21世纪数学教育信息化精品教材

Math 大学数学立体化教材

高等数学

（医药类）

·吴赣昌　主编·

中国人民大学出版社

21世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

高等数学

（医药类）

·吴赣昌　主编·

中国人民大学出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 医药类/吴赣昌主编.
北京：中国人民大学出版社，2009
21世纪数学教育信息化精品教材. 大学数学立体化教材
ISBN 978-7-300-10625-0

Ⅰ. 高…
Ⅱ. 吴…
Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材
Ⅳ. O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第065219号

21世纪数学教育信息化精品教材
大学数学立体化教材
高等数学（医药类）
吴赣昌　主编

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京鑫丰华彩印有限公司		
规　　格	170 mm×228 mm　16开本	**版　　次**	2009年6月第1版
印　　张	29.75 插页1	**印　　次**	2009年6月第1次印刷
字　　数	545 000	**定　　价**	52.00元（含光盘）

内容简介

本书根据高等院校医药类专业高等数学课程的教学大纲编写而成。内容包括函数与极限、一元微分学、一元积分学、多元微分学、多元积分学、微分方程等知识。

本书在结构上力求严谨简明、语言表述上力求通俗易懂，同时注重数学知识在现代医学技术上的应用，并精选了大量有实际背景的例题和习题，以培养学生的数学素质、创新意识及运用数学工具解决实际问题的能力。书中融入了数学历史、数学文化的教育。书后配有内容丰富、功能强大的《高等数学多媒体学习系统》(光盘，附书后)，其内容覆盖了课堂教学、习题解答、数学实验、综合训练等模块。这些功能模块的设计将对学生们的课后复习、疑难解答、自学提高以及创新能力的培养起到积极的作用。本书叙述深入浅出、通俗易懂、论证严谨，在教学过程中，将光盘与本书配合使用，形成了教与学的有机结合。

为了提高读者的数学应用能力，附录中借助数学软件 Mathematica 编写了与本书配套的简单的数学实验指导。

本书可作为医药及相关专业的高等数学教材，也可以作为医药科研人员的参考书。

前　言

大学数学是自然科学的基本语言，是应用模式探索现实世界物质运动机理的主要手段. 对于非数学专业的大学生而言，大学数学的教育，其意义不仅仅是学习一种专业的工具而已. 中外大量的教育实践事实充分显示了：优秀的数学教育，是一种人的理性的思维品格和思辨能力的培育，是聪明智慧的启迪，是潜在的能动性与创造力的开发，其价值是远非一般的专业技术教育所能相提并论的.

随着我国高等教育自 1999 年开始迅速扩大招生规模，至 2008 年的短短九年间，我国高等教育实现了从精英教育到大众化教育的过渡，走完了其它国家需要三五十年甚至更长时间才能走完的路程. 教育规模的迅速扩张，给我国的高等教育带来了一系列的变化、问题与挑战，如大众化教育阶段入学群体的多样化问题、学生规模扩张带来的大班和多班教学问题、由于院校合并导致的“一校多区”及由此产生的教学管理不科学以及师生间缺乏交流等问题，这些都是在过去精英教育阶段没有遇到的.

进入大众化教育阶段，大学数学的教育问题首当其冲受到影响. 过去大学数学教育是面向少数精英的教育，由于学科的特点，数学教育呈现几十年、甚至上百年的一贯制，仍处于经典状态. 当前大学数学课程的教学效果不尽如人意，概括起来主要表现在以下两方面：一是教材建设仍然停留在传统模式上，未能适应新的社会需求，传统的大学数学教材过分追求逻辑的严密性和理论体系的完整性，重理论而轻实践，剥离了概念、原理和范例的几何背景与现实意义，导致教学内容过于抽象，也不利于与其它课程及学生自身专业的衔接，进而造成了学生“学不会，用不了”的尴尬局面；二是在计算机技术迅猛发展的今天，信息化技术本应给数学教育提供空前广阔的天地，但遗憾的是，在数学教育领域，信息化技术的使用远没有在其它领域活跃. 正如我国著名数学家张景中院士所指出的，计算机进入数学教育在国内还只是刚刚起步，究其原因主要有两方面：一是没有充分考虑把信息化技术和数学教学的学科特点结合起来；二是在强调教育技术的同时没有充分发挥教师的作用，这样就难以把信息化技术和数学教学完美地结合起来.

关于大学数学教育改革的出路问题，在此，我们引用教育部数学基础课程教学

指导分委员会前主任、清华大学数学系冯克勤教授专门撰文所指出的一句话："数学教育的关键是彻底转变观念."当前大学数学教学所面临的问题，实际上已经指出了大学数学教育改革的目标：一是深化教学内容和教材体系的改革；二是积极推进大学数学教育信息化建设. 为此，自 2000 年初起，在本系列教材总主编吴赣昌教授的策划与组织下，我们成立了一个由专家学者、专任教师、专职软件与网络设计人员组成的研发团队，围绕上述改革目标坚持不懈地进行攻关，2002 年推出了第一个"高等数学多媒体教学系统"，从 2005 年起，先后经由中国人民大学出版社出版了面向理工类与经管类专业使用的"大学数学立体化教材"及其配套的多媒体教学系统. 同时，我们针对我国高职高专院校数学教学的实际情况还专门推出了"高职高专数学立体化教材". 此外，与上述各种教材配套的大学数学多媒体教学系统、大学数学试题库系统和大学数学精品课程网站等信息化建设工作已初步完成.

令我们感到欣慰的是，上述成果已被国内高等院校广泛采用并对当前大学数学的教育改革起到了积极的推动作用. 三年来，我们得到了国内高校许多同行专家的鼓励和支持，其中部分同行专家不仅反馈了上述建设中存在的问题，而且主动给出了有针对性的建议，将这些建议和我们最新研究建设的成果及时融入上述教材建设及其配套信息化建设是此次修订、升级与扩版的动因. 为更加突出教材的特色和内涵，我们特将此次经由中国人民大学出版社出版的上述系列教材统一冠名为"21世纪数学教育信息化精品教材". 本次修订与升级有两方面重点：一是对原有教材的内容做了重大的修订，并根据教学需要扩展了专业适用类别与读者适用类别，特别是针对高职高专院校增设了《实用高等数学》与《应用数学基础》两种立体化教材，前者内容包括微积分与线性代数初步，后者内容包括微积分、线性代数初步与概率统计初步；二是与教材配套的各项信息化建设得到了重大提升.

在教材内容修订方面，我们努力做到紧密联系实际，服务专业课程，力图同步融入数学建模的思想和方法. 在本次教材的修订与升级中，我们特别精选了只涉及较为初等的数学知识、能体现数学建模精神、能吸引学生并且以后又可能接触到的应用范例和数学建模问题，如函数模型的建立及其应用，作为变化率的导数在几何学、物理学、经济学中的应用，抛射体运动的数学建模及其应用，最优化方法及其在工程、经济、农业等领域中的应用，逻辑斯蒂模型及其在人口预测、新产品的推广与经济增长预测方面的应用，网络流模型及其应用，人口迁移模型及其应用，常用概率模型及其应用，等等，并为所有应用范例配备了相应的应用习题. 这些实际应用范例既为学生理解数学的抽象概念提供了认识基础，也有助于加强与后续专业课程的联系，使学生学有所用.

此外，还对部分教学内容的设计和章节引言做了改进，如数列极限的概念，先通过其描述性定义引入基本概念，然后从定量分析的角度进一步给出数列极限的严

格定义，这样的安排既符合数学发展的本源，又利于学生更好地理解极限的概念. 又如“线性化”观点是用数学解决实际问题的一种重要的思想方法，改版后的教材中很好地引入并发展了这种观点，既利于学生更加直观地理解相应的数学概念，又利于培养学生的数学建模能力. 此外，还改写或重新撰写了许多章节的引言，如数学建模——函数关系建立、函数连续性、数学建模——最优化、矩阵、线性方程组等章节的引言，这些引言对于学生理解即将学习的数学内容的实质能起到重要的作用. 关于习题调整方面，除前面提到的补充了不少应用习题外，还在难度梯度上对习题进行了调整，尤其是增补了部分计算比较简单又利于加强概念理解的习题，并重新校订了全部习题及其答案. 值得一提的还有，在《高等数学》与《微积分》中插入了历史上对数学（尤其是近代数学）有杰出贡献的八位伟大数学家的简介，从他们的身上既能管窥近代数学发展的基本过程，又能领略数学家坚韧不拔地追求真理的人格魅力和科学精神.

在与教材配套的信息化建设方面，针对我国高等教育快速进入大众化教育阶段后大学数学教育所面临的种种问题，我们将计算机信息技术与数学的教学内容、教师的课堂教学、学生的课后学习和数学的学科特点进行了有机的整合，形成了全新的大学数学教育理念，构筑了全新的大学数学教育模式，将大学数学教育的信息化建设延伸和拓展到教、学、考各个环节中，为大学数学的教与学双方建立了课堂教学信息化系统、课后学习辅导信息化平台、师生互动信息化平台以及试题库系统等，取得了以下重要的教学成果.

1. 在课堂教学信息化系统建设方面，我们利用 Flash 等多媒体开发工具软件开发建设了“大学数学多媒体教学系统”，该系列“教学系统”是大型的集成性、交互式和信息资源立体化的教学软件，内容模块上包括了多媒体教案、备课系统、习题解答、综合训练、实验教学与实验案例库等；系统功能上包括了长期开发积累的满足专业教学需求的多媒体教学动画演示功能、供教师在教学过程中进行手写板书的手写笔功能、供教师在教学过程中进行知识点交互和数学家介绍的系统导航功能、供教师备课的个性化的编辑修改功能、教学画面缩放功能、文件扩展链接功能等. 此外，系统设计可使教师利用遥控鼠标在教室内进行移动教学. 采用该系列“教学系统”进行课堂教学，既可以充分发挥信息化教学的优势，也能够很好地融入教师板书教学的个性化特色，若配合教师的教学演讲，可以充分展示现代教学方式的优势，突破此前以粉笔加黑板或 PPT 演示为主的传统教学模式.

2. 在课后学习辅导信息化平台和师生互动信息化平台的建设方面，开发建设了“大学数学精品课程网站”，该网站包含数学教育资讯、课程建设和师生互动三大模块，它们分别承载着搭建学生的课后学习辅导平台、课程建设平台与师生互动交流平

台三项任务，而为完成这三项建设任务，我们的团队突出地解决了下面两点：

（1）基于长期的研发积累，开发建设了无需安装插件即可直接在IE浏览器上使用的基于Web的可视化数学公式编辑器，它除实现了Mathtype等文档编辑器的全部功能外，还支持最常用的上下标快捷键输入，突破了长期制约数学教育领域开展网络教学和在线答疑与交流的技术瓶颈.

（2）从专业建设的角度，开发了满足数学教育需求的语音视频互动的在线答疑平台. 该平台采用P2P技术开发，对服务器硬件的依附性低，在不增加各院校服务器建设的负担的前提下，能同时支持万人以上在线互动. 尤为突出的是该平台同时支持文字编辑、数学公式编辑和语音视频交流互动，能充分满足各院校进行网络在线答疑和在线交流的需要.

融入了上述基于Web的数学公式编辑器和在线交流平台成为该系列"课程网站"的独特亮点. 同时由于有作者团队专业专职的服务，该系列"课程网站"在内容建设的专业性、资讯更新的时效性、功能设计的实用性以及构建技术的先进性等方面居于国内同类精品课程网站建设的领先地位.

3. 在试题库系统建设方面，本成果开发建设的"大学数学试题库系统"包含高等数学、线性代数、概率论与数理统计三大模块，试题总量25 000余道，可满足理工、经管、农林、医药等各类普通本科院校和高职高专院校试题组卷的要求. 该系统具有试题类型丰富、组卷功能强大以及成卷快速等特点，在试题的查询预览、成卷后试卷的人工调整以及试卷和试题的编辑修改方面，提供了强大的二次开发功能.

4. 在教学资源共享与服务方面，以作者为核心的"数苑团队"倾力建设了面向全国广大师生的数学教育门户网站——"数苑网"（www. math168. com)，该网站建设了动态信息、视频频道、名家论谈、莘莘学子、就业留学等教育资讯栏目，数学建模、数学应用、数学考研、数学史话、数学欣赏、数学名著等数学资讯栏目，数学实验、习题辅导、复习提高、题型分析、综合练习、考研真题等原创学习辅导栏目，教材建设、教学文件、教辅建设、教学系统、题库系统、在线测试、作业系统、考试中心、交流平台、公式编辑等原创教学资源栏目. 此外，以实名制注册的面向全国同行的"教师空间"将为广大教师提供教学资源下载、教学研究交流、网上在线讨论以及博客论坛等服务，而正在建设中的面向学生的在线学习系统、训练系统、测试系统以及答疑系统将为广大学生提供更进一步的服务.

由作者主持的"大学数学教育信息化研究与建设"教学成果于2008年9月29日在广东商学院举行了专题鉴定会，由国内权威专家组成的鉴定专家组一致认为：本成果自2000年3月起进行了连续九年多的研究、开发、建设与实践，其研发历程恰恰与我国高等教育的规模扩张期同步，其成果在历年的研究、建设与实践中反复锤炼、

不断提升，包括“大学数学多媒体教学系统”、“大学数学试题库系统”、“大学数学精品课程网站”的建设均居于国内领先地位．该成果针对大学数学公共基础课程的各项建设，具有广阔的应用前景，对相关课程的建设能起到很好的辐射作用．

致学生

在你进入高校即将学习的所有大学课程中，就巩固你的学习基础、提升你的学习能力、培养你的科学素质和创新能力而言，大学数学是最有用且最值得你努力的课程．事实上，像《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》这些大学数学基础课程，无论怎样评价其重要性都不为过，而学好这些大学数学基础课程，你将受益终生．

主动把握好从“学数学”到“做数学”的转变，这一点在大学数学的学习中尤为重要，不要以为你在课堂教学过程中听懂了就等于学到了，事实上，你需要在课后花更多的时间主动去做相关训练才能真正掌握所学知识．

在大学数学的学习过程中，概念和计算同等重要．只有反复、认真地阅读教材，你才能真正掌握大学数学的基本概念．每个章节的习题中都安排了简单的计算题，目的是帮助你检查对基本算法的理解，在做习题时，你应先尝试独立完成习题，尽量不看答案，便于发现哪些知识自己还没有真正理解．在今后的工作中，你当然可以使用计算机来完成这些计算，但你必须学会选择算法，理解计算结果的意义并且向他人解释清楚．

从某种意义上说，大学数学就是一门语言——科学的语言．你必须像对待外语一样，每天都学习它．为了真正理解教材中某一部分的内容，你往往需要完全掌握前面章节的内容和习题．跟上课程的进度可以节省很多时间并且避免很多麻烦．

为了帮助你学好大学数学课程，本系列教材均附有配套的“多媒体学习系统”，该学习系统是一套大型的集成性、交互式和教学资源多元化的学习软件，其中设计了多媒体教案、习题详解、综合训练、实验教学等功能模块．在多媒体教案模块中，我们按动态仿真教学方式设计了大量的教学动画，直击数学思想本质，便于你突破学习中的重点和难点，同时可以大大减少课堂教学中的笔记工作量；在习题详解模块中，我们以多媒体动画的形式给出了习题的求解过程和相关方法，便于你课后学习；在综合训练模块中，我们总结了每章的教学知识点，并在每章末通过精选的总习题进一步揭示解题的一般规律和技巧，便于你综合提高．在系统的教学与集成方面，我们利用多媒体开发软件的网页特性，为系统中的每个文件提供了丰富的知识点交互与导航，便于你高效率地学习．

为了帮助你进行数学实验，我们以交互和集成的方式，设计了“数学实验教学演示系统”，并提供了比教材包含更多实际案例的实验案例库．数学实验的学习应

从案例入手来理解数学的概念和算法本身，在大学数学的学习过程中，你完全没有必要将过多的精力花在全面细致地学习某种数学软件的程序语言中. 此外，任何技术手段都有其局限性，它们永远都是辅助手段，绝不能替代人类聪明的思考、计算、推理和证明.

经常登录作者团队倾力为你建设的“数苑网”（www. math168. com），你将会获得意想不到的收获. 在那里，你能进一步拓展自己的学习空间，寻找到更多教材之外的学习资源，并与全国的良师益友建立联系.

致教师

我们开发的“21 世纪数学教育信息化精品教材”是名副其实的包含配套信息化建设的教材，如果您和您的学生正在使用或准备使用本系列教材，请登录作者团队建设的数学教育门户网站——“数苑网”（www. math168. com）下载与教材配套的教学资源，如教学软件和相关教学建设文件等. 如果您所在的院校采用本系列教材达到一定量，请主动和我们联系，以获得与本系列教材配套的信息化建设，如安装“大学数学试题库系统”和“大学数学精品课程网站”等.

此外，还要提醒您的是，请尽早加入我们在“数苑网”上以实名制注册的面向全国同行提供的“教师空间”，该空间将为广大教师提供教学资源下载、教学研究交流、网上在线讨论以及博客论坛等服务.

结束语

正如美国《托马斯微积分》的作者 G. B. 托马斯（G. B. Thomas）教授精辟指出的，“一套教材不能构成一门课；教师和学生在一起才能构成一门课”，教材只是支持这门课程的信息资源. 教材是死的，课程是活的. 课程是教师和学生共同组成的一个相互作用的整体，只有真正做到以学生为中心，处处为学生着想，并充分发挥教师的核心指导作用，才能使之成为富有成效的课程. 而本系列教材及其配套的信息化建设将为教学双方提供支持其课程的充分的信息资源，帮助教师在教学过程中发挥其才华，并利于学生富有成效地学习.

与传统的教材不同的是，有一支实力雄厚、专业专职的作者团队——数苑团队在为本系列教材的使用者提供长期的、日常的教学服务与技术支持. 如果在使用本系列教材及其配套的信息化建设过程中遇到任何问题，你可以通过下面的邮箱随时与我们联系：math168@vip. 188. com.

编者

2009 年 3 月 18 日

目　　录

附录Ⅰ 大学数学实验指导

附录Ⅱ 预备知识、常用曲线与曲面

习题答案

绪　　言

> 考虑到数学有无穷多的主题内容，数学，甚至是现代数学也是处于婴儿时期的一门科学．如果文明继续发展，那么在今后两千年，人类思维中压倒一切的新特点就是数学悟性要占统治地位．
>
> —— A.N. 怀特海

一、为什么学数学

大学数学(包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计)是高等院校理工类、经管类、农林类与医药类等各专业的公共基础课程．如今，即使以往一般不学数学的纯文科类专业也普遍开设了大学数学课程．为什么现在对它的学习受到如此大的重视呢？具体来说，大致有以下两方面的原因：

首先是因为当代数学及其应用的发展．进入20世纪以后，数学向更加抽象的方向发展，各个学科更加系统化和结构化，数学的各个分支学科之间交叉渗透，彼此的界限已经逐渐模糊．时至今日，数学学科的所有分支都或多或少地联系在一起，形成了一个复杂的、相互关联的网络．纯粹数学和应用数学一度存在的分歧在更高的层面上趋于缓和，并走向协调发展．总而言之，数学科学日益走向综合，现在已经形成了一个包含上百个分支学科、各学科相互交融渗透的庞大的科学体系，这充分显示了数学科学的统一性．

数学与其它学科之间的交叉、渗透与相互作用，既使得数学领域在深度和广度上进一步扩大，又促进众多新兴的交叉学科与边缘学科的蓬勃发展，如金融数学、生物数学、控制数学、定量社会学、数理语言学、计量史学、军事运筹学，等等．这种交融大大促进了各相关学科的发展，使得数学的应用无处不在．20世纪下半叶，数学与计算机技术的结合产生了数学技术．数学技术的迅速兴起，使得数学对社会进步所起的作用从幕后走向台前．计算机的迅速发展和普及，不仅为数学提供了强大的技术手段，也极大地改变了数学的研究方法和思维模式．所谓数学技术，就是数学的思想方法与当代计算机技术相结合而成的一种高级的、可实现的技术．数学的思想方法是数学技术的灵魂，拿掉它数学技术就只剩下一个空壳．数学技术对于人类社会的现代化起着极大的推动作用．正是在这个意义上，联合国教科文组织把21世纪的第一年定为“世界数学年”，并指出“纯粹数学与应用数学是理解世界及其发展的一把主要钥匙”．

其次是因为数学能够很好地培养人的理性思维. 数学除了是科学的基础和工具外，还是一种十分重要的思维方式与文化精神. 美国国家研究委员会在一份题为“人人关心数学教育的未来”的研究报告中指出:“除了定理和理论外，数学提供了有特色的思考方式，包括建立模型、抽象化、最优化、逻辑分析、由数据进行推断以及符号运算等. 它们是普遍适用的、强有力的思考方式. 应用这些数学思考方式的经验构成了数学能力——在当今这个技术时代里日益重要的一种智力. 它使人们能批判地阅读，能识别谬误，能探索偏见，能估计风险，能提出变通办法. 数学能使我们更好地了解我们生活在其中的充满信息的世界.”数学在形成人类的理性思维方面起着核心的作用，而我国的传统文化教育在这方面恰恰是不足的. 一位西方数学史家曾说过:“我们讲授数学不只是要教涉及量的推理，不只是把它作为科学的语言来讲授——虽然这些都很重要——而且要让人们知道，如果不从数学在西方思想史上所起的重要作用方面来了解它，就不可能完全理解人文科学、自然科学、人的所有创造和人类世界.”

二、数学是什么

《数学是什么》是20世纪著名数学家柯朗(R. Courant)的名著. 每一个受过教育的人都不会认为自己不知道数学是什么，但是每个读过这本书的人都受益匪浅. 人们了解数学是通过阅读有关算术、代数、几何与微积分等方面的教材和著作，知道数学的一些内容. 但这只是数学极小的一部分. 柯朗认为，数学教育应该使人了解数学在人类认识自己和认识自然中所起的作用，而不只是一些数学理论和公式.

凡是学过数学的人，都能领略到它的特点——理论抽象、逻辑严密，从而显示出一种其它学科无法比拟的精确和可靠. 但是人们更需要了解的是数学对整个人类文明的重要影响. 回顾人类的文明史，2 500年来，人们一直在利用数学追求真理，而且成就辉煌. 数学使人类充满自信，因为由此能够俯视世界、探索宇宙. 人类改变世界和自身所依赖的是科学，而科学之所以能实现人的意志是因为**科学的数学化**. 马克思曾说过:“一门科学，只有当它成功地运用数学时，才能达到真正完善的地步.”一百多年前，成功地由数学完善其理论的不过是力学、天文学和某些物理学的分支，化学很少用到数学，生物学与数学毫无关系. 而现在就完全不同了，几乎所有的科学，不仅是自然科学，而且包括社会科学和人文科学的各个领域，都正在大量应用数学理论. 这正是20世纪人类社会和自然面貌迅速改变的原因. 我们还可以回顾一下，在人类进入近代文明之前，对于现实世界的认识和描述大多是定性的，诸如“日月星辰绕地球旋转”、“重的物体比轻的物体下落得快”，等等. 而现在的科学则要求定量地知道，一个物体以什么样的速度沿什么样的轨道运行，怎样可以准确无误地把人送到月球上指定的地点，等等. 一个科学理论，必须经得起反复的观察验证，而且可以精确地预言即将出现的事物和现象，只有这样才能按照人的意志改造客观世界. 不论是验证还是预言，都需要有定量的标准，这就要求科学数学化. 现在，数

学化了的科学已经渗透到社会的所有领域的各个层面，人类可以在大范围内预报中长期的气象，可以预测一个地区、一个国家甚至全世界的经济前景. 这是因为现在对于这些看似纷乱的现象已经可以建立数学模型，然后经过演算和推理就能得出人们想知道的结论. 金融、保险、教育、人口、资源、遗传，甚至语言、历史、文学都不同程度地采用数学方法，许多领域的科学论文都以它所使用的数学工具作为重要的评估标准之一. 电视、通信、摄影技术正在数字化，其目的在于通过计算机技术更准确细微地反映图像、声音. 甚至计算歌星与球队的排名都有许多方法. 因此有人说："一个国家的科学水平可以用它消耗的数学来度量."

20世纪初期，科学的深刻变化促使人们从哲学高度进行反思，从整个文明发展进程的角度来加以总结，并认识到：数学是一种语言，它精确地描述着自然界和人类自身；数学是一种工具，它普遍地适用于所有科学领域；数学是一种精神，它理性地促使人类的思维日臻完善；数学是一种文化，它决定性地影响着人类的物质文明和精神文明的各个方面.

三、数学科学的形成与发展

当人类试图按照自己的意志来支配和改造自然界时，就需要用数学的方法来构想、描述和落实，因此，在人类文明之初就诞生了数学. 古代的巴比伦、埃及、中国、希腊和印度在数学上都有重要的创新，不过从现代意义上说，数学形成于古希腊. 著名的欧几里得几何学是第一个成熟的数学分支. 相比于欧几里得几何学，其它文明中的数学并未形成一个独立的体系，也没有形成一套方法，而是表现为一系列相互无关的、用于解决日常问题的规则，诸如历法推算和用于农业与商业的数学法则等. 这些法则如同人类的其它知识一样是源于经验归纳而成的，因此往往只是近似正确的. 例如，有许多像"径一周三"这样以三表示圆周率的命题. 欧几里得几何学则完全不同，它是一个逻辑严密的庞大体系，仅从10条公理出发，就推导出487个命题，采用的是与归纳思维法相反的演绎推理法. 归纳法是由特殊现象归纳出一般规律的思维方法，而演绎法则正好相反，它从已有的一般结论推导出特殊命题. 例如，假定有"一个运用数学的学科是成熟的学科"这样一个公认正确的一般结论，即所谓的大前提；"物理学运用了数学"这是一个特殊的命题，即所谓的小前提；由以上两点可以得出结论："物理学是成熟的学科". 这就是常说的"三段论"逻辑. 演绎法就运用了这样的逻辑，其主要特征是在前提正确的情况下，结论一定正确. 意识到逻辑推理的作用是古希腊文明对人类的一项巨大贡献.

在希腊被罗马帝国统治之后，希腊的数学研究中断了将近2 000年. 在与罗马的历史平行的1 100年间，希腊没有出现过一位数学家. 他们夸耀自己讲究实际，兴建过许多庞大的工程. 但是过于务实的文化不能产生深刻的数学. 在那之后统治欧洲的基督教提倡为心灵做好准备，以便死后去天国，对于现实的物理世界缺乏兴趣. 这一时期，数学在中国、印度和阿拉伯地区继续发展，也有许多重要的创新. 但是这些古代文明不像希腊文明那样追求绝对可靠的真理，因此没有形成大规模的理论

结构体系. 例如, 著名的祖冲之提出的圆周密率领先欧洲1 000多年, 但是他没有给出推导密率的理论依据.

被罗马帝国和基督教逐出的希腊文明, 在1 000 多年后重返欧洲. 当时, 教会仍然主宰一切, 真理只存在于圣经之中. 饱受压抑而善于思索的学者们看清了希腊文明远比教会高明, 于是他们立即接受了这份遗产, 特别是"世界是按数学设计"的信念. 哥白尼经过多年的观察和计算, 创立了日心说, 认定太阳才是宇宙的中心, 而不是地球. 日心说不仅改变了那个时代人类对宇宙的认识, 而且动摇了宗教的基本教义: 上帝把最珍爱的创造物 —— 人类安置在宇宙的中心 —— 地球. 日心说是近代科学的开端, 而科学正是现代社会的标志. 科学使处于低水平的西欧文明迅速崛起, 短短两三百年后领先于全世界.

在这之后, 科学发展具有决定性意义的一步是由伽利略 (G. Galileo) 迈出、由牛顿完成的, 这就是**科学的数学化**. 伽利略认为, 基本原理必须源于经验和实验, 而不是智慧的大脑. 这是革命性的关键的一步, **它开辟了近代实验科学的新纪元**. 人脑可以提供假设, 但假设和猜想必须通过检验. 哥白尼的日心说如此, 牛顿的万有引力如此, 爱因斯坦的相对论也是如此. 为了使科学理论得以反复验证, 伽利略认为科学必须数学化, 他要求人们不要用定性的模糊的命题来解释现象, 而要追求定量的数学描述, 因为数量是可以反复验证和精确测定的. **追求数学描述而不顾物理原因是现代科学的特征**.

17 世纪60年代, 牛顿用这种新的方法论取得了辉煌的成功, 以至于几乎所有科学家都立即接受了这种方法, 并取得了丰硕的成果. 这种方法称为西欧工业革命的科学基础. 牛顿决心找出宇宙的一般法则, 他提出著名的力学三定律和万有引力假设. 然后用他发明的微积分方法, 经过复杂的计算和演绎, 既导出了地球上物体的运动规律, 也导出了太空中物体的运动规律, 统一了宇宙中的各种运动, 而这些都是由数学推导完成的, 从而引起了巨大的轰动. 17 世纪的伟大学者们发现了一个量化了的世界, 这就是繁荣至今的科学数学化的开始.

牛顿的广泛的研究方向, 以及他和莱布尼茨 (G. W. Leibniz) 共同创造的微积分, 成为从那以后的100多年间科学家研究的课题. 由于追求量化的结论, 当时的科学家都是数学家, 而伟大的数学家也毫无例外地都是科学家. 科学家寻求一个量化的世界的努力一直延续至今, 他们的主要目标不再是解释自然, 而是为了作出预测, 以便实现各种理想和愿望. 在这个过程中, 以几何为基础的数学, 重心转移到了代数、微积分及其各种数量关系的后续分支上.

代数成为一门学科可以认为开始于韦达 (F. Viete) 的研究. 在此之前, 代数是用文字表示的一些应用问题, 只不过是一些实用的方法和计算的"艺术", 没有自己的理论. 韦达的功绩是用一整套符号表示代数中的已知量、未知量和运算. 这使得代数问题可以抽象归结为符号算式, 这样就脱离了它的具体背景, 然后根据一整套规定的法则作恒等变形, 直至求出答案. 后来, 笛卡尔 (R. Descartes) 用坐标方法,