



北京市高等教育精品教材立项项目

(第3版)

数学规划及其应用

范玉妹 徐 尔 赵金玲 胡毅庆 编著



冶金工业出版社
Metallurgical Industry Press

北京市高等教育精品教材立项项目

数学规划及其应用

(第3版)

范玉妹 徐 尔 编著
赵金玲 胡毅庆

北 京
冶 金 工 业 出 版 社

2009

内 容 提 要

本书主要论述了线性规划、整数规划、非线性规划、多目标规划和动态规划等内容,并介绍了一些成功的应用实例和计算机应用过程.为便于自学,各章后都附有习题.

本书可作为高等院校工科专业本科生及研究生的教学用书,也可供从事最优化研究与应用、现代技术和管理的科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学规划及其应用/范玉妹等编著.—3版.—北京:冶金工业出版社,2009.9

北京市高等教育精品教材立项项目

ISBN 978-7-5024-4812-7

I. 数… II. 范… III. 数学规划—高等学校—教材 IV. O221

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 143243 号

出 版 人 曹胜利

地 址 北京北河沿大街嵩祝院北巷 39 号,邮编 100009

电 话 (010)64027926 电子信箱 postmaster@cnmip.com.cn

责任编辑 王 优 宋 良 美术编辑 张媛媛 版式设计 张 青

责任校对 王永欣 责任印制 牛晓波

ISBN 978-7-5024-4812-7

北京兴华印刷厂印刷;冶金工业出版社发行;各地新华书店经销

1995 年 12 月第 1 版,2003 年 8 月第 2 版,2009 年 9 月第 3 版,2009 年 9 月第 6 次印刷

185mm×230mm;26.25 印张;581 千字;403 页;10901-13900 册

49.00 元

冶金工业出版社发行部 电话:(010)64044283 传真:(010)64027893

冶金书店 地址:北京东四西大街 46 号(100711) 电话:(010)65289081

(本书如有印装质量问题,本社发行部负责退换)

冶金工业出版社部分图书推荐

书 名	作 者
运筹学通论	范玉妹 等编
模糊数学及其应用(第2版)	李安贵 等编
数值分析(第2版)	张 铁 等编
实用数值分析解题指导	刘春风 编
高等数学疑难解析	王文涛 等编
离散数学概论	周丽珍 编
函数论初步	周丽珍 编
积分方程及其数值方法	魏培君 编
冶金过程数值模拟基础	陈建斌 编
轧制过程数学模型	任 勇 等编
多智能体计划调度系统的理论与应用	卢虎生 等著
数理经济学及其应用	蒋 志 著
新编大学物理教程	赵宝华 等编
大学物理实验教程	张丽慧 等编
现代物理测试技术	梁志德 等编
大学化学	王林山 等编
物理化学(第3版)	王淑兰 主编
高等分析化学	李建平 等编
分析化学实验教程	刘淑萍 等编
化学工程与工艺综合设计实验教程	孙晓然 等编
水分析化学(第2版)	聂麦茜 等编
有机化学(第2版)	朱建光 等编
无机化学实验	张 霞 等编
分析化学简明教程	张锦柱 等编
物理化学(高职教材)	邓基芹 主编
无机化学(高职教材)	邓基芹 主编
土木工程施工组织	蒋红彦 等编
现代生产管理	丁文英 等编
现代企业管理(高职教材)	李 鹰 等编

前言

(第3版)

本书第2版于2003年8月出版后,经过近6年的教学实践,我们再次根据在教学中积累的经验,并汲取使用本书的同行们所提出的宝贵意见;更重要的是,随着科学技术的飞速发展,应用最优化技术去解决其他学科以及生产、科研、生活实际中的问题的需要,特别是算法的实现与计算机的应用已成为当前人们关注的热点,为此,我们将本书的部分内容作了适当修改与调整。

这次我们对本书第2版主要做了如下三方面的修订与调整:

第一,修改了第2版中尚存在的不当之处;增加了绪论,在绪论中我们对运筹学学科做了简单的介绍,以便于读者从宏观上了解该学科的起源、研究的特点和内容。

第二,根据教学中积累的经验,考虑到读者学习知识的心理结构的形成规律,便于读者更好地接受与理解知识的需要,我们将第2版中的前五章内容调整为七章(并增加了离散模型中的0-1型整数规划),使其内容的结构更加系统化与条理化,以便于读者在学习的过程中能迅速地构建成自身的学习心理结构。

第三,为了加强算法的实现与计算机的应用,我们对第2版中的第六章内容进行了修改与扩充,增加了优化算法的实现过程与计算机应用的案例,使读者能直观地感受到本书所介绍的内容具体实现的过程,为读者在解决实际问题时提供借鉴和参考。

本书的编写工作得到了北京市教育委员会以及北京科技大学研究生教育发展基金的资助,在此表示衷心感谢。

在本书第3版出版之际,谨向关心本书和对本书第2版提出宝贵意见的同志表示深切谢意。本书最后所附的参考文献仅是主要参考文献,在此也向列入和未列入参考文献的作者们表示深切谢意。

由于编者水平所限,书中不妥之处,敬请读者批评指正。

编 者

2009年4月

前 言

(第2版)

本书的第1版自1995年出版以来,我们采用它作为教材,已经经过了多次的教学实践,积累了一些经验。这次我们根据在实践中积累的经验,并吸取使用本书的同行们所提出的宝贵意见,将它的部分内容作了修改,成为第2版。

这次修订,我们修改了第1版中存在的不当之处,并致力于教材质量的提高。考虑到使用本书的读者知识的广度与深度,对第一章中的部分内容作了删减,对第三章的内容作了部分调整与增加,对第二、四、五章内容也作了少量的变动,删除了第六章的内容,将其归属到我们编写的《运筹学通论》教材中。此外,针对运筹学的特点,增加了部分应用案例及相应的习题。

在本书第2版出版之际,谨向关心本书和对本书第1版提出宝贵意见的同志们表示深切的谢意。同时,由于编者水平所限,书中仍难免有不妥之处,敬请广大读者给予批评指正。

编 者
2003年3月

前言

(第1版)

数学规划是运筹学的一个重要组成部分，它是近几十年里发展起来的一门新兴学科。随着电子计算机的普及与发展，它在自然科学、社会科学、工程技术和现代管理中得到了广泛的应用，日益受到人们的重视。

本书分六章论述了数学规划的主要内容：线性规划、整数规划、非线性规划、多目标规划、动态规划和网络规划，最后一章则介绍了数学规划一些成功的应用实例。本书是编者在为大学本科生和研究生讲授《运筹学》课程多年的基础上经过修改和补充完成的。本书第一、二、六章由周汉良编写，第三、四、五章由范玉妹编写，第七章由刘胜富编写。

我们在编写本书时力求深入浅出，通俗易懂，并列举了大量的实例。只要具有高等数学、线性代数知识的读者都可以读懂。在取材上，着重介绍了数学规划的基本理论和基本方法，并注意了这些理论和方法的应用。对于一些较复杂的数学推导及证明，作了适量的删减。在计算方法方面，着重介绍了适用面较广、使用方便、具有实效的方法，并力求反映先进成果。鉴于目前计算机已成为运筹学应用中不可缺少的工具，本书特别注意对各种算法都给出了计算框图和算法步骤，使其更具实用的价值。本书每章后面都附有习题，便于自学。

本书可作为大专院校工科各专业教材，也可以作为研究生的教学

参考书。

在本书出版之际，谨向曾经给予我们帮助指导的邓乃扬、诸梅芳教授表示衷心谢意。

由于编者水平所限，书中错误或不妥之处在所难免，敬请广大读者给予批评指正。

编 者

1994 年 12 月

目 录

0 绪论	1
0.1 运筹学的三个来源	1
0.1.1 军事	1
0.1.2 经济与管理	3
0.1.3 运筹学分支的重大理论成果	4
0.2 运筹学的三个组成部分	5
0.3 运筹学解决问题的一种模式	6
0.3.1 运筹学解决问题的过程	6
0.3.2 效果度量概念	6
0.4 运筹学的范围	7
1 线性规划	8
1.1 线性规划问题的数学模型	8
1.1.1 实例	8
1.1.2 线性规划问题的数学形式	11
1.2 基本概念和基本定理	13
1.2.1 基本概念	13
1.2.2 基本定理	15
1.3 图解法及几何理论	18
1.3.1 图解法	18
1.3.2 几何理论	19
1.4 单纯形法	23
1.4.1 典式	23
1.4.2 迭代原理	25
1.4.3 计算步骤	27
1.4.4 两阶段法	32
1.5 改进单纯形法	36

1.5.1 基本思想	36
1.5.2 计算步骤	37
习题 1	40
2 对偶理论	42
2.1 对偶规划	42
2.1.1 问题的提出	42
2.1.2 对偶规划的定义	43
2.2 对偶理论	46
2.3 对偶单纯形法	48
2.3.1 基本思想	48
2.3.2 迭代原理	49
2.3.3 具体计算步骤	50
2.3.4 影子价格	53
2.4 线性规划问题的灵敏度分析	57
2.4.1 目标函数系数的灵敏度分析	58
2.4.2 约束右侧常数项 b_i 的灵敏度分析	59
2.4.3 约束矩阵的灵敏度分析	61
2.5 运输问题	66
2.5.1 平衡运输问题的数学形式	66
2.5.2 平衡运输问题的表上作业法	68
2.5.3 产销不平衡的运输问题	75
习题 2	84
3 整数规划	86
3.1 整数规划的数学模型	86
3.2 分枝定界法	90
3.3 割平面法	96
3.4 分配问题	101
3.5 0-1 型整数规划	106
3.5.1 0-1 型整数规划的特点	106
3.5.2 0-1 型整数规划的解法——隐枚举法	107
习题 3	109

4 无约束最优化问题	111
4.1 非线性规划的数学模型及基本概念	111
4.1.1 实例及数学模型	111
4.1.2 基本概念	114
4.2 凸函数和凸规划	119
4.2.1 凸函数的定义及其性质	119
4.2.2 凸规划	121
4.3 一维搜索	122
4.3.1 搜索区间的确定	123
4.3.2 Fibonacci 方法	124
4.3.3 0.618 法 (黄金分割法)	126
4.3.4 抛物线插值法	127
4.4 无约束优化问题的解法	128
4.4.1 收敛性概念	128
4.4.2 最速下降法 (梯度法)	130
4.4.3 Newton 法	133
4.4.4 共轭梯度法	135
4.4.5 拟 Newton 法 (变尺度法)	142
4.4.6 直接搜索算法	147
习题 4	154
5 约束最优化问题	156
5.1 约束优化问题的最优性条件	156
5.1.1 不等式约束的一阶必要条件	156
5.1.2 等式和不等式约束问题的最优性条件	159
5.1.3 约束优化问题的二阶充分条件	160
5.2 罚函数法 (SUMT 法)	161
5.2.1 外点法	161
5.2.2 内点法	165
5.2.3 混合点法	168
5.3 乘子法	169
5.3.1 Hestenes 乘子法	169
5.3.2 Powell 乘子法	171
5.3.3 Rockafellar 乘子法	172

5.4 可行方向法	175
5.5 投影梯度法	184
5.5.1 投影矩阵	184
5.5.2 投影梯度法	185
5.5.3 投影矩阵 $R^{(k)}$ 和 $(N^{(k)T} N^{(k)})^{-1}$ 的计算	192
5.6 既约梯度法	195
习题 5	203
6 多目标规划	205
6.1 多目标规划的数学模型	205
6.1.1 实例	205
6.1.2 数学模型	207
6.2 多目标规划问题的解集和象集	207
6.2.1 各种解的概念	207
6.2.2 解集合的性质	209
6.2.3 象集	210
6.3 处理多目标规划的一些方法	211
6.3.1 主要目标法	211
6.3.2 评价函数法	212
6.3.3 安全法	216
6.3.4 功效系数法	216
6.4 目标规划	220
6.4.1 线性目标规划的数学模型	220
6.4.2 线性目标规划的求解方法	226
习题 6	240
7 动态规划	243
7.1 动态规划的研究对象和特点	243
7.2 动态规划的基本概念	245
7.2.1 多阶段决策过程	245
7.2.2 基本概念	248
7.2.3 建立动态规划模型的基本条件	251
7.2.4 动态规划的分类	251
7.3 动态规划的基本方程	251
7.3.1 Bellman 函数	251

7.3.2 最优性原理	252
7.3.3 动态规划的基本方程	253
7.4 动态规划的基本方法	254
7.4.1 动态规划的递推方法	254
7.4.2 函数迭代法和策略迭代法	258
7.5 动态规划的应用	265
7.5.1 资源分配问题	265
7.5.2 生产-库存问题	269
7.5.3 设备更新问题	272
7.5.4 背包问题	274
7.5.5 货郎担问题	280
习题 7	282
8 应用实例及计算机应用举例	285
部分习题答案	398
参考文献	403

0 绪 论

任何一门科学都不是突然诞生的，运筹学也不例外。运筹学问题和朴素的运筹思想可追溯到古代，它和人类实践活动的各种决策并存，可以说自从有了人类，社会运筹学就已经存在。但作为一个标记，应该说直到 20 世纪，并延续到 20 世纪 30 年代末和 40 年代初，在烽火硝烟的战争中，才正式诞生了运筹学。我国运筹学和系统工程的老前辈、中国工程院院士许国志教授指出，运筹学有三个来源：“军事、管理、经济”。这是一个非常科学的概括。下面对运筹学早期发展中若干有代表性的工作作一简略介绍，这对学习本门课程是有益的。

0.1 运筹学的三个来源

0.1.1 军事

军事是运筹学的发源地之一，事实上，运筹学（Operational Research，简称 OR）的原意就叫作“作战研究”。我国古代的孙武子就被美国军事学会在 1984 年出版的一本关于系统分析和模型的书中称为世界上第一个军事运筹学的实践家，孙武子在他著名的《孙子兵法》中关于质的论断，渗透着深刻的量的分析，他指出：“知之者胜，不知者不胜”、“知彼知己者，百战不殆；不知彼而知己，一胜一负；不知彼，不知己，每战必殆”。这些著名的论断都蕴涵着朴素的运筹学思想。又比如家喻户晓的田忌赛马、围魏救赵、行军运粮等等，都是我国早期的军事运筹问题和运筹学思想的例子。同样，在国外，运筹学思想也可追溯到很早以前。比如，阿基米德、伦纳多·达芬奇、伽利略都研究过作战问题，特别值得一提的是以下几个典型的代表性的工作。

0.1.1.1 兰彻斯特方程

F. W. 兰彻斯特（1868~1946 年）是一位学识渊博的英国学者，他在流体力学、作战模拟等领域都做出了出色的贡献。19 世纪 90 年代初，他研究飞行理论，1894 年发表了关于飞行器翼产生升力的机理及相应计算方法的著名论文。1916 年，他的名著《战争中的飞行器，第四种武器的问世》在伦敦出版。这本名著中汇集了他对飞机运行和空战方面的一系列研究，敏锐地抓住了飞机的出现及对作战方式带来的影响。这一重要的问题当时尚处在朦胧状态而未被重视，而他却对此作了精辟的、超前的论述。所以，美国军事学会认为，运筹学的发展从一开始就与兰彻斯特的名字联系在一起了。该学会在约翰·霍普金斯大学建立了以兰彻斯特命名的奖学金，每年颁发一次，专门用来奖励最优秀的运筹学论文的作者。兰彻斯特进行的研究与所获成果中，一个基本特征是使用数量化方法。在“作战研究”的某些领域

使用数量化方法进行分析的难度是很大的,但兰彻斯特却在这方面做了许多出色的工作,其代表性的成果之一就是作战分析中(优势、火力和胜负的动态关系)著名的兰彻斯特方程以及兰彻斯特对“纳尔逊秘诀”的分析.应该说,不仅是其结果,而且还包括其理念与方法论所产生的影响,至今仍有很大的价值.

0.1.1.2 鲍德西(Bawdsey)雷达站的研究

20世纪30年代,德国内部民族沙文主义及纳粹主义日渐抬头,以希特勒为首的纳粹势力夺取了政权,开始为以战争扩充版图,以武力称霸世界的构思做战争准备.当时欧洲上空战云密布,有远见的英国海军大臣丘吉尔认为英德之战不可避免,所以反对当时的主政者的“绥靖”政策,他在自己的权力范围内做着迎战德国的准备,其中最重要、最有成效之一者就是英国本土的防空准备:1935年,英国科学家沃森·瓦特(R. Watson. Wart)发明了雷达,丘吉尔敏锐地意识到它的重要意义,并下令在英国东海岸的Bawdsey建立了一个秘密的雷达站.当时,德国已拥有一支强大的空军,起飞17分钟即可到达英国.在如此短的时间内,如何预防及做好拦截,甚至在本土之外或海上拦截德机,就成为一大难题.而雷达技术帮助了英国,因为即使在当时的演习中已经可以探测到160公里之外的飞机,但空防中仍有许多漏洞.于是在1939年,以曼彻斯特大学物理学家、英国战斗机司令部科学顾问、战后获诺贝尔奖金的P. M. S. Blackett教授(贝尔卡特)为首,组织了一个小组,代号为“Blackett马戏团”,专门就改进空防系统进行研究.这个小组成员包括三名心理学家、两名数学家、两名应用数学家、一名天文物理学家、一名普通物理学家、一名海军军官和一名陆军军官、一名测量人员,他们在研究中设计了将雷达信息传送给指挥系统及武器系统的最佳方式、雷达与防空武器的最佳配置等一系列的方案,从而大大提高了英国本土防空能力,在以后不久的对抗德国对英伦三岛的狂轰滥炸中发挥了极大的作用.二战史专家评论说,如果没有这项技术和研究,英国就不可能赢得这场战争.“Blackett马戏团”是世界上第一个运筹学小组,在他们就此项研究所写的秘密报告中,使用了“Operational Research”一词,意指“作战研究”或“运用研究”,所以后人就以此作为运筹学的命名.应该说,Bawdsey雷达站的研究是运筹学的发祥和典范,因为此项研究的巨大实际价值、明确的目标、整体化的思想、数量化的分析、多学科的协同、最优化的结果以及简明朴素的表达,都展示了运筹学的本色与特色,是让人难以忘怀的.

0.1.1.3 Blackett(贝尔卡特)备忘录

1941年12月,Blackett以其巨大的声望,应盟国政府的要求写了一份题为:“Scientists at the Operational Level”(作战位置上的科学家)的简短备忘录,建议在各大指挥部建立运筹学小组.这个建议迅速被采纳.据不完全统计,第二次世界大战期间,仅在英国、美国和加拿大,参加运筹学工作的科学家就超过700名.1943年5月,Blackett写了第二份备忘录,题为:“关于运筹学方法论某些方面的说明”,他写道:“运筹学的一个明显的特征,正如目前所实践的那样,是它具有或应该有强烈的实际性质.它的目的是帮助找出一些方法,以改进正在进行中的或计划在未来进行的作战的效率.为了达到这一目的,要研究过去

的作战来明确事实，要得出一些理论来解释事实，最后，利用这些事实和理论对未来的作战作出预测”。这些运筹学的早期的思想至今仍然有效。

0.1.1.4 大西洋反击战

美国投入第二次世界大战后，吸收了大量科学家协助作战指挥。1942年，美国大西洋舰队反潜战官员 W. D. Baker（贝卡）舰长请求建立反潜战运筹组，麻省理工学院的物理学家 P. W. Morse（莫斯）被请来担任计划与监督。P. W. Morse 最出色的工作之一，是打破了德国对英吉利海峡的海上封锁。1941~1942年，德国潜艇严密封锁了英吉利海峡，企图切断英国的“生命线”。英国海军数次反封锁均不成功。Morse 小组经过多方实地调查，提出了两条重要的意见：

(1) 将反潜攻击由反潜舰艇投放水雷，改为飞机投放深水炸弹；起爆深度由 100 米左右改为 25 米左右，即在德国潜艇下潜时进行攻击，效果最佳。

(2) 运送物质的船队及护航潜艇编队，由小规模多批次改为大规模少批次，这样将减少损失率。当时已出任英国首相的丘吉尔采纳了 Morse 小组的意见，最终成功地打破了德国的封锁，并重创了德国潜艇。由于这项工作，Morse 同时获得了英国及美国战时的最高奖励。

0.1.1.5 英国战斗机中队援法决策

第二次世界大战开始后不久，德国军队突破了法国的马其诺防线，法军节节败退。英国为了对抗德国，派遣了十几个战斗机中队在法国国土上空与德国空军作战，其指挥、维护均在法国进行。由于战斗损失，法国总理要求增援 10 个战斗机中队，丘吉尔首相决定同意这个请求。英国运筹人员得知此事后，进行了一项快速研究，其结果表明：在当时的环境下，当损失率、补充率为现行水平时，英国的援法战斗机不出两周就会全部损失掉。他们以简明的图表和明确的分析结果说服了丘吉尔首相，丘吉尔最终决定：不仅不再增添新的战斗机中队，而且还将在法的英国战斗机撤回大部分，以本土为基地，继续去对抗德国。事实上，这样的决策，反而使整个局面有了很大的改观。

0.1.1.6 南太平洋战争

1943年第二次世界大战期间，美国军队与日本军队在南太平洋战区相遇，当时日本军队的指挥官是山本五十六（当年偷袭珍珠港的首领），美国军队的指挥官是麦克阿瑟。交战双方要决策的是：日方须决定应该带着军队走南太平洋的南线还是北线？美方则须决定应该把轰炸机安置在南太平洋的南线还是北线？据情报，北线那边天气不好，不易走，但隐蔽性好些；走南线那边天气好，易走，但隐蔽性比较差。双方的决策结果是：日方决定带军队走南太平洋的北线，但山本五十六万万没有想到美方则恰好决定把轰炸机安置在南太平洋的北线，所以这次交战日本军队遭到惨败。这其实是运筹学的对策论中的矩阵对策的一个实际战例。

0.1.2 经济与管理

运筹学的另外两个来源是经济与管理，下面简略地介绍几个代表性的工作。