社

航海类专业数学习题全解

任　英　主编

大连海事大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

航海类专业数学习题全解 / 任英主编 . —大连：大连海事大学出版社，2009. 10
ISBN 978-7-5632-2373-2

Ⅰ. ①航… Ⅱ. ①任… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—解题 Ⅳ. ①O13 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 186983 号

大连海事大学出版社出版

地址:大连市凌海路 1 号 邮编:116026 电话:0411-84728394 传真:0411-84727996
http://www.dmupress.com E-mail:cbs@dmupress.com
大连印刷三厂印装 大连海事大学出版社发行
2009 年 10 月第 1 版 2009 年 10 月第 1 次印刷
幅面尺寸:185 mm×260 mm 印张:10.75
字数:265 千 印数:1~1200 册
责任编辑:史洪源 版式设计:海 韵
封面设计:王 艳 责任校对:高 炯
ISBN 978-7-5632-2373-2 定价:21.00 元

前　言

本书是与《航海类专业数学》(任英主编，大连海事大学出版社 2008 年出版)相配套的学习辅导书，旨在帮助读者掌握高等数学的基本内容和解题方法，帮助读者提高学习效率。

本书按《航海类专业数学》的章节顺序逐章编写，每章包括以下几部分内容：

一、考核知识点——主要根据教学大纲确定。

二、考核要求——主要根据教学大纲确定。

三、内容提要——归纳本章的主要内容。

四、习题全解——对教材中的全部习题作出解答。

五、单元自测题。

六、参考答案与提示。

本书由任英主编，参加本书编写的有王昕(第一章)、张会生(第二章)、任英(第三章)、李静(第四章)、杨艳冰(第五章)、桑琳(第六章)、田晓娟(第七章)，由任英担任全书的统稿工作并审阅了全书。

感谢大连海事大学出版社，他们为本书的出版和质量的提高起到了十分重要的作用，虽然编者在教材编写工作中非常认真、努力，但由于时间仓促，教材中难免有不妥和疏漏之处，恳请专家及广大师生和读者批评指导，以期不断完善。

任　英

2009 年 8 月

目 录

第一章　函数、极限与连续性

一、考核知识点

(一)基本初等函数的性质

(二)极限的运算，两个重要极限公式

(三)无穷小的比较

(四)函数的连续性概念及间断点分类

(五)连续函数运算和初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质

二、考核要求

1. 了解：(1)函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

(2)数列极限与函数极限(包括左、右极限)的概念.

(3)无穷小、无穷大的概念和基本性质，无穷小与无穷大的关系，高阶无穷小、同阶无穷小和等价无穷小的概念.

2. 理解：(1)函数的概念，理解初等函数的概念.会建立简单应用问题的函数关系式.

(2)理解分段函数、反函数、复合函数的概念.

(3)理解函数连续性的概念(含左连续与右连续).

(4)会判别函数的连续性、间断点及其类型.

3. 掌握：(1)函数的表示法，基本初等函数的性质及其图形.

(2)极限的运算法则.

(3)无穷小阶的比较方法.

(4)用两个重要极限求极限.

(5)初等函数的连续性.

三、内容提要

1. 极限四则运算法则

若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，那么

法则 1　$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\pm B$；

法则 2　$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\cdot B$；

法则 3 当 $B \neq 0$ 时，$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

重要结论：(1) 如果 $Q_n(x_0) \neq 0$，则有

$$\lim_{x \to x_0} R(x) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} P_m(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} Q_n(x)} = \frac{P_m(x_0)}{Q_n(x_0)} = R(x_0);$$

(2) $$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0, & \text{当 } n < m; \\ \dfrac{a_n}{b_m}, & \text{当 } n = m; \\ \infty, & \text{当 } n > m. \end{cases}$$

2. 复合运算法则

若 $\lim\limits_{x \to x_0} u = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$，且 $x \neq x_0$ 时，$g(x) \neq a$，$\lim\limits_{u \to a} f(u) = A$，则

$$\lim_{x \to x_0} f[g(x)] = \lim_{u \to a} f(u) = A.$$

3. 极限存在准则

准则(Ⅰ)(1) 设在点 x_0 的某去心领域 $U^0(x_0, \delta)$ 内都有

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$，

则

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

准则(Ⅱ) 单调有界数列必有极限，即单调增加有上界数列必有极限；单调减少有下界数列必有极限.

4. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

(2) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$，$\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$.

5. 等价无穷小

当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x$，$\tan x \sim x$，$\ln(1 + x) \sim x$，$(1 + x)^a - 1 \sim ax$，$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$.

6. 无穷小等价代换

若 $x \to x_0$ 时，$\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha \cdot f(x)}{\beta \cdot g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha' \cdot f(x)}{\beta' \cdot g(x)}$.

7. 函数连续定义

(1) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续.

(2) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续的充分必要条件是：

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$（主要用于分段函数在分段点处的连续性.）

8. 连续函数的运算与初等函数的连续性

(1) 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 处连续，则

(Ⅰ) $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x)$ 在 x_0 处连续；

(Ⅱ) 当 $g(x_0) \neq 0$ 时，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 x_0 处连续.

(2) 反函数的连续性

若函数 $y = f(x)$ 在某区间上严格单调且连续，则其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 在相应的区间上也严格单调且连续.

(3) 复合函数的连续性

若函数 $u = \varphi(x)$ 在 x_0 处连续，$u_0 = \varphi(x_0)$，函数 $y = f(u)$ 在 u_0 处连续，则复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 在 x_0 处连续.

9. 间断点及其分类

若函数 $f(x)$ 至少有下列三种情形之一，则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点：

(1) $f(x)$ 在点 x_0 无定义；

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在；

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

(Ⅰ) 第一类间断点：如果 x_0 是 $f(x)$ 的间断点，但左极限 $f(x_0^-)$、右极限 $f(x_0^+)$ 都存在，则称 x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点，当 $f(x_0^-) = f(x_0^+)$ 时，称 x_0 是 $f(x)$ 的第一类可去间断点；当 $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$ 时，称 x_0 是 $f(x)$ 的第一类不可去间断点，或第一类跳跃间断点.

(Ⅱ) 第二类间断点：如果 x_0 是 $f(x)$ 的间断点，但左极限 $f(x_0^-)$、右极限 $f(x_0^+)$ 至少一个不存在，则称 x_0 是 $f(x)$ 的第二类间断点(即不是第一类的间断点都是第二类间断点).

10. 闭区间上连续函数的性质

有界性定理、最值性定理、零点定理、介值定理.

四、习题全解

习题 1.1

1. 求下列各函数的定义域：

(1) $y = \sqrt{3x+2}$；　(2) $y = \dfrac{1}{1-x}$；　(3) $y = \dfrac{1}{x} + \sqrt{1-x^2}$；

(4) $y = \dfrac{2x}{x^2+3x+2}$；　(5) $y = \arcsin(x-3)$；　(6) $y = \sqrt{3-x} - \arctan\dfrac{1}{x}$；

(7) $y = \ln(2x+1)$；　(8) $y = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

解　(1) $3x+2 \geqslant 0$，故有 $x \geqslant -\dfrac{2}{3}$，定义域为 $\left[-\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$.

(2) $1 - x \neq 0$，故有 $x \neq 1$，定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

(3) $x \neq 0$ 且 $1 - x^2 \geqslant 0$，即 $x \neq 0$ 且 $|x| \leqslant 1$，定义域为 $[-1, 0) \cup (0, 1]$.

(4) $x^2 + 3x + 2 \neq 0$，即 $x \neq -2$ 且 $x \neq -1$，定义域为 $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, +\infty)$.

(5) $-1 \leqslant x-3 \leqslant 1$，故有 $2 \leqslant x \leqslant 4$，定义域为 $[2,4]$.

(6) $3-x \geqslant 0$ 且 $x \neq 0$，即 $x \leqslant 3$ 且 $x \neq 0$，定义域为 $(-\infty,0) \cup (0,3]$.

(7) $2x+1 \geqslant 0$，即 $x \geqslant -\frac{1}{2}$，定义域为 $(-\frac{1}{2},+\infty)$.

(8) $x \neq 0$，定义域为 $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$.

2. 判定下列各对函数是否相同：

(1) $y = x$ 与 $y = \frac{x^2}{x}$；　(2) $g = x$ 与 $y = \sqrt{x^2}$；

(3) $y = 1$ 与 $y = \sin^2 x + \cos^2 x$；　(4) $y = \frac{1}{x-1}$ 与 $y = \frac{x+1}{x^2-1}$.

解　(1) 不相同. 因为 $y = x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，而 $y = \frac{x^2}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$.

(2) 不相同. 因为后者为 $y = \begin{cases} x, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$，与前者的对应法则不同.

(3) 相同. 因为后者与前者有相同的对应法则 $y = 1$ 与相同的定义域.

(4) 不相同. 因为 $y = \frac{1}{x-1}$ 的定义域为 $(-\infty,1) \cup (1,+\infty)$，而 $y = \frac{x+1}{x^2-1}$ 的定义域为 $(-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$.

3. 由甲地至乙地行李托运费规定如下：不超过 50 kg 时，每公斤收费 0.45 元，超过 50 kg 时，超重部分每公斤收费 0.75 元，写出行李重量 x 与费用 y 之间的函数关系.

解　x 与 y 之间的关系是，当 $x \leqslant 50$ 时，$y = 0.45x$.

当 $x > 50$ 时，$y = 0.75(x-50) + 50 \times 0.45 = 0.75x - 15$

即 $y = \begin{cases} 0.45x, & x \leqslant 50 \\ 0.75x - 15, & y > 50. \end{cases}$

4. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些既非偶函数又非奇函数？

(1) $f(x) = x^2(1-x^2)$；　(2) $f(x) = \sin x - \cos x + 1$；

(3) $f(x) = \frac{\sin^4 x \cos x}{1+x^2}$；　(4) $f(x) = \sqrt{1-x+x^2} - \sqrt{1+x+x^2}$；

(5) $f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$；　(6) $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$.

解　(1) $f(-x) = (-x)^2[1-(-x)^2] = x^2(1-x^2) = f(x)$，故 $f(x)$ 为偶函数.

(2) $f(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) + 1 = -\sin x - \cos x + 1 \neq f(x)$ 且 $\neq -f(x)$，故 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

(3) $f(-x) = \frac{\sin^4(-x)\cos(-x)}{1+(-x)^2} = \frac{\sin^4 x \cos x}{1+x^2} = f(x)$，故 $f(x)$ 是偶函数.

(4)
$$\begin{aligned} f(-x) &= \sqrt{1-(-x)+(-x)^2} - \sqrt{1+(-x)+(-x)^2} \\ &= \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2} \\ &= -(\sqrt{1-x+x^2} - \sqrt{1+x+x^2}) \\ &= -f(x), \end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

(5) $f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})$

而 $-f(x)=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=\ln\dfrac{x-\sqrt{1+x^2}}{x^2-(1+x^2)}=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})$
$=f(-x)$,

所以 $f(x)$ 是奇函数.

(6) $f(x)=\dfrac{a^{-x}+a^x}{2}=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x)$.

故 $f(x)$ 是偶函数.

5. 下列函数中哪些是周期函数，对于周期函数，指出其周期：

(1) $y=\cos(x-2)$;　　(2) $y=\cos4x$;　　(3) $y=1+\sin\pi x$;

(4) $y=x\sin x$;　　(5) $y=\sin^2 x$;　　(6) $y=\sin3x+\tan x$.

解　(1) 周期函数的定义为：存在一个正数 l，使得对于任一属于定义域 D 内的 x，有 $x\pm l\in D$，且 $f(x\pm l)=f(x)$ 恒成立.

对于 $l=2\pi$，$\cos[(x+2\pi)-2]=\cos(x-2)$

故 $y=\cos(x-2)$ 是周期函数，周期 $l=2\pi$.

(2) 因为对于 $y=\cos x$，周期为 2π，故 $y=\cos(4x+2\pi)=\cos4x$，

所以 $\cos4(x+\dfrac{\pi}{2})=\cos4x$，得知 $l=\dfrac{\pi}{2}$，故 $y=\cos4x$ 是周期函数，周期 $l=\pi/2$.

(3) 对于 $y=\sin x$，周期为 2π，

故 $y=1+\sin\pi x=1+\sin(\pi x+2\pi)=1+\sin\pi(x+2)$ 所以，周期 $l=2$.

于是 $y=1+\sin\pi x$ 是周期函数且周期 $l=2$.

(4) 因为找不到一个 l，使得 $f(x\pm l)=f(x)$ 恒成立，所以 $y=x\sin x$ 不是周期函数.

(5) 因为 $y=\sin^2x=\dfrac{1}{2}(1-\cos2x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos(2x+2\pi)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos2(x+\pi)$，

所以，$y=\sin^2x$ 是周期函数且周期 $l=\pi$.

(6) 若 $f(x)$、$g(x)$ 分别是以 T_1、$T_2(T_1\neq T_2)$ 为周期的函数，则 $f(x)\pm g(x)$ 是以 T_1 和 T_2 的最小公倍数为周期的函数.

$y_1=\sin3x$ 的周期为 $T_1=\dfrac{2}{3}\pi$.

因为 $y=\sin3x=\sin(3x+2\pi)=\sin3(x+\dfrac{2}{3}\pi)$.

$y_2=\tan x$ 的周期为 $T_2=\pi$.

因为 T_1 与 T_2 的最小公倍数为 2π，所以原函数是周期函数，周期 $T=2\pi$.

6. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$;　　(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$;

(3) $y=2\sin3x$;　　(4) $y=e^{x+1}-2$.

解　(1) $y=\sqrt[3]{x+1}\Rightarrow x=y^3-1$，故反函数为 $y=x^3-1$.

(2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}\Rightarrow x=\dfrac{1-y}{1+y}$，故反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

(3) $y=2\sin 3x \Rightarrow x=\frac{1}{3}\arcsin\frac{y}{2}$,故反函数为 $y=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}$.

(4) $y=e^{x+1}-2 \Rightarrow x=\ln(y+2)-1$,故反函数为 $y=\ln(x+2)-1$.

7. 下列各题中,求由所给函数构成的复合函数,并求出这些函数分别对应于给定自变量 x_1,x_2 的函数值:

(1) $y=u^2,u=\sin x,x_1=\frac{\pi}{6},x_2=\frac{\pi}{3}$;　　(2) $y=\sin u,u=2x,x_1=\frac{\pi}{8},x_2=\frac{\pi}{4}$;

(3) $y=\sqrt{u},u=1+x^2,x_1=1,x_2=2$;　　(4) $y=u^2,u=e^x,x_1=0,x_2=-1$.

解　(1) $y=\sin^2 x,y_1=\sin^2(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{4},y_2=\sin^2(\frac{\pi}{3})=\frac{3}{4}$.

(2) $y=\sin 2x,y_1=\sin(2\times\frac{\pi}{8})=\frac{\sqrt{2}}{2},y_2=\sin(2\times\frac{\pi}{4})=1$.

(3) $y=\sqrt{1+x^2},y_1=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},y_2=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$.

(4) $y=(e^x)^2=e^{2x},y_1=e^0=1,y_2=e^{-2}$.

8. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的?

(1) $y=\sqrt[3]{(x+1)^2+1}$;　　(2) $y=3^{(\ln x+1)^2}$;

(3) $y=\sin^2(3x+1)$;　　(4) $y=\sqrt[3]{\log_a\cos^2 x}$.

解　(1) $y=\sqrt[3]{u},u=(x+1)^2+1$.

(2) $y=3^u,u=(\ln x+1)^2$.

(3) $y=u^2,u=\sin(3x+1)$.

(4) $y=\sqrt[3]{u},u=\log_a v,v=\cos^2 x$.

9. 对下列每组函数求 $f+g$ 和 $f\cdot g$,并写出它们的定义域:

(1) $f(x)=x+1,g(x)=x^2+2x-1$;　　(2) $f(x)=\frac{1}{x-1},g(x)=\frac{1}{2x+1}$;

(3) $f(x)=\sqrt{x+1},g(x)=\sqrt{4-x}$;　　(4) $f(x)=\sqrt{x^2+1},g(x)=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$.

解　(1) $f(x)+g(x)=x+1+x^2+2x-1=x^2+3x$,

$$f(x)\cdot g(x)=(x+1)(x^2+2x-1)=x^3+3x^2+x-1,$$

定义域都是$(-\infty,+\infty)$.

(2) $f(x)+g(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2x+1}=\frac{3x}{(x-1)(2x+1)}$,

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{1}{x-1}\cdot\frac{1}{2x+1}=\frac{1}{(x-1)(2x+1)},$$

定义域都是$(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(-\frac{1}{2},1)\cup(1,+\infty)$.

(3) $f(x)+g(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{4-x}$,

$$f(x)\cdot g(x)=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{4-x}=\sqrt{4+3x-x^2},$$

定义域都是$(-1,4)$.

(4) $f(x)+g(x)=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$,

$$f(x)\cdot g(x)=\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}=\sqrt{\frac{x^2+1}{9-x^2}},$$

定义域都是$(-3,3)$.

10. 证明：

(1) 两个奇函数的和是奇函数，两个偶函数的和是偶函数.

(2) 两个偶函数（或两个奇函数）的乘积是偶函数，一个奇函数与一个偶函数的乘积是奇函数.

(3) 两个奇函数的复合是奇函数，两个偶函数或一个奇函数与一个偶函数的复合是偶函数.

证　(1) 设 $f_1(x),f_2(x)$ 为奇函数，而 $g_1(x),g_2(x)$ 为偶函数，则对 $f_1(x)+f_2(x)$ 来说，$f_1(-x)+f_2(-x)=-f_1(x)-f_2(x)=-[f_1(x)+f_2(x)]$
所以两个奇函数的和是奇函数. 而对 $g_1(x)+g_2(x)$ 来说，$g_1(-x)+g_2(-x)=g_1(x)+g_2(x)$ 所以两个偶函数的和是偶函数.

(2)$g_1(-x)\cdot g_2(-x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$ 所以两个偶函数的乘积是偶函数. 而 $f_1(-x)\cdot f_2(-x)=[-f_1(x)]\cdot[-f_2(x)]=f_1(x)\cdot f_2(x)$ 所以两个奇函数的乘积是偶函数.
又 $g_1(-x)\cdot f_1(-x)=g_1(x)\cdot[-f_1(x)]=-g_1(x)\cdot f_1(x)$ 所以一个奇函数与一个偶函数的乘积是奇函数.

(3) 设 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 为两个奇函数，一个复合函数为 $f_1[f_2(x)]$，
则 $f_1[f_2(-x)]=f_1[-f_2(x)]=-f_1[f_2(x)]$ 故复合函数为奇函数.
设 $g_1(x)$ 与 $g_2(x)$ 为两个偶函数，则复合函数 $g_1[g_2(x)]$，
且 $g_1[g_2(-x)]=g_1[g_2(x)]$ 所以两个偶函数的复合为偶函数.
而 $f_1[g_1(x)]$ 是一个奇函数与一个偶函数的复合，且 $f_1[g_1(-x)]=f_1[g_1(x)]$，也为偶函数.

11. 对下列函数计算 $f(a+h)-f(a)$，并化简：

(1)$f(x)=3x+2$；　(2)$f(x)=x^2$；

(3)$f(x)=\dfrac{1}{x}$；　(4)$f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

解　(1)$f(a+h)-f(a)=3(a+h)+2-3a-2=3h$.

(2)$f(a+h)-f(a)=(a+h)^2-a^2=2ah+h^2$.

(3)$f(a+h)-f(a)=\dfrac{1}{a+h}-\dfrac{1}{a}=-\dfrac{h}{a(a+h)}$.

(4)$f(a+h)-f(a)=\dfrac{1}{a+h+1}-\dfrac{1}{a+1}=-\dfrac{h}{(a+1)(a+h+1)}$.

12. 求下列函数的定义域与值域，并画出函数图形：

(1)$y=\sqrt{4-x^2}$；　(2)$y=|x|+x$；　(3)$f(x)=\begin{cases}2x+3, & x<-1\\ 3-x, & x\geqslant -1\end{cases}$.

解　(1)$D=[-2,2]$（因为 $4-x^2\geqslant 0\Rightarrow -2\leqslant x\leqslant 2$）
$R(f)=[0,2]$，函数图形如图 1-1 所示.
(2)$D=(-\infty,+\infty)$，

而 $y=\begin{cases}2x, x\geqslant 0\\ 0, x<0\end{cases}$.

$R(f)=[0,+\infty)$，函数图形如图 1-2 所示.

(3) $D=(-\infty,+\infty)$

$R(f)=(-\infty,4]$，函数图形如图 1-3 所示.

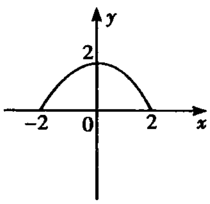

图 1-1

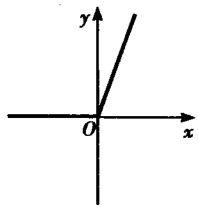

图 1-2

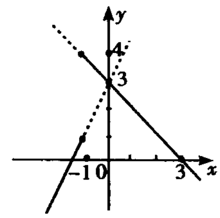

图 1-3

习题 1.2

1. 观察下列数列的一般项的变化趋势，写出它们的极限：

(1) $\left\{\dfrac{1}{2^{n-1}}\right\}$；　(2) $\left\{\dfrac{n+2}{n+1}\right\}$；　(3) $\left\{(-1)^n\dfrac{1}{2n}\right\}$；　(4) $\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right\}$.

解　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}=0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n+1}=1$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2n}=0$.

(4) 当 $n\to\infty$ 时，一般项没有极限.

2. 根据数列极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$.

证　(1) $\forall\varepsilon>0$，欲使 $\left|\dfrac{1}{n^2}-0\right|=\dfrac{1}{n^2}<\varepsilon$，只需 $n^2>\dfrac{1}{\varepsilon}$，即 $n>\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

于是 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$. 只要 $n>N$，就有 $\left|\dfrac{1}{n^2}-0\right|<\varepsilon$，

所以　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=0$.

(2) $\forall\varepsilon>0$，由 $\left|\dfrac{3n+2}{2n+1}-\dfrac{3}{2}\right|=\left|\dfrac{6n+2-6n-3}{2(2n+1)}\right|=\left|\dfrac{-1}{2(2n+1)}\right|$

$$=\frac{1}{2(2n+1)}<\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

故只需 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$. 当 $n>N$ 时，就有

$$\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon,$$

所以　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$.

3. 设数列$\{x_n\}$有界，又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

证　因数列$\{x_n\}$有界，故$\exists M>0$，对一切n均有$|x_n|\leqslant M$. $\forall\varepsilon>0$因为$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，所以$\exists N$，当$n>N$时，总有$|y_n-0|=|y_n|<\dfrac{\varepsilon}{M}$，从而

$|x_ny_n-0|=|x_n|\cdot|y_n|<M\cdot\dfrac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$，故　$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

习题 1.3

1. 根据函数极限的定义证明$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

证　$\forall\varepsilon>0$，要使$\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|=\dfrac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$，只需$x>\dfrac{1}{\varepsilon^2}$，取$X=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$，当$x>X$时，有$\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$. 所以　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

2. 根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to2}(5x+2)=12$；　(2) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

证　(1) $\forall\varepsilon>0$，要使$|(5x+2)-12|=5|x-2|<\varepsilon$，只需$|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{5}$，取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$，当$0<|x-2|<\delta$时，都有$|(5x+2)-12|<\varepsilon$，所以　$\lim\limits_{x\to2}(5x+2)=12$.

(2) $\forall\varepsilon>0$，要使$\left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|=|2x+1|=2\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$，只需$\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$，则当$0<\left|x-(-\dfrac{1}{2})\right|<\delta$时，都有$\left|\dfrac{1-4x^2}{2x+1}-2\right|<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\dfrac{1-4x^2}{2x+1}=2$.

3. 选择题：

(1) 函数$f(x)$在$x=x_0$处有定义是$x\to x_0$时$f(x)$有极限的(　　).

(A) 必要条件　(B) 充分条件　(C) 充要条件　(D) 无关条件

(2) $f(x_0+0)$与$f(x_0-0)$都存在是函数$f(x)$在$x=x_0$处有极限的(　　).

(A) 必要条件　(B) 充分条件　(C) 充要条件　(D) 无关条件

解　(1) 答案(D). 因为$f(x)$当$x\to x_0$时有极限A的定义为：$f(x)$在x_0的某一去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$内有定义，若$\exists$常数A，$\forall\varepsilon>0$，总$\exists\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$，则A称为$f(x)$当$x\to x_0$时的极限.

所以极限的定义并未要求$f(x)$在$x=x_0$处有定义，并且仅仅有定义，也不足以保证$f(x)$当$x\to x_0$时有极限，故选(D).

(2) 答案(A). 由定理2知，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$，故$f(x_0+0)$与$f(x_0-0)$都存在且相等才是$f(x)$在$x=x_0$处有极限的充要条件，没有二者相等仅仅是必

要条件.

4. 求下列函数当 $x \to 0$ 时的左、右极限，并说明它们在 $x \to 0$ 时的极限是否存在：

(1) $f(x) = \begin{cases} x-1, x<0 \\ 0, \quad x=0; \\ x+1, x>0 \end{cases}$ (2) $f(x) = \begin{cases} 1-x, x<0 \\ 0, \quad x=0. \\ 1+x, x>0 \end{cases}$

解 (1) $f(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-}(x-1) = -1$；$f(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x+1) = 1$，因为左极限与右极限存在但不相等，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

(2) $f(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-}(1-x) = 1$；$f(0^+) \lim\limits_{x\to 0^+}(1+x) = 1$ 因为 $f(0^-) = f(0^+)$，所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

5. 下列极限是否存在，为什么？

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x^2+|x|}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x$； (3) $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x$.

解 (1) $f(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{x^2-x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x-1} = -1$；$f(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x+1} = 1$；因为 $f(0^-) \neq f(0^+)$，所以极限不存在.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$；$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$；

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x \neq \lim\limits_{x\to-\infty} e^x$，所以此函数极限不存在.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$，二者不相等，故此极限不存在.

习题 1.4

1. 在下列各题中，指出哪些是无穷小，哪些是无穷大？

(1) $f(x) = \dfrac{1+x}{x^2}$，当 $x \to -1$ 时； (2) $f(x) = x\sin x$，当 $x \to 0$ 时；

(3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$，当 $x \to 0$ 时； (4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$，当 $x \to \infty$ 时；

(5) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x+3}$，当 $x \to 3$ 时； (6) $\dfrac{1}{n+1}$，当 $n \to \infty$ 时.

解 (1) $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \lim\limits_{x\to-1} \dfrac{1+x}{x^2} = 0$，由无穷小的定义知 $f(x)$ 是当 $x \to -1$ 时的无穷小.

(2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} x\sin x = 0$，由无穷小的定义知 $f(x)$ 是当 $x \to 0$ 时的无穷小.

(3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$，由无穷大的定义知 $f(x)$ 是 $x \to 0$ 时的无穷大.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$，由无穷小的定义知 $f(x)$ 是当 $x \to \infty$ 时的无穷小.

(5) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x+3} = \lim\limits_{x\to 3}(x-3) = 0$，由无穷小的定义知 $f(x)$ 是当 $x \to 3$ 时的无穷小.

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$，由无穷小的定义知 $\dfrac{1}{n+1}$ 是当 $n \to \infty$ 时的无穷小.

2. 函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$，当 $x\to 0$ 时极限存在吗？何时是无穷大？何时是无穷小？

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=+\infty$；而 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$，所以当 $x\to 0$ 时极限不存在，且当 $x\to 0^-$ 时为无穷小，当 $x\to 0^+$ 时为无穷大.

3. 选择题：

(1) 当 $x\to 1$ 时，下列变量中不是无穷小的是(　　).

(A)x^2-1　　(B)$x(x-2)+1$　　(C)$3x^2-2x+1$　　(D)$4x^2-2x+1$

(2) 下列变量在自变量给定的变化过程中不是无穷大的是(　　).

(A) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}(x\to\infty)$　　(B)$\ln x(x\to+\infty)$　　(C)$\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(x\to 0^-)$　　(D)$\ln x(x\to 0^+)$

解　(1) 答案(D). $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=0$；$\lim\limits_{x\to 1}x(x-2)+1=0$；$\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-2x-1)=0$；
$\lim\limits_{x\to 1}(4x^2-2x+1)=4-2+1=3\neq 0$，故选(D).

(2) 答案(C). $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}=\infty$；$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$；$\lim\limits_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$；$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$，故选(C).

习题 1.5

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}$；　(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$；　(5) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-h}{h}$；　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2})$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$；　(9) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$；

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})(2-\dfrac{1}{x^2})$；(11) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}$；(12) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^3})$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x-3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^2+5}{2-3}=-9$.

(2) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{(\sqrt{3})^2-3}{(\sqrt{3})^2+1}=\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{3-3}{3+1}=0$.

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+1}=0$.

(4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2-2x+1}{3x+2}=\dfrac{4-2+1}{3\times 1+2}=\dfrac{3}{5}$.

(5) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-h}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x^2+2xh+h^2-h}{h}=\infty$.

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}(2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2})=\lim\limits_{x\to\infty}(2-0+0)=2$.

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(2x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x+1}=\dfrac{1}{2}$.